MA
ST
LIBR

# Elliptische Functionen.

## Theorie und Geschichte.

---

Academische Vorträge

von

Dr. **Alfred Enneper,**
Professor an der Universität zu Göttingen.

**Halle a/S.**
Verlag von Louis Nebert.
1876.

NATL. STAT. LIBRARY

Das Recht der Uebersetzung in fremde Sprachen bleibt vorbehalten.

QH 343
E6
MATH.
STAT.
LIBRARY

# Vorrede.

Das vorliegende Werk enthält im Wesentlichen das Material der Vorträge des Verfassers über Theorie und Anwendung der elliptischen Functionen. Dasselbe schliesst eine Ausführung des theoretischen Theiles ein, mit besonderer Rücksicht auf den Entwickelungsgang des behandelten Gegenstandes.

Die hervorragende Bedeutung der Lehre von den elliptischen Functionen darf wohl zur Rechtfertigung einer Darstellung dienen, welche namentlich der historischen Entfaltung eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt hat. Der ungemeine Reichthum analytischer Entwickelungen, verbunden mit den verschiedensten Anwendungen auf fast alle Zweige der Mathematik, scheinen eine möglichst einfache Begründung der Lehre von den elliptischen Functionen zu fordern. Von diesen Gesichtspunkten ist der Verfasser ausgegangen, mit dem Bestreben, die Theile der Theorie, welche namentlich bei academischen Vorträgen zur Sprache kommen, eingehend zu behandeln.

Die Arbeiten von *Legendre, Abel* und *Jacobi*, welche das Fundament aller späteren Untersuchungen bilden, haben bei Abfassung dieser Blätter eine besondere Beachtung gefunden. Fast jedes Theorem, jede Formel in der Theorie der elliptischen Integrale und elliptischen Functionen ist innig mit den Namen der bemerkten

drei grossen Mathematiker verbunden. Sowohl aus historischem Interesse, als der Vergleichung ein leichtes Hülfsmittel zu bieten, ist bei allen wesentlichen Resultaten der Name des ersten Darstellers in Verbindung mit möglichst genauen literarischen Hinweisungen angemerkt worden. Dass wo möglich jede wesentliche Formel die Legitimation ihres Ursprungs bei sich führt, darf wohl auf Billigung rechnen, im Hinblick einer wenig erfreulichen Vernachlässigung der Literatur in vielen mathematischen Schriften. Es lässt sich eine solche Vernachlässigung um so weniger entschuldigen, als Mathematiker wie *Lagrange*, *Gauss* und *Jacobi* in ihren Schriften durch kurze historische Einleitungen darauf hingewiesen haben, wie nützlich ihnen eine Erwähnung der einschlägigen Arbeiten erschien. Die bekannte Thatsache, dass jedes Zurückgreifen auf originale Arbeiten für die weitere Förderung einer Wissenschaft ungemein anregend wirkt, hat den Verfasser bestimmt, keine Mühe zu scheuen, die literarischen Nachweise mit grosser Sorgfalt zu behandeln. Mit einer geringfügigen Ausnahme (p. 498) hat der Verfasser alle angeführten Abhandlungen und Werke selbst eingesehen; nur der grosse Reichthum der hiesigen Bibliothek konnte es ermöglichen, das erforderliche Material für Geschichte und Literatur zu vereinigen.

In Verbindung mit den zahlreichen gedruckten Abhandlungen sind hier noch Aufzeichnungen eines Vortrags zu erwähnen, welcher auf directe Vorträge von *Jacobi* basirt war. Es ist bekannt, dass der grosse Mathematiker, wie kaum einer vor ihm, es verstanden hat, eine Reihe von Gelehrten aus seinen Schülern zu bilden, von denen eine bemerkenswerthe Zahl zu den hervorragendsten Vertretern mathematischer Wissenschaften gehört. Der Verfasser hatte das Glück in die Theorie der elliptischen Functionen von einem dieser hervorragenden Schüler *Jacobi's* — Herrn *C. W. Borchardt* — eingeführt zu werden; leider hinderte eine längere Krankheit den ausgezeichneten Vorträgen bis zu Ende folgen zu können. Es scheint nur selbstverständlich hier anzugeben, was — abgesehn von allen literarischen Bemerkungen — das vorliegende Werk jenen Vorträgen verdankt. Es sind die auf p. 95—89 und p. 103—117 mitge-

theilten Untersuchungen über Theta-Functionen, ferner die Anwendungen dieser Functionen auf Integrale auf p. 166, p. 203 und p. 206; hierzu kommen noch die auf p. 247 und p. 270—272 befolgten Methoden zur Betrachtung einiger unendlichen Producte und schliesslich der Inhalt der Note IV. Wenn auch die Anzahl der angeführten Seiten eine geringe ist, so lässt sich nicht verkennen, dass grade der Inhalt derselben einen schönen Beleg für das wunderbare Genie *Jacobi's* abgiebt. In gleichem Maasse wie die Veröffentlichung der Vorlesungen *Jacobi's* über elliptische Functionen dem Andenken des grossen Mathematikers geboten erscheint, macht sich ebenfalls das Fehlen einer Darstellung desselben Gegenstandes von einem berühmten Mathematiker geltend, welcher 1853 die Wissenschaft durch eine Theorie der Abelschen Functionen bereichert hat (Journ. für Mathematik, Band 47).

Bei einer Theorie, wie die der elliptischen Functionen, deren Ausbildung noch lange ein Feld mathematischer Thätigkeit bleiben wird, kann eine Begegnung von Darstellung ein und desselben Gegenstandes leicht stattfinden. Die ganze Anlage des Werks und namentlich die Ausarbeitung des neunten Abschnitts, haben die eigenen Untersuchungen des Verfassers besonders in Anspruch genommen. Um allen Berufungen mit Rücksicht auf Resultate vorzubeugen, enthalten in Abhandlungen, welche dem Verfasser unbekannt geblieben, ist derselbe gerne bereit allem bestrittenen Eigengenthumsrecht zu entsagen.

Was die angewandten Bezeichnungen betrifft, so sind die von *Legendre* und *Jacobi* gebrauchten Bezeichnungen maassgebend gewesen. Die Arbeiten von vorzüglichen Mathematikern zeigen in Hinsicht auf die Bezeichnungen einen Mangel an Uebereinstimmung, welcher, wenn auch zu bedauern, doch zu entschuldigen ist. Die Theorie, wie sie *Jacobi* hinterlassen, kann nicht als abgeschlossen angesehn werden, so dass wohl einer späteren Zeit eine einheitliche Bezeichnung vorbehalten bleibt.

Durch Aneinanderreihen des Inhalts mehrerer Vorträge war eine Eintheilung des Buchs in Abschnitte geboten. Es muss hier hervorgehoben werden, dass diese Eintheilung nur der besseren

Uebersicht halber angewandt ist und nicht den eigentlichen Character des Werkes verhüllen soll, eine einfache und doch in den Elementen vollständige Einleitung in das reiche Gebiet der elliptischen Functionen zu bilden.

Göttingen, Ende October, 1875.

**Alfred Enneper.**

# Inhaltsverzeichniss.


Erster Abschnitt. Seite

§ 1. Einleitende Betrachtungen . . . . . 1
§ 2. Bemerkungen über einige einfache Integrale irrationaler algebraischer Functionen . . . . . 7
§ 3. Reduction der elliptischen Differentiale nach *Legendre* . . . . 11
§ 4. Bemerkungen und Ausführungen zur Reduction elliptischer Differentiale . . . . . 17
§ 5. Literarische Notizen. Das allgemeine Theorem von *Jacobi* . . . 26

Zweiter Abschnitt.

§ 6. Die elliptischen Functionen. Definitionen derselben durch Differentialgleichungen . . . . . 28
§ 7. Die reelle Periode der elliptischen Fuuctionen . . . . . 32
§ 8. Die elliptischen Functionen mit imaginärem Argument. Die imaginäre Periode der elliptischen Functionen . . . . . 35
§ 9. Die elliptischen Functionen sind doppelt periodische Functionen. Allgemeine Gleichungen für dieselben . . . . . 41

Dritter Abschnitt.

§ 10. Darstellung elliptischer Functionen in Form unendlicher Producte 44
§ 11. Bemerkungen über die unendlichen Producte des § 10. . . . . 51

Vierter Abschnitt.

§ 12. Transformation eines unendlichen Products in eine unendliche Reihe. Darstellung der elliptischen Functionen durch trigonometrische Reihen . . . . . 57
§ 13. Die Quadrate und Producte der elliptischen Functionen in Form unendlicher Reihen . . . . . 64
§ 14. Verification der Reihen für die elliptischen Functionen. Besondere Darstellung der Zähler und Nenner der unendlichen Producte . 71
§ 15. Entwickelung eines unendlichen Products in eine Reihe. Der Ursprung der Theta-Functionen . . . . . 74

Fünfter Abschnitt.

§ 16. Die Theta-Functionen. Beziehungen zwischen denselben . . . 82
§ 17. Vergleichung der Theta-Functionen mit reellen und imaginären Argumenten . . . . . 86
§ 18. Das Multiplicationstheorem der Theta-Functionen . . . . . 95
§ 19. Anwendungen des Fundamental-Theorems. Die Theta-Functionen mit zusammengesetzten Argumenten . . . . . 103

Seite

§ 20. Die Quotienten der Theta-Functionen, das Additionstheorem derselben. Die Constante $\vartheta'_1(o)$ . . . . . 110

Sechster Abschnitt.

§ 21. Uebergang von den Theta-Functionen zu den elliptischen Functionen . . . . . 116

§ 22. Zusammenstellung der wichtigsten Reihen und Producte in der Theorie der elliptischen Functionen. . . . . 120

Siebenter Abschnitt.

§ 23. Das Additionstheorem der elliptischen Functionen und Integrale erster Gattung . . . . . 129

§ 24. Zusammenstellung einiger Formeln, welche sich aus dem Additionstheoreme ergeben. Anwendungen des Additionstheorems . . . 142

Achter Abschnitt.

§ 25. Die elliptischen Integrale und ihre Classification . . . . . 150

§ 26. Die elliptischen Integrale zweiter Gattung . . . . . 159

§ 27. Differentialgleichungen der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Beziehung auf den Modul. Uebergang zu den elliptischen Integralen dritter Gattung . . . . . 168

§ 28. Die elliptischen Integrale dritter Gattung. Untersuchungen von *Legendre* über dieselben, betreffend den Parameter . . . . . 175

§ 29. Die elliptischen Integrale dritter Gattung als Functionen des Parameters. Die ganzen Integrale. . . . . 183

§ 30. Das Additionstheorem der elliptischen Integrale dritter Gattung nach *Legendre* . . . . . 189

§ 31. Ausdruck des Parameters in den elliptischen Integralen dritter Gattung durch elliptische Functionen . . . . . 193

§ 32. Die elliptischen Integrale dritter Gattung nach *Jacobi's* Reihenentwickelungen. *Jacobi's* erste Darstellung des Additionstheorems 196

§ 33. Die elliptischen Integrale dritter Gattung und die Theta-Functionen. Das ganze Integral. Vertauschung von Argument und Parameter. Additionstheoreme der Argumente und Parameter. Integrale mit zusammengesetztem Argument und Parameter . . 203

§ 34. Die verschiedenen Formen der elliptischen Integrale dritter Gattung. Literarische Anmerkungen . . . . . 210

Neunter Abschnitt.

§ 35. Die Transformation der elliptischen Functionen. Erste Untersuchungen von *Jacobi*, betreffend algebraische Principien . . . 225

§ 36. Das Problem der Transformation nach *Abel* . . . . . 237

§ 37. Die Theta-Functionen, für welche $q$ durch $q^n$ ersetzt ist. Die erste reelle Transformation von *Jacobi*. Uebergang vom grösseren zum kleineren Modul . . . . . 246

§ 38. Die Theta-Functionen, für welche $q$ durch $\alpha\, q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt ist, wo $\alpha^n = 1$ . . . . . 264

§ 39. Die $n$ Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen, welche dem Uebergang von $q$ in $\alpha q^{\frac{1}{n}}$ der Theta-Functionen ent-

Seite

sprechen. Die zweite reelle Transformation von *Jacobi*. Uebergang vom kleinern zum grösseren Modul . . . . . 281

§ 40. Die Theta-Functionen, in welchen $q$ durch $q^2$ oder $\sqrt{q}$ ersetzt ist und die entsprechenden elliptischen Functionen. Die Theta-Functionen mit dem zweiten Argumente $e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}$ . . . . . 295

§ 41. Transformationen zweiter Ordnung. Historische und literarische Bemerkungen. *Landen, Legendre, Lagrange, Gauss, Jacobi.* Lineare Relationen zwischen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. *Küpper, Richelot, Schröter* . . . . . 304

§ 42. Die Multiplication der elliptischen Functionen. Theorem von *Jacobi*. Literarische Notizen . . . . . 319

§ 43. Die elliptischen Functionen, deren Modul grösser wie die Einheit ist. Anwendungen derselben auf verschiedene Transformationsgleichungen . . . . . 337

§ 44. Die allgemeine Transformation der Theta-Functionen . . . . . 345

§ 45. Die allgemeine Transformation der elliptischen Functionen mittelst einer algebraischen Gleichung. Literarische Anmerkungen . . . 359

§ 46. Ueber die Differentialgleichungen, welchen die Zähler und die Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln und Multiplicationsformeln genügen . . . . . 372

§ 47. Die Modulargleichungen. Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen dem primitiven und dem transformirten Modul. Der Multiplicator und seine Bestimmung mittelst der Modulargleichung 388

§ 48. Die Modulargleichungen nach *Jacobi* und *Sohncke* . . . . . 394

§ 49. Die Theta-Functionen für einige besondere Werthe des Arguments. Allgemeine Formel für das Product zweier Theta-Functionen von *Schröter*. . . . . 416

§ 50. Anwendung der Theta-Functionen auf die Construction von Modulargleichungen nach *Schröter* . . . . . 424

## Noten.

I. Ueber einige Integrale, welche sich auf elliptische Integrale reduciren lassen . . . . . 431

II. Die Reihen von *Lagrange* und *Fourier* . . . . . 439

III. Transformationen einiger unendlichen Producte in Reihen . . . 448

IV. Theorem über die Theta-Functionen. Transformation einer Reihe in ein Product . . . . . 449

V. Ueber einige Folgerungen *Jacobi's* aus dem Additionstheoreme der elliptischen Functionen durch Combinationen der betreffenden Gleichungen und Integration . . . . . 453

VI. Das Theorem von *Fagnano*. Die Ellipsen- und Hyperbelbogen. Theorem von *Landen* . . . . . 456

VII. Historische Notizen über geometrische Anwendungen elliptischer Integrale. *Maclaurin, d'Alembert, Jacob* u. *Johann Bernoulli, Fagnano, Euler, Legendre.* Arbeiten über *Fagnano. Brinkley, Wallace, Talbot, Libri* . . . . . 470

Seite

VIII. Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale zweiter Gattung.
A. Sätze über confocale Kegelschnitte und die Lemniscate. *Graves, Mac Cullagh, Salmon, Hart, Chasles* . . . . . 497
B. Die Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids. *Legendre, Catalan, Plana, Lebesgue, Schlömilch, Malmstèn* . . . . . 503
IX. Zwei Beispiele zur Reduction der elliptischen Integrale dritter Gattung mit complexen Parametern auf Integrale mit reellen Parametern nach der Methode von *Legendre* . . . . . 511
X. Die Transformationen erster Ordnung von *Abel*. Die Transformationen dritter und fünfter Ordnung nach *Jacobi* . . . . . 515
XI. Die Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung nach *Legendre* . . . . . 520
XII. Entwickelung einiger elliptischen Functionen in Reihen nach *Hermite* . . . . . 522

# Erster Abschnitt.

## § 1. Einleitende Betrachtungen.

Die Novi Commentarii Academiae scientiarum. imper. Petropolitanae, t. X. (pro Anno MDCCLXIV, Petropoli MDCCLXVI) enthalten die berühmte Abhandlung *Euler*'s:

„De Reductione Formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae."

Diese Arbeit ist sowohl ihres Inhalts wegen, als wegen der Untersuchungen von *Legendre,* zu denen sie den Anstoss gegeben zu haben scheint, äusserst bemerkenswerth. *Euler* fasst die Resultate von *Maclaurin* und *d'Alembert* über die Rectification der Ellipse und Hyperbel zu einer allgemeinen Untersuchung zusammen, welche die Bogen von Ellipseu und Hyperbeln behandelt, deren Differenz sich auf geometrische Weise angeben lässt. Auf pag. 4 bemerkt *Euler:*

„Imprimis autem hic idoneus signandi modus desiderar videtur, cujus ope arcus elliptici aeque commode in calculo exprimi queant, ac jam logarithmi et arcus circulares ad insigne Analyseos per idonea signa in calculum sint introducti. Talia signa novam quandam calculi speciem suppeditabunt, cujus hic quasi prima elementa exponere constitui."

Diese Bemerkung *Euler*'s findet sich reproducirt auf pag. VII des Avertissemcnt im ersten Bande des grossen Werkes von *Legendre:*

Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes. Paris 1825—28. 2 Vol. und 3 Supplemente.

*Legendre* bemerkt zu den Worten *Euler*'s Folgendes:

„Euler avait prévu qu'à l'aide d'une notation convenable, le calcul des arcs d'ellipse et d'autres transcendantes analogues, pourrait devenir d'un usage presque aussi général que celui des arcs de cercles et des logarithmes, mais si on excepte *Landen*, qui, par la découverte de son théorème, aurait pu s'ouvrir des routes nouvelles, personne ne s'est mis en devoir de réaliser la prédiction d'Euler, et on peut dire que l'Auteur de ce Traité est resté seul à s'en occuper, depuis l'année 1786 où il a fait paraître ses premières recherches sur les arcs d'ellipse, jusqu'à l'époque actuelle."

Die Untersuchungen über die Bogen von Ellipse und Hyperbel haben *Legendre* darauf geführt, sowohl die entsprechenden Integrale, wie andere Integrale, zu welchen rein analytische Betrachtungen Veranlassung gaben, mit dem Namen „elliptische Functionen" zu belegen. Diese Bezeichnung hat darin eine Aenderung erlitten, als gegenwärtig das Wort *Function* durch *Integral* ersetzt ist, so dass die Arbeiten *Legendre*'s sich auf elliptische Integrale beziehen Die Bezeichnung „elliptische Functionen" ist auf eine Gattung von Functionen übertragen worden, welche mit den elliptischen Integralen in enger Verbindung stehn, wobei die Terminologie leider an jener Unvollkommenheit leidet, die ihren Ursprung in der scheinbaren Verallgemeinerung eines isolirten Problems hat. Für die auftretenden Integrale und Functionen ist das Epitheton „elliptisch" weder geometrisch noch analytisch irgendwie characteristisch, sondern rein conventioneller Natur.

Unter den Functionen einer Variabeln haben die trigonometrischen Functionen die Eigenthümlichkeit, dass der Werth einer solchen Function ungeändert bleibt, wenn das Argument um ein Multiplum einer gewissen reellen Quantität zunimmt. Diese Quantität heisst nach *Gauss* der Modul, nach *Jacobi* der Index der Periodicität, oder auch wohl einfach die Periode. Beschränkt man sich nicht allein auf reelle Perioden, so führen die Exponentialfunctionen auf imaginäre Perioden. Diese verschiedenen Functionen, welche durch Combinationen zu allgemeineren Betrachtungen über die Periodici-

tät Veranlassung geben, sind specielle Fälle einer allgemeineren Gattung von Functionen, welche „elliptische Functionen“ heissen. Die elliptischen Functionen bilden die einfachsten doppelt periodischen Functionen. Mit diesem Namen werden Functionen bezeichnet, deren Werth ungeändert bleibt, wenn zwei bestimmte Quantitäten zum Argument hinzugefügt werden können.

Die Eigenschaft der doppelten Periodicität der elliptischen Functionen bildet die Basis der Untersuchungen, durch welche im zweiten Viertel unseres Jahrhunderts die beiden grossen Vertreter ihrer Wissenschaft, *N. H. Abel* aus Christiania und *C. G. J. Jacobi* aus Königsberg, die mathematischen Wissenschaften in ungeahnter Weise erweiterten. So scharfsinnig die Arbeiten *Legendre*'s auch sind, drohten dieselben doch steril zu bleiben. Im hohen Alter von 76 Jahren hatte *Legendre* die Freude, einen sehr verspäteten, aber auch sehr glänzenden Erfolg seiner Arbeiten zu erleben. In der Vorrede zum ersten Supplement, datirt Paris, d. 12. August, 1828, sagt der Verfasser:

„Après m'être occupé pendant un grand nombre d'années de la théorie des fonctions elliptiques, dont l'immortel Euler avait posé les fondemens, j'ai cru devoir rassembler les resultats de ce long travail dans un Traité qui a été rendu public au mois de janvier 1827. Jusque là les géomètres n'avaient pris presque aucune part à ce genre de recherches, mais à peine mon ouvrage avait-il vu le jour, à peine son titre pouvait il être connu des savans étrangers, que j'appris avec autant d'étonnement que de satisfaction, que deux jeunes géomètres MM. Jacobi (C—G—J) de Koenigsberg et Abel de Christiania, avaient réussi, par leurs travaux particuliers, à perfectionner considérablement la théorie des fonctions elliptiques dans ses points les plus élevés.

*Abel* hat seine genialen Untersuchungen in den fünf ersten Bändeu des 1826 von *Crelle* begründeten „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ niedergelegt. Ausserdem enthalten die „Astronomische Nachrichten“ (Band VI. p. 365—388, Bd. VII. p. 33—44) einige Mittheilungen von *Abel* über eine Entdeckung,

betreffend die allgemeine Theorie der elliptischen Functionen, von welcher *Jacobi* an *Legendre* schreibt:

„Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.“ *)

Die Arbeiten von *Abel*, welche in Crelle's Journal enthalten sind, vermehrt um Aufsätze aus seinem Nachlass, finden sich zusammengestellt in dem Werke: „Oeuvres complètes de *N. H. Abel* Redigées par *Holmboe*. Christiania 1859.“ Nur sehr kurze Zeit war es *Abel* vergönnt gewesen, seine grossen und mannichfachen Entdeckungen weiter zu verfolgen, kaum 27 Jahre alt, nicht ganz zwei Jahre nach Veröffentlichung seiner ersten Arbeiten über die elliptischen Functionen setzte der Tod ein frühes Ziel der glänzenden Laufbahn dieses tiefsinnigen und umfassenden Geistes. **) Gleichzeitig mit *Abel* veröffentlichte *Jacobi* seine ersten Entdeckungen in Crelle's Journal und den Astronomischen Nachrichten (Bd. VI. p. 33—38, u. 133—142). Kurze Zeit nach diesen Publicationen. liess *Jacobi* sein berühmtes Werk erscheinen:

Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum Auctore C. G. J. Jacobi. Regiomonti 1829.

Dieses Werk, welches seinen Verfasser, der damals noch nicht ganz 25 Jahre alt war, mitten unter die hervorragendsten Geometer seiner Zeit stellte, enthält in sehr gedrängter Kürze einen grossen Theil der wesentlichsten Resultate aus der Theorie der elliptischen

---

*) Vide „Annales scientif. de l'École Normale. Toms VI. Année 1869. p. 150. Es finden sich dort auf p. 127—175 eilf Briefe von *Jacobi* an *Legendre* aus dem Zeitraum von 1827—1832 mitgetheilt. Der Herausgeber dieser, für die Geschichte der elliptischen Functionen merkwürdigen Briefe, *Bertrand*, bemerkt in der Einleitung zu der obigen Aeusserung des damals noch nicht ganz dreiundzwanzigjährigen *Jacobi*:

„Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, dont la sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à l'injustice.“

**) Vide: *Dirichlet*, Gedächtnissrede auf *Carl Gustav Jacob Jacobi*. Crelle Journal t. 52. p. 203. Dieser Aufsatz enthält von Freundeshand eine vollständige und liebevolle Würdigung der Arbeiten des grossen Mathematikers von Königsberg. Es möge hier, was die Verdienste von *Abel* und *Jacobi* um die Schöpfung der elliptischen Functionen betrifft, auf diese Abhandlung hingewiesen sein.

Functionen.*) *Jacobi* hat später in Crelle's Journal weitere Untersuchungen in einer Reihe von Aufsätzen niedergelegt, welche bestimmt waren, einen zweiten Theil der „Fundamenta" zu bilden. Das weitere Vordringen führte indessen *Jacobi* zu einem genaueren Studium seiner Theta-Functionen, welche als die Elemente der elliptischen Functionen angesehn werden können. *Jacobi* hat eine neue Begründung der Theorie der elliptischen Functionen, basirt auf die Theta-Functionen, nur in academischen Vorträgen der Nachwelt hinterlassen, eine Hinterlassenschaft, welcher sich ausgezeichnete Schüler mit Liebe und Talent angenommen haben und deren Arbeiten für die weitere Ausbildung der elliptischen Functionen von wesentlicher Bedeutung sind. Ueber die Leistungen *Jacobi*'s mögen folgende Worte aus der Gedächtnissrede von *Lejeune-Dirichlet* Platz finden, welche in ausgezeichneter Weise den ausserordentlichen Geist von *Jacobi* characterisiren:

> „*Jacobi*'s wissenschaftliche Laufbahn umfasst gerade ein Vierteljahrhundert, also einen weit kürzeren Zeitraum als die der meisten früheren Mathematiker ersten Ranges, und kaum die Hälfte der Zeit, über welche sich *Euler*'s Wirksamkeit erstreckt hat, mit dem er, wie durch Vielseitigkeit und Fruchtbarkeit, so auch darin die grösste Aehnlichkeit hat, dass ihm alle Hülfsmittel der Wissenschaft immer gegenwärtig waren und jeden Augenblick zu Gebote standen."

Zur Zeit als *Abel* und *Jacobi* ihre überraschenden Entdeckungen der mathematischen Welt mittheilten, befand sich *Gauss* schon im Besitz einer ziemlichen Anzahl von Theoremen, welche sich auf elliptische Functionen beziehn. Eine kurze Andeutung, welche die „Disquisitiones Arithmeticae" (Gauss' Werke, Bd. I. p. 413) enthalten, liess vermuthen, dass *Gauss* schon gegen Ende des vorigen Jahrhunderts sich mit Untersuchungen beschäftigt hatte, welche ihn

*) Die grosse Bedeutung, welche dem Werke *Jacobi*'s, kurz nach seiner Publication, von den Zeitgenossen beigelegt wurde, geht aus dem Berichte über dasselbe von *Poisson* an die Pariser Academie hervor. Dieser Bericht unter Titel: Rapport sur l'ouvrage de M. Jacobi intitulé Fundamenta etc. findet sich auf p. 73—117 im t. X der Mémoires de l'Académie des Sciences et de l'Institut de France.

zu identischen Resultaten mit denen von *Abel* und *Jacobi* geführt hatten. Diese Vermuthung hat durch Herausgabe des Nachlasses von *Gauss* ihre volle Bestätigung gefunden (Gauss, Werke. Bd. III. p. 231 u. f.).

Am 23. Mai 1828 schreibt *Gauss* an *Schuhmacher* über eine Arbeit von *Abel:*

„... die, Ihnen gesagt, mir von meinen eigenen Untersuchungen wol ein Drittel weggenommen hat, und mit diesen zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt."

Man findet weitere historische, sehr interessante Notizen über die erste Entdeckung der elliptischen Functionen durch *Gauss* im III. Bande seiner Werke auf p. 491—496. Es bleibt immer bedauernswerth, dass einer der grössten Mathematiker aller Zeiten seine wunderbaren Entdeckungen den Zeitgenossen nicht mitgetheilt und dadurch zur Mitarbeit aufgefordert hat. In der bedeutenden Abhandlung: „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcedentium Abelianarum innititur" (Crelle, Journal XIII.) hat *Jacobi* den für die Theorie der Functionen wichtigen Satz bewiesen, dass eine periodische Function einer Variabeln nicht mehr wie zwei Perioden haben kann, und dass, allgemein gesprochen, diese Perioden complexe Grössen sind, welche sich nur auf eine reelle und eine imaginäre Quantität reduciren können, aber niemals auf zwei Quantitäten derselben Art, also zwei reelle oder zwei imaginäre Quantitäten. Indem die elliptischen Functionen die einfachsten doppelt periodischen Functionen einer Variabeln sind, nehmen dieselben unter den Functionen einer Variabeln eine besondere Stellung ein, welche, in Verbindung mit den mannichfachsten Anwendungen auf die verschiedensten Theile der Mathematik, zu einem besonderen Studium dieser Functionen auffordert.

## § 2. Bemerkungen über einige einfache Integrale irrationaler algebraischer Functionen.

Es seien $a$, $b$, $c$ reelle Quantitäten, $a$ sei wesentlich positiv. Durch Division mit $a$ folgt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\pm ay^2 + 2b_1 y + c_1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dy}{\sqrt{\pm y^2 + 2\frac{b_1}{a} y + \frac{c_1}{a}}}.$$

Setzt man zur Vereinfachung $b_1 = ab$, $c_1 = ac$, so kommt die Bestimmung des rechts stehenden Integrals auf die Betrachtung des Integrals

$$\int \frac{dy}{\sqrt{\pm y^2 + 2by + c}}$$

hinaus. Die Function unter dem Integralzeichen lässt sich durch Einführung einer neuen Integrationsvariabeln so transformiren, dass unter dem Wurzelzeichen keine Constante mehr enthalten ist. Es ist nämlich für:

$$y + b = x\sqrt{c - b^2} \quad c - b^2 > 0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2by + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{\sqrt{1 + x^2} + x}{\sqrt{1 + x^2} - x}.$$

$$y + b = x\sqrt{b^2 - c}, \quad b^2 - c > 0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + 2by + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \tfrac{1}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$y - b = x\sqrt{b^2 + c}, \quad b^2 + c > 0,$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{-y^2 + 2by + c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x.$$

Das letzte der vorstehenden Integrale hat ein besonderes Interesse, da dasselbe zur Betrachtung einer Function Veranlassung giebt, mit deren Hülfe sich die beiden vorhergehenden Integrale leicht behandeln lassen. Man setze:

$$1) \quad \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = u,$$

oder:

$$2) \quad \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = du,$$

mit der Bestimmung, dass $x$ und $u$ gleichzeitig verschwinden. Die Gleichung 1) giebt dann zu einer doppelten Betrachtung Veranlassung. Nimmt man $x$ als gegeben an, so ist $u$ eine bestimmte Function von $x$. Wird der Einfachheit halber $x \leqq 1$ genommen, so lässt sich in der Gleichung 1) die Function unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $x^2$ entwickeln. Man erhält dann durch Integration:

$$3) \quad u = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots.$$

Durch diese Gleichung ist $u$ als Function von $x$ durch eine unendliche Reihe bestimmt, welche Reihe in der Lehre der einfachen Functionen bekanntlich durch $\arcsin x$ bezeichnet wird.

In der Gleichung 1) kann man auch $u$ als gegeben annehmen, so dass $x$ Function von $u$ ist, d. h. der Werth des Integrals ist gegeben, man soll die obere Gränze finden, welche dem gegebenen Integralwerthe entspricht. Das Problem lässt sich auch als Umkehrung der auf der rechten Seite der Gleichung 3) stehenden unendlichen Reihe auffassen, welche Definition aber die Schwierigkeit darbietet, dass die Gleichung 3) als algebraische Gleichung von unendlich hohem Grade angesehn, keine endliche Anzahl von Wurzeln hat. Wie die verschiedenen Wurzeln zusammenhängen, ist a priori nicht ersichtlich, noch gestattet diese Methode $x$ einen beliebigen reellen Werth beizulegen. Statt der Gleichung 3) nehme man die Differentialgleichung 2) und bestimme $x$ dadurch, dass $x$ mit $u$ gleichzeitig verschwindet. Setzt man $x = \varphi(u)$, so ist, zufolge der Definition $\varphi(0) = 0$. Für $z = -t$ folgt:

$$\int_0^{-x} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = -\int_0^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -u,$$

also $-x = \varphi(-u)$ d. i. $-\varphi(u) = \varphi(-u)$. Die Gleichung 2) giebt:

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}$$

oder:

$$4) \quad \varphi'(u) = \sqrt{1-\varphi(u)^2}.$$

Hieraus folgt unmittelbar durch Differentiation:

$$\varphi''(u) = -\frac{\varphi(u)\varphi'(u)}{\sqrt{1-\varphi(u)^2}}$$

d. i. nach 4):

$$5) \quad \varphi''(u) = -\varphi(u).$$

Aus den Gleichungen 4) und 5) erhält man leicht:

$$6) \quad \varphi^{2n}(u) = (-1)^n \varphi(u),$$

$$\varphi(u)^{(2n+1)}(u) = (-1)^n \sqrt{1-\varphi(u)^2} = (-1)^n \varphi'(u).$$

Die Gleichungeu 6) führen unmittelbar auf das Ádditionstheorem für die Function $\varphi(u)$. Nach dem Theorem von Taylor ist, wenn $v$ die positive oder negative Einheit nicht überschreitet:

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + v\varphi'(u) + \frac{v^2}{1.2}\varphi''(u) + \ldots$$

Wegen der Gleichungen 6) nimmt diese Gleichung die Form an:

$$7) \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)\, V_1 + \varphi'(u)\, V,$$

wo $V$ und $V_1$ Functionen vón $v$ sind, welche sich leicht auf folgende Weise bestimmen lassen. Die Gleichung 7) differentiire man nach $u$, dann folgt:

$$8) \quad \varphi'(u+v) = \varphi'(u)\, V_1 - \varphi(u) V.$$

In den Gleichungen 7) und 8) nehme man $u = 0$. Da nach 4) $\varphi'(0) = 1$ ist, so folgt:

$$\varphi(v) = V, \quad \varphi'(v) = V_1.$$

Die Gleichungen 7) und 8) gehen hierdurch über in:

$$9) \quad \varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v) = \varphi(u)\sqrt{1-\varphi(v)^2} + \varphi(v)\sqrt{1-\varphi(u)^2},$$

$$10) \quad \varphi'(u+v) = \varphi'(u)\varphi'(v) - \varphi(u)\varphi(v) = \sqrt{1-\varphi(u)^2}\sqrt{1-\varphi(v)^2} - \varphi(u)\varphi(v).$$

Setzt man:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

so ist $1 = \varphi(\frac{1}{2}\pi)$ und $0 = \varphi'(\frac{1}{2}\pi)$, wo $\pi$ eine bestimmte numerische Constante ist, welche bekanntlich das Verhältniss vom Umfang zum Diameter eines Kreises ausdrückt. Die Gleichungen 9) und 10) geben $u = \frac{1}{2}\pi$ gesetzt:

$$11) \quad \varphi(\tfrac{1}{2}\pi + v) = \varphi'(v), \quad \varphi'(v + \tfrac{1}{2}\pi) = -\varphi(v).$$

Durch diese Gleichungen lassen sich die Functionen $\varphi$ und $\varphi'$

mit Argumenten, welche die positive oder negative Einheit übersteigen, auf Functionen reduciren, welche innerhalb dieser Gränzen bleiben. Man kann in den Gleichungen 11) also $v$ beliebig reell annehmen. Setzt man $v = \frac{1}{2}\pi + u$, so folgt:

$$\varphi(\pi+u) = \varphi'(\tfrac{1}{2}\pi+u) = -\varphi(u),$$
$$\varphi'(\pi+u) = -\varphi(\tfrac{1}{2}\pi+u) = -\varphi'(u),$$

also allgemein, wenn $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet:

$$\varphi(u+m\pi) = (-1)^m\varphi(u), \qquad \varphi'(u+m\pi) = (-1)^m\varphi'(u).$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Functionen $\varphi(u)$ und $\varphi'(u)$, abgesehen vom Zeichen, dieselben Werthe annehmen, wenn das Argument um ein Multiplum der Constanten:

$$2\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

zunimmt. Die beiden Functionen sind also periodische Functionen. Eine weitere Ausdehnung dieser Betrachtungen über die Function $\varphi(u)$, wenn $u$ nicht mehr reell ist, soll hier nicht ausgeführt werden. Die vorstehende Skizze soll nur eine Idee geben von dem Wege, welchen man bei Untersuchungen von Integralen anwenden kann, die, sich fast von selbst darbietend, als Erweiterungen der Integrale angesehn werden können, von denen zu Anfang dieses § die Rede war.

Als nächste Frage bietet sich die Reduction eines Integrals

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0}}$$

oder:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_4y^4 + a_3y^3 + a_2y^2 + a_1y + a_0}}$$

auf seine einfachste Form dar und dann der Versuch einer Umkehrung, indem die obere Gränze der einfachsten Form als Function des Integrals angesehn wird. Diese Anschauungsweise hat in der That den Anstoss zu den elliptischen Functionen gegeben.

Es wird sich ergeben, dass die beiden obigen Integrale auf dieselbe einfachste Form, welche die Normalform heisst, reductibel sind, gleichviel, ob das Polynom unter dem Wurzelzeichen vom dritten oder vierten Grade ist.

Die Betrachtung der Function $\varphi(u)$ in diesem § ist eine etwas weitere Ausführung einer kurzen Andeutung von *Eisenstein*, enthalten in dessen Abhandlung: „Neuer Beweis der Summationsformeln“ (Crelle Journ. t. XXX p. 211, oder auch Mathematische Abhandlungen. Berlin 1847. p. 241). Untersuchungen ähnlicher Art findet man schon in der Sectio II, Cap. V des ersten Bandes der „Institutiones calculi integralis“ von *Euler* (Petropoli 1824, p. 364), zu welchen *Durège* einige vereinfachende Bemerkungen hinzugefügt hat (Zeitschrift f. Mathem. Jahrg. III p. 241).

## § 3. Reduction der elliptischen Differentiale nach Legendre.

Sind $P$ und $Q$ zwei Polynome von $y$, ist ferner $R$ ein Polynom vom vierten Grade von $y$, so heisst das Integral:

$$1) \qquad \int \frac{P}{Q} \frac{dy}{\sqrt{R}}$$

ein elliptisches Integral, dessen Untersuchung *Legendre* zuerst insoweit vollständig durchgeführt hat, als die namentlich von *Euler* überlieferten Hülfsmittel der Analysis dieses gestatteten. *Legendre* fand, dass das obige Integral zu drei verschiedenen Gattungen Veranlassung giebt, als deren einfachste diejenige anzusehen ist, welche in der Form:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R}}$$

enthalten ist. Da vorläufig nur einige Transformationen in Betracht kommen, so soll statt des Integrals einfach das Differential:

$$2) \qquad \frac{dy}{\sqrt{R}}$$

genommen werden und ein solches Differential ein *elliptisches Differential* heissen. Durch ungemein einfache Betrachtungen gelangte *Legendre* dazu, den Ausdruck 2) auf die Form:

$$\frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}$$

zu reduciren, wo $M$ eine Constante und $0 < k < 1$ ist. Nachdem

dieses wichtige Resultat gefunden, gelang es *Legendre*, das in 1) enthaltene allgemeine Integral auf seine einfachsten Formen zu reduciren und so eine Vergleichung zwischen Integralen zu ermöglichen, welche Arbeit, wie *Dirichlet* in seiner Gedächtnissrede auf *Jacobi* bemerkt, *Legendre* zum unvergänglichen Ruhme gereicht. (Crelle Journ. t. 52 p. 198.)

Es seien $a_4$, $a_3$, $a_2$, $a_1$ und $a_0$ reelle Grössen, $a_4$ wesentlich positiv. In dem Ausdrucke 2) ist dann:

$$R = \pm a_4 y^4 + a_3 y^3 + a^2 y^2 + a_1 y + a_0.$$

Man kann sämmtliche Coefficienten durch $a_4$ dividiren, setzt man dann zur Vereinfachung:

$$3) \qquad \pm y_4 + \frac{a_3}{a_4} y^3 + \frac{a_2}{a_4} y^2 + \frac{a_1}{a_4} y + \frac{a_0}{a_4} = Y,$$

so wird der Ausdruck 2):

$$\frac{1}{\sqrt{a_4}} \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

wobei es wesentlich nur auf die Reduction von:

$$4) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

ankommt. Um diese Reduction zu bewerkstelligen, hat *Legendre* folgenden Weg eingeschlagen. (Fonct. ell. I. p. 6—11, im Auszuge in den „Integraltafeln" von *Minding*. Berlin 1849 p. 172.) Die linke Seite von 3) möge für die Werthe $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ von $y$ verschwinden, so dass:

$$5) \qquad Y = \pm (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta).$$

Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ reell, so sei $\alpha > \beta > \gamma > \delta$, die Grössen sind den absoluten Werthen nach geordnet, also vom Positiven zum Negativen abnehmend. Sind zwei Quantitäten complex, so sei $\gamma = m + ni$, $\delta = m - ni$, wo $i$, wie immer in der Folge, gleich $\sqrt{-1}$ ist. Sind alle vier Quantitäten complex, so seien $\alpha$ und $\beta$, ferner $\gamma$ und $\delta$ zu einander conjugirt. Durch eine Substitution von der Form:

$$6) \qquad y = \frac{p + qz}{1 + z}$$

erhält man aus 4) und 5):

$$7) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{(q-p)\,dz}{\sqrt{\pm Z}},$$

wo:

$$8) \qquad Z =$$

$$[p-\alpha+(q-\alpha)z][p-\beta+(q-\beta)z][p-\gamma+(q-\gamma)z][p-\delta+(q-\delta)z].$$

Man kann nun $p$ und $q$ in 6) solche reelle Werthe beilegen, dass der Ausdruck $Z$ nur gerade Potenzen von $z$ enthält. In der Gleichung 8) hat man nur auf der rechten Seite je zwei Factoren mit einander zu multipliciren und die Factoren von $z$ zu annulliren. Führt man dieses für die beiden ersten und die beiden letzten Factoren aus, so folgt aus 8):

$$9) \qquad Z =$$

$$[(p-\alpha)(p-\beta)+(q-\alpha)(q-\beta)z^2]\,[(p-\gamma)(p-\delta)+(q-\gamma)(q-\delta)z^2].$$

Zur Bestimmung von $p$ uud $q$ dienen die Gleichungen:

$$(p-\alpha)(q-\beta)+(p-\beta)(q-\alpha) = 0,$$
$$(p-\gamma)(q-\delta)+(p-\delta)(q-\gamma) = 0,$$

oder:

$$10) \qquad pq+\alpha\beta = \frac{p+q}{2}(\alpha+\beta), \quad pq+\gamma\delta = \frac{p+q}{2}(\gamma+\delta).$$

Für complexe Wurzeln lassen sich nur die vorstehenden Gleichungen aufstellen. Diese Gleichungen geben:

$$11) \qquad \frac{p+q}{2} = \frac{\alpha\beta-\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}$$

$$pq = \frac{\alpha\beta(\gamma+\delta)-\gamma\delta(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},$$

und hieraus:

$$12) \qquad \left(\frac{q-p}{2}\right)^2 = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}.$$

Unter den gemachten Annahmen ist der rechts stehende Ausdruck immer positiv, die Gleichungen 11) und 12) ergeben also für $p$ und $q$ reelle Werthe. Sind $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sämmtlich reell, so könnte man die Factoren auf der rechten Seite der Gleichung 8) noch auf andere Art je zwei zu zwei combiniren. Man findet nur noch eine Combination der Art, dass die rechte Seite der Gleichung 12) positiv bleibt, wenn man nämlich auf der rechten Seite der Gleichung

8) den ersten mit dem vierten Factor, ferner den zweiten mit dem dritten Factor multiplicirt und in den jedesmaligen Producten die Coefficienten von $z$ annullirt. Man erhält die entsprechenden Gleichungen unmittelbar aus 11) und 12) durch Vertauschung von $\beta$ mit $\delta$, nämlich:

$$\frac{q+p}{2} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha+\delta-\beta-\gamma},$$

$$13) \qquad \left(\frac{q-p}{2}\right)^2 = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{(\alpha+\delta-\beta-\gamma)^2}.$$

Die Gleichungen 13) werden ungültig für $\alpha+\delta=\beta+\gamma$. Dann tritt an die Stelle der Gleichung 6) die folgende:

$$y = z + \frac{\alpha+\delta}{2} = z + \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Die Gleichungen 11) und 12) geben, wenn $q-p$ positiv genommen wird:

$$\frac{q-\alpha}{p-\alpha}\frac{q-\beta}{p-\beta} = -\left[\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}-\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}\right]^2,$$

$$\frac{q-\gamma}{p-\gamma}\frac{q-\delta}{p-\delta} = -\left[\frac{\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}{\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\right]^2,$$

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 =$$
$$-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2[\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}]^2.[\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}-\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}]^2.$$

Die letzte Gleichung lässt sich auch schreiben:

$$(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta) =$$
$$-\left(\frac{q-p}{2}\right)^2(\gamma-\delta)^2\left[\frac{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}+\sqrt{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}}{\sqrt{(\alpha-\delta)(\beta-\delta)}+\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}}\right]^2.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Gleichung 7) sich immer auf folgende Form bringen lässt:

$$14) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dz}{f\sqrt{\pm(1\pm g^2z^2)(1\pm h^2z^2)}},$$

wo $f$, $g$ und $h$ wesentlich reelle Grössen sind. Nimmt man $h>g$ und setzt $hz=x$, ferner $\frac{g}{h}=c$, wo also $c$ ein positiver ächter Bruch ist, so geht die Gleichung 14) über in:

$$15) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{fh.\sqrt{\pm(1\pm x^2)(1\pm c^2x^2)}}.$$

Je nachdem in dem Differential rechts die oberen oder unteren Zeichen mit einander combinirt werden, ergeben sich acht verschiedene Fälle, von denen einer ausfällt, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen nicht negativ sein soll. Durch Einführung trigonometrischer Functionen gelangt man schliesslich zu der Gleichung:

$$16) \qquad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{\pm 1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo $0 \leqq k \leqq 1$ ist, wie sich unmittelbar aus der nachstehenden kleinen Tabelle ergiebt.

$$\text{I} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+c^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \operatorname{tang}\varphi, \quad k^2 = 1-c^2.$$

$$\text{II} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+c^2x^2)}} = \frac{-\sqrt{1-k^2}.d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \cos\varphi, \quad k^2 = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

$$\text{III} \quad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+c^2x^2)}} = \frac{k\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad k^2 = \frac{1}{1+c^2}.$$

$$\text{IV} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-c^2x^2)}} = \frac{-k\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \frac{\cos\varphi}{c}, \quad k^2 = \frac{1}{1+c^2}.$$

$$\text{V} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(c^2x^2-1)}} = \frac{\sqrt{1-k^2}\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \frac{1}{c.\cos\varphi}, \quad k^2 = \frac{c^2}{1+c^2}.$$

$$\text{VI} \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \sin\varphi, \quad k = c.$$

$$\text{VII} \quad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(c^2x^2-1)}} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \quad x = \frac{1}{c\sin\varphi}, \quad k = c.$$

$$\text{VIII} \quad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}} = \frac{-d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$x^2 = \sin^2\varphi + \frac{1}{c^2}\cos^2\varphi, \quad k^2 = 1-c^2.$$

Die Gleichungen VI und VII bilden nur einen Fall, in der Gleichung VI ist $x \leqq 1$, in der Gleichung VII dagegen ist $x \geqq \frac{1}{c}$. Die verschiedenen Werthe von $x$ in I—VIII sind sämmtlich in der Form enthalten:

$$x^2 = \frac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi},$$

wo $A$, $B$, $C$ und $D$ reelle Constanten sind.

Man kann in der Gleichung VIII noch eine andere Substitution machen. Setzt man nämlich:

$$\text{IX} \quad x = \frac{1+\sin\varphi+(1-\sin\varphi)\sqrt{c}}{(1+\sin\varphi)c+(1-\sin\varphi)\sqrt{c}}, \quad k^2 = \left(\frac{1-\sqrt{c}}{1+\sqrt{c}}\right)^4,$$

so folgt:

$$\text{X} \quad \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}} = \frac{1}{2}\frac{(1+\sqrt{k})^2\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Da in der Gleichung 6) $z = \frac{x}{h}$ ist, wo $h$ eine Constante bedeutet, so folgt nach den Gleichungen I—VII, IX und X, dass zwischen $y$ und $\varphi$ der Differentialgleichung 16) die Relation bestehen kann:

$$y = \frac{a+bt}{a'+b't},$$

wo $t$ eine der Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi$ ist.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung 16) heisst die *Normalform* des elliptischen Differentials. Schon die Gleichungen VIII, IX und X zeigen, dass die Quantitäten $M$ und $k$ verschiedene Formen haben können, also variabel sind, nur dass $k$ ein ächter Bruch ist, was den wesentlichen Character der sogenannten Normalform ausmacht. Enthält der Ausdruck von $V$ in der Gleichung V nur grade Potenzen von $y$, so kann man unmittelbar eine der Reductionen anwenden, welche in den Gleichungen I—X enthalten sind. Die unmittelbare Anwendung wird nur dann unzulässig, wenn die Gleichung $V = 0$ für $y^2$ keine reellen Wurzeln giebt. Man muss in diesem Falle wieder die oben gegebenen Transformationen des Differentialausdrucks vornehmen. Da dieser Fall von Interesse ist, so soll derselbe kurz angeführt werden. Es sei:

$$V = y^4 + 2v^2y^2\cos 2w + v^4.$$

Nimmt man dann:

$$\alpha = -vie^{wi}, \quad \beta = vie^{-wi}, \quad \gamma = vie^{wi}, \quad \delta = -vie^{-wi},$$

so geben die Gleichungen 11) und 12): $p+q=0$, $pq=-v^2$, also $q=v$, $p=-v$. Die Gleichung 6) giebt:

$$\frac{y}{v} = \frac{z-1}{z+1}$$

und:

$$\frac{v\cos w\,dy}{\sqrt{y^4+2v^2y^2\cos 2w+v^4}} = \frac{dz}{\sqrt{(1+cz^2)\left(1+\frac{z^2}{c}\right)}},$$

$$c = \frac{1-\sin w}{1+\sin w}.$$

Setzt man weiter:

$$z = x\sqrt{c} = x\sqrt{\frac{1-\sin w}{1+\sin w}}.$$

so folgt:

$$\frac{v.(1+\sin w)\,dy}{\sqrt{y^4+2v^2y^2\cos 2w+v^4}} = \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1+c^2x^2)}},$$

welche Gleichung auf die Formel I führt.

## § 4. Bemerkungen und Ausführungen zur Reduction elliptischer Differentiale.

Neben der im vorhergehenden § bemerkten Reductionsmethode hat *Legendre* noch eine zweite Methode zur Reduction des elliptischen Differentials auf die Normalform angemerkt, welche auf folgenden Principien beruht. Es sei:

1) $$Y = (a+2by+cy^2)(a'+2b'y+c'y^2).$$

Da die beiden Factoren rechts dasselbe Zeichen haben müssen, wenn $\sqrt{Y}$ reell sein soll, so kann man setzen:

2) $$a'+2b'y+c'y^2 = (a+2by+cy^2)z^2$$

oder:

$$(c'-cz^2)y^2+2(b'-bz^2)y+a'-az^2 = 0.$$

Diese Gleichung differentiirt giebt:

3) $$[(c'-cz^2)y+b'-bz^2]\,dy = z(a+2by+cy^2)\,dz.$$

Nach 1) und 2) ist nun:

$$Y = (a+2by+cy^2)^2z^2$$

oder:

$$\sqrt{Y} = (a+2by+cy^2)z.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 3) folgt unmittelbar:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dz}{(c'-cz^2)y+b'-bz^2}.$$

Setzt man im Nenner rechts für $y$ seinen Werth in Function von $z$ aus 2), so folgt:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \pm \frac{dz}{\sqrt{Z}},$$

wo:

$$Z = (b' - bz^2)^2 - (a' - az^2)(c' - cz^2).$$

Da $Z$ nur grade Potenzen von $z$ enthält, so gestaltet sich der weitere Verlauf der Rechnung wie im vorhergehenden §. *Legendre* hat von dieser Methode keinen Gebrauch gemacht, da ihm die Rechnungen zu complicirt erschienen. Eine weitere Ausführung derselben soll auch hier nicht stattfinden, nur möge die Bemerkung Platz finden, dass der Werth des Bruches $k$ genau derselbe ist, wie bei den Substitutionen in § 3 und die von *Legendre* bemerkten beiden Substitutionen zu denselben Resultaten führen, also nicht so von einander wesentlich verschieden sind, wie dieses zuerst den Anschein haben könnte. Diese kurze Andeutung möge hier genügen, deren genauere Deduction zu weit führen würde.

*Legendre* hat sich damit begnügt, die Möglichkeit der Reduction eines elliptischen Differentials auf die Normalform

$$\frac{1}{M} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

dargethan zu haben. Eine genauere Ausführung der vorkommenden Rechnungen hat zuerst *Richelot* in dem Aufsatz gegeben: „Ueber die Substitutionen von der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform“ (Crelle Journal t. 34 p. 1—30). Es sind dabei die sämmtlichen Fälle in Betracht gezogen, dass $y$ zwischen je zwei Wurzeln der Gleichung $Y = 0$ liegt, wenn diese Wurzeln reell sind. Eine derartige Zusammenstellung ist um so nützlicher, als Reductionen auf die Normalform ungemein häufig vorkommen. Bedient man sich der in § 3 bemerkten Methode, so sind die Werthe von $k$ und $M$ in der Normalform ziemlich complicirt, wenn $Y = 0$ reelle Wurzeln hat. Es möge deshalb ein anderes Verfahren eingeschlagen werden, welches zu ziemlich einfachen Resultaten führt und auf ebenso einfachen Rechnungen beruht.

Liegt $y$ zwischen den Gränzen $p$ und $q$, so dass $p \gtrless y \gtrless q$, so kann man setzen:

$$4) \quad y = p\cos^2\psi + q\sin^2\psi.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas verallgemeinern. Seien $p$ und $q$ beliebige reelle Grössen, welche dasselbe Zeichen haben, also $p_1 q_1 > 0$. Nimmt man:

$$\frac{\sin^2\psi}{\cos^2\psi} = \frac{q_1}{p_1}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

so geht die Gleichung 4) über in:

$$5) \quad y = \frac{p p_1 \cos^2\varphi + q q_1 \sin^2\varphi}{p_1\cos^2\varphi + q_1\sin^2\varphi}.$$

Nimmt $\varphi$ die Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ an, so nimmt $y$ die Werthe zwischen $p$ und $q$ an.

Es sei nun:

$$6) \quad Y = \pm(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta).$$

Soll $Y$ immer positiv, also $\sqrt{Y}$ reell sein, so muss in der Gleichung 6) rechts das obere Zeichen genommen werden, wenn $y$ innerhalb der Gränzen $\alpha$ und $\infty$, oder $\gamma$ und $\beta$, oder $-\infty$ und $\delta$ liegt. Liegt dagegen $y$ zwischen den Gränzen $\beta$ und $\alpha$ oder $\delta$ und $\gamma$, so muss auf der rechten Seite der Gleichung 6) das untere Zeichen genommen werden. Sind nun $p$ und $q$ zwei Gränzwerthe, zwischen denen $y$ liegt, setzt man den Werth von $y$ aus 5) in die Gleichung 6), so nimmt dieselbe die Form an:

$$Y.(p_1\cos^2\varphi + q_1\sin^2\varphi)^4 =$$
$$H\sin^2\varphi\cos^2\varphi.(g\sin^2\varphi + h\cos^2\varphi)(g_1\sin^2\varphi + h_1\cos^2\varphi),$$

wo $H$, $g$, $h$, $g_1$, $h_1$ Constanten sind, welche $p_1$ und $q_1$ nur in der ersten Potenz enthalten. Man kann nun immer $\frac{q_1}{p_1}$ so bestimmen, dass entweder $h = g$ oder $h_1 = g_1$ wird und zwar ist die Annahme zu machen, welche in dem Factor von der Form $r\sin^2\varphi + s\cos^2\varphi$ die Relation $s > r$ giebt.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen ergeben sich ohne Schwierigkeit die folgenden Resultate.

## Substitutionen. Tabelle I.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind reelle Grössen, den absoluten Werthen nach ist $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. Der Winkel $\varphi$ liegt zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}.$$

$y = \dfrac{\alpha(\beta-\delta)-\beta(\alpha-\delta)\sin^2\varphi}{\beta-\delta-(\alpha-\delta)\sin^2\varphi}$, Gränzen von $y$: $\alpha$ und $\infty$ oder $-\infty$ und $\delta$.

$y = \dfrac{\gamma(\beta-\delta)-\delta(\beta-\gamma)\sin^2\varphi}{\beta-\delta-(\beta-\gamma)\sin^2\varphi}$, Gränzen von $y$: $\gamma$ und $\beta$.

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} = \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\beta-\delta}.$$

$y = \dfrac{\delta(\alpha-\gamma)+\alpha(\gamma-\delta)\sin^2\varphi}{\alpha-\gamma+(\gamma-\delta)\sin^2\varphi}$, Gränzen von $y$: $\delta$ und $\gamma$.

$y = \dfrac{\beta(\alpha-\gamma)-\gamma(\alpha-\beta)\sin^2\varphi}{\alpha-\gamma-(\alpha-\beta)\sin^2\varphi}$, Gränzen von $y$: $\beta$ und $\alpha$.

Nimmt man in den vorhergehenden Formeln $\delta = -\sigma$ und lässt $\sigma$ unbegränzt zunehmen, so ergiebt sich die folgende Tabelle, welche dem Falle entspricht, dass das Polynom in $y$ unter dem Wurzelzeichen vom dritten Grade ist.

## Substitutionen. Tabelle II.

$\alpha, \beta, \gamma$ sind reelle Grössen, den absoluten Werthen nach ist $\alpha > \beta > \gamma$. Der Winkel $\varphi$ liegt zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}.$$

$y = \dfrac{\alpha-\beta\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$. Gränzen von $y$: $\alpha$ und $\infty$.

$y = \gamma+(\beta-\gamma)\sin^2\varphi$. Gränzen von $y$: $\gamma$ und $\beta$.

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha-\gamma}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}.$$

$y = \frac{\gamma-\alpha\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$. Gränzen von $y$: $-\infty$ und $\gamma$.

$y = \frac{\beta(\alpha-\gamma)-\gamma(\alpha-\beta)\sin^2\varphi}{\alpha-\gamma-(\alpha-\beta)\sin^2\varphi}$. Gränzen von $y$: $\beta$ und $\alpha$.

Die Relationen zwischen $y$ und dem Winkel $\varphi$ in den beiden vorhergehenden Tabellen lassen beliebig viele Umgestaltungen zu, von denen hier nur zwei hervorgehoben werden sollen, welche bei Behandlung elliptischer Integrale von historischem Interesse sind. Es sei $k'$ durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$, oder durch $k' = \sqrt{1-k^2}$ bestimmt. Führt man statt $\varphi$ einen Winkel $\psi$ mittelst der folgenden Gleichung ein:

$$7) \qquad \operatorname{tang}^2\varphi = \frac{1}{k'} \frac{1+\sin\psi}{1-\sin\psi},$$

so folgt:

$$8) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{1+k'} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin^2\psi}}.$$

Setzt man nach Ausführung der Rechnungen $\varphi$ statt $\psi$, so ergeben sich die von *Richelot* aufgestellten Gleichungen. Nimmt man weiter:

$$9) \qquad \sin\psi = \frac{2(1+k')\sin\Theta}{(1+\sqrt{k'})^2+(1-\sqrt{k'})^2\sin^2\Theta}.$$

so ist:

$$10) \qquad \frac{d\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin^2\psi}} = \frac{2(1+k')\,d\Theta}{\sqrt{(1+\sqrt{k'})^4-(1-\sqrt{k'})^4\sin^2\Theta}}.$$

Die Verbindung der Gleichungen 7)—10) giebt:

$$11) \qquad (1+k')\sin^2\varphi = \frac{(1+\sqrt{k'})^2+2(1+k')\sin\Theta+(1-\sqrt{k'})^2\sin^2\Theta}{[1+\sqrt{k'}+(1-\sqrt{k'})\sin\Theta]^2},$$

$$12) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{(1+\sqrt{k'})^2} \cdot \frac{d\Theta}{\sqrt{1-\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4\sin^2\Theta}}.$$

Setzt man nach Ausführung der Rechnungen $\varphi$ statt $\Theta$, so erhält man die von *Jacobi* (Fundamenta p. 12—16) aufgestellten Gleichungen. Auf die vorhergehenden Relationen, wenn auch in anderer Form, hat schon *Richelot* (Crelle t. 34. p. 20 u. 24) aufmerksam gemacht. Ein Aufsatz, welcher diesen Gegenstand betrifft, von *Luchterhandt* findet sich in Crelle Journal t. 17 p. 218.

Zur Vervollständigung der Reduction eines elliptischen Differentials auf die Normalform sollen noch kurz die Fälle erwähnt werden, nach der Methode des § 3, wenn die Quantitäten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nicht sämmtlich reell sind.

Es sei $\gamma = m + ni$, $\delta = m - ni$. Setzt man zur Abkürzung:

13) $\quad (m-\alpha)^2 + n^2 = a^2, \qquad (m-\beta)^2 + n^2 = b^2,$

so geben die Gleichungen 11) und 12) von § 3, wenn $q-p$ positiv genommen wird:

$$\frac{q+p}{2}(\alpha+\beta-2m) = \alpha\beta - m^2 - n^2,$$

$$\frac{q-p}{2}(\alpha+\beta-2m) = ab,$$

also:

$$p(\alpha+\beta-2m) = \alpha\beta - m^2 - n^2 - ab,$$
$$q(\alpha+\beta-2m) = \alpha\beta - m^2 - n^2 + ab.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 13) findet man leicht:

14)

$$\begin{cases} (p-\alpha)(\alpha+\beta-2m) = -a(a+b), & (p-\beta)(\alpha+\beta-2m) = -b(a+b), \\ (q-\alpha)(\alpha+\beta-2m) = -a(a-b), & (q-\beta)(\alpha+\beta-2m) = b(a-b), \\ [(p-m)^2+n^2](\alpha+\beta-2m)^2 = 2ab[ab-(m-\alpha)(m-\beta)+n^2], \\ [(q-m)^2+n^2](\alpha+\beta-2m)^2 = 2ab[ab+(m-\alpha)(m-\beta)-n^2]. \end{cases}$$

Es ist ferner:

15)

$$\begin{cases} [ab+(m-\alpha)(m-\beta)-n^2](a+b)^2 + [ab-(m-\alpha)(m-\beta)+n^2](a-b)^2 = \\ \qquad 2ab.(\alpha+\beta-2m)^2, \\ [ab+(m-\alpha)(m-\beta)-n^2](a+b)^2 - [ab-(m-\alpha)(m-\beta)+n^2](a-b)^2 = \\ \qquad 2[n^2+(m-\alpha)(m-\beta)](\alpha+\beta-2m)^2 = \\ \qquad [a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2](\alpha+\beta-2m)^2. \end{cases}$$

Da:

$$y = \frac{p + qz}{1 + z},$$

so erhält man mittelst der Gleichungen 14):

$$16) \qquad \frac{y-\alpha}{y-\beta} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a+b+(a-b)z}{a+b-(a-b)z}.$$

Die Gleichung 14) des § 3 nimmt folgende Form an:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{2(\alpha+\beta-2m)\,dz}{\sqrt{\pm Z_1 Z_2}},$$

wo:

$$Z_1 = (a+b)^2 - (a-b)^2 z^2,$$

$$\tfrac{1}{2} Z_2 = ab - (m-\alpha)(m-\beta) + n^2 + [ab + (m-\alpha)(m-\beta) - n^2] z^2.$$

Hat $Z_1$ das positive Zeichen, so ist $\frac{a+b}{a-b} > z$, man kann $z = -\frac{a+b}{a-b} \cos\varphi$ setzen, hat $Z_1$ das negative Vorzeichen, so ist $z > \frac{a+b}{a-b}$, man setze dann $z = \frac{a+b}{a-b} \frac{1}{\cos\varphi}$. Führt man diese Substitutionen aus, so erhält man das folgende System von Gleichungen mittelst der Gleichungen 14)—16).

## Substitutionen. Tabelle III.

$\alpha$ und $\beta$ sind reelle Grössen, dem absoluten Werthe nach ist $\alpha > \beta$. Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$(m-\alpha)^2 + n^2 = a^2, \qquad (m-\beta)^2 + n^2 = b^2.$$

Der Winkel $\varphi$ liegt zwischen den Gränzen 0 und $\pi$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2}{2ab}\right].$$

$$\frac{y-\alpha}{y-\beta} = \frac{a}{b} \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$

Gränzen von $y$: $\alpha$ und $\infty$ oder $-\infty$ und $\beta$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha-y)(y-\beta)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2}{2ab}\right].$$

$$\frac{\alpha-y}{y-\beta} = \frac{a}{b} \frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Gränzen von $y$: $\beta$ und $\alpha$.

In den vorstehenden Gleichungen setze man $\beta = -c$ und lasse darauf $c$ unbegränzt zunehmen. Es ist dann:

$$\lim \frac{b}{c} = \lim \sqrt{\left(1+\frac{n}{c}\right)^2 + \left(\frac{n}{c}\right)^2} = 1,$$

$$\lim \frac{a^2+b^2-(\alpha-\beta)^2}{2ab} = \lim \frac{m^2-m(\alpha+\beta)+\alpha\beta+n^2}{ab} = \frac{m-\alpha}{a}.$$

Hierdurch ergiebt sich Folgendes:

## Substitutionen. Tabelle IV.

Es ist zur Abkürzung: $(m-a)^2+n^2 = a^2$. Der Winkel $\varphi$ liegt zwischen den Gränzen 0 und $\pi$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1+\frac{m-\alpha}{a}\right].$$

$$y-\alpha = a\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}.$$ Gränzen von $y$: $\alpha$ und $\infty$.

$$\frac{dy}{\sqrt{(\alpha-y)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1-\frac{m-\alpha}{a}\right].$$

$$\alpha-y = a\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}.$$ Gränzen von $y$: $-\infty$ und $\alpha$.

Die obigen Formeln werden ungültig, wenn $\alpha+\beta = 2m$. In diesem Falle hat man einfach:

$$y-m = y-\frac{\alpha+\beta}{2} = z$$

zu setzen, um unmittelbar zur Gleichung 14) des § 3 zu gelangen. Sind die sämmtlichen Quantitäten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ complex, so setze man:

$$\alpha = m'+n'i, \quad \beta = m'-n'i, \quad \gamma = m+ni, \quad \delta = m-ni.$$

Zur Abkürzung führe man folgende Bezeichnungen ein:

17) $(m-m')^2+(n+n')^2 = r^2, \quad (m-m')^2+(n-n')^2 = s^2,$

oder:

18) $(m-m')^2+n^2+n'^2 = \frac{1}{2}(r^2+s^2), \quad 4nn' = r^2-s^2.$

Die Gleichungen 11) und 12) des § 3 geben dann:

$$2p(m'-m) = m'^2+n'^2-m^2-n^2-rs,$$
$$2q(m'-m) = m'^2+n'^2-m^2-n^2+rs.$$

Man findet leicht:

$$2(p-m)(m'-m) = (m'-m)^2+n'^2-n^2-rs,$$
$$2(q-m)(m'-m) = (m'-m)^2+n'^2-n^2+rs,$$
$$2(p-m')(m'-m) = -(m'-m)^2+n'^2-n^2-rs,$$
$$2(q-m')(m'-m) = -(m'-m)^2+n'^2-n^2+rs.$$

$$(p-m)^2+n^2 = -rs\frac{p-m}{m'-m}, \quad (q-m)^2+n^2 = rs\frac{q-m}{m'-m},$$

$$(p-m')^2+n'^2 = -rs\frac{p-m'}{m'-m} \quad (q-m')^2+n'^2 = rs\frac{q-m}{m'-m}.$$

Mittelst der Gleichungen 18) findet man noch:

$$[rs+(m'-m)^2]^2-(n'^2-n^2)^2 = (m'-m)^2(r+s)^2,$$
$$[rs-(m'-m)^2]^2+(n'^2-n^2)^2-(m'-m)^2(r-s)^2.$$

$$rs+(m'-m)^2+n'^2-n^2 = \tfrac{1}{2}[(r+s)^2-4n^2],$$
$$rs-(m'-m)^2-n'^2+n^2 = \tfrac{1}{2}[4n^2-(r-s)^2)].$$

Führt man schliesslich den Winkel $\varphi$ mittelst der folgenden Gleichung ein:

$$z = \operatorname{tang}\varphi.\sqrt{\frac{4n^2-(r-s)^2}{(r+s)^2-4n^2}},$$

so gelangt man durch eine Rechnung, welche weiter keine Schwierigkeiten darbietet, zu dem folgenden letzten Falle der Substitutionen.

## Substitutionen. Tabelle V.

Es ist zur Abkürzung gesetzt:

$$(m'-m)^2+(n'-n)^2 = r^2, \quad (m'-m)^2+(n'-n)^2 = s^2,$$

$$\sqrt{\frac{rs+(m'-m)^2+n'^2-n^2}{rs-(m'-m)^2-n'^2+n^2}} = \sqrt{\frac{(r+s)^2-4n^2}{4n^2-(r-s)^2}} = \operatorname{cotang}\omega.$$

Für:

$$\frac{y-m}{n} = \operatorname{tang}(\varphi-\omega) = \frac{\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}\omega}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\omega},$$

ist:

$$\frac{dy}{\sqrt{[(y-m)^2+n^2][(y-m')^2+n'^2}} = \frac{2}{r+s}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$k^2 = 1-\left(\frac{r-s}{r+s}\right)^2 = \frac{4rs}{(r+s)^2}.$$

Man konnte auch $y-m = n\,\mathrm{tang}(\varphi-\omega)$ oder $y-m' = n'\,\mathrm{tang}(\varphi-\omega')$ substituiren und dann den Winkel $\omega$ oder $\omega'$ so bestimmen, dass in der transformirten Form der Factor von $\sin\varphi\cos\varphi$ verschwindet. Die in den Tabellen III, IV und V vorkommenden Relationen rühren im Wesentlichen von *Richelot* her.

## § 5. Literarische Notizen. Das allgemeine Theorem von Jacobi.

Die in den §§ 3 und 4 mitgetheilte Methode von *Legendre* hat zu vielfachen Arbeiten Veranlassung gegeben, betreffend die Reduction eines elliptischen Differentials auf seine Normalform. Die Mehrzahl dieser Arbeiten kommt schliesslich auf den von *Legendre* eingeschlagenen Weg hinaus. Die beiden vollständigsten Arbeiten dieser Art rühren von *Richelot* und *Weierstrass* her. Unter dem Titel: „Neue Methode, ein elliptisches Differential auf seine canonische Form zu bringen" hat *Schellbach* in seinem Werke „Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen" (Berlin 1864) das sehr elegante Verfahren von *Weierstrass* p. 258—275 mitgetheilt. Eine grössere Abhandlung von *Plana* in Crelle's Journal t. 36 pag. 1 u. folg. behandelt etwas weitläufig denselben Gegenstand; eine ziemlich einfache Darstellung hat *Lobatto* im Journal von Crelle t. 10 auf p. 280—287 gegeben. Ferner vergleiche man über diesen Gegenstand die Abhandlung „Nuove Ricerche relative alla sostituzione lineare per la riduzione delle funzioni ellitiche di prima specie" von *Tortolini* (Annali di Matematica. Roma 1858, t. 1. p. 58—75).

Es würde zu weit führen hier alle Substitutionen anführen zu wollen, welche bei der Reduction bemerkenswerther elliptischer Differentiale angewandt worden sind uud welche von den oben bemerkten Methoden wesentlich verschieden sind. Es möge hier nur noch der berühmten Abhandlung von *Ganss* „Determinatio

Attractionis" gedacht werden, welche im tom. IV p. 22 u. f. der Comment. Societ. Scient. Gottingensis (auch Gauss, Werke. Band III p. 333) enthalten ist. *Gauss* wendet zur Reduction eines elliptischen Differentials ein Verfahren an, welches auch für andere mathematische Untersuchungen, wie die Bestimmung der Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung, (Jacobi im Journal von Crelle, t. 2. p. 227) sich als äusserst nützlich erwiesen hat. In etwas anderer Weise hat *Clausen* das Problem von *Gauss* behandelt. (Crelle, Journ. t. 6. p. 290.) Die Gleichungen 9) — 12) von § 4 enthalten Relationen zwischen verschiedenen einfachen Formen, von denen jede als Normalform genommen werden kann. Die genauere Untersuchung über den Zusammenhang derartiger Differentialformeln ist zuerst von *Jacobi* in ungemein scharfsinniger Weise durchgeführt und bildet die Basis seiner ersten Begründung der Lehre von den elliptischen Functionen. Auf pag. 6 der „Fundamenta" wird der Satz citirt:

„Jam igitur demonstratum est, formam:

$$y = \frac{a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p}{b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_p x^p},$$

quicunque sit numerus $p$, ita determinari posse, ut prodeat:

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}.$$

Quod est Principium in Theoria Transformationum Functionum Ellipticarum Fundamentale."

Die ebenso wichtigen wie interessanten Folgerungen, welche sich an die vorstehende Differentialgleichung knüpfen, sollen später in anderer Weise begründet werden.

Um diese einleitenden Betrachtungen nicht zu sehr auszudehnen, sind einige bemerkenswerthe Fälle, welche auf elliptische Differentiale führen, in der Note I zusammengestellt.

# Zweiter Abschnitt.

## § 6. Die elliptischen Functionen. Definitionen derselben durch Differentialgleichungen.

Ist $Y$ ein Polynom vom dritten oder vierten Grade, so lässt sich nach § 3 und 4

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

immer auf die einfachere Form:

$$\frac{1}{M}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

reduciren, wo $0 < k < 1$ ist. Man bezeichne, mit Weglassung der Constanten $M$, dieses Differential durch $du$ und setze also:

$$1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = du.$$

Verschwindet $u$ mit $\varphi$, so folgt durch Integration:

$$2) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = u.$$

Das links stehende Integral nennt *Legendre* das elliptische Integral erster Gattung und bezeichnet dasselbe als Function von $\varphi$ durch $F(\varphi)$, so dass also:

$$3) \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi).$$

Die Function $F(\varphi)$ enthält ausser der Variabeln $\varphi$ noch die Quantität $k$, dieselbe wird nicht mit angemerkt, wenn sie im Laufe einer Rechnung constant bleibt. Die obere Gränze $\varphi$ heisst nach *Legendre* [1]) die *Amplitudo*, der positive, ächte Bruch $k$ der *Modul* des Integrals. Diese beiden Bezeichnungen Amplitudo und Modul sind durch *Jacobi* allgemein geworden. Sind $k$ und $k'$ positive ächte Brüche, verbunden durch die Gleichung:

[1]) Fonct. ellipt. t. I. p. 14 u. 18.

$$4) \quad k^2 + k'^2 = 1,$$

so heisst nach dem Vorgange von *Legendre* und *Jacobi* $k'$ das Complement des Moduls, oder einfacher der Complementärmodul (le complément du module, complementum moduli). Die beiden Quantitäten $k$ und $k'$ bezeichnet *Legendre* durch $c$ und $b$.

Der Constanten

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

der trigonometrischen Functionen entsprechen bei den nachfolgenden Untersuchungen zwei Integrale, welche nach *Jacobi* auf folgende Art bezeichnet werden:

$$5) \quad \begin{cases} K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}. \end{cases}$$

Die beiden Integrale $K$ und $K'$ nennt *Legendre* die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung. Um hinsichtlich der Terminologie keinem Missverständniss Raum zu geben, soll ein Integral von der Form:

$$\int \frac{P}{\sqrt{Y}} dy,$$

wo $P$ eine rationale, ganze oder gebrochene Function von $y$ ist, ein *elliptisches Integral* heissen. Statt des Worts *Integral* wendet *Legendre*, und manche Schriftsteller nach ihm, das Wort *Function* an. Der Begriff von elliptischen Functionen ist seit *Jacobi* auf eine andere Art transcendenter Functionen übertragen worden, zu deren Definition ähnliche Betrachtungen dienen können, wie die des § 2 für die trigonometrischen Functionen.

Setzt man in der Gleichung 1) $\sin\varphi = x$, so geht dieselbe über in:

$$6) \quad \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = du.$$

In den Gleichungen 1) und 6) sehe man $\varphi$ und $x$ als Functionen von $u$ an, welche beide dadurch bestimmt sind, dass $\varphi$ und $x$ mit $u$ gleichzeitig verschwinden. Unter dieser Voraussetzung nennt *Jacobi* den Winkel $\varphi$ die *Amplitudo* von $u$ und $y$ den Sinus Amplitudinis von $u$, was auf folgende Art bezeichnet wird:

$$7) \quad \varphi = \operatorname{am} u, \qquad x = \sin \operatorname{am} u.$$

Da die Differentialgleichungen 1) und 6) noch den *Modul* $k$ enthalten, so sind $\varphi$ und $x$ Functionen zweier Quantitäten $u$ und $k$.

Statt der Gleichungen 7) ist genauer zu schreiben:

$$8) \quad \varphi = \operatorname{am} u, \qquad x = \sin \operatorname{am} u. \quad \text{Modul } k,$$

oder:

$$9) \quad \varphi = \operatorname{am}(u,k), \qquad x = \sin \operatorname{am}(u,k).$$

Behält der Modul $k$ im Laufe einer Rechnung denselben Werth, so sollen einfach die Bezeichnungen 7) statt der Bezeichnungen 8) oder 9) genommen werden.

Es soll angenommen werden, das $y$, definirt durch die Differentialgleichung 6), beliebige reelle Werthe annehmen kann und nur der Beschränkung unterworfen ist gleichzeitig mit $u$ zu verschwinden.

Setzt man $x = \sin \operatorname{am} u$, so ist $\sqrt{1-x^2} = \cos \operatorname{am} u$. Zur Vereinfachung hat sich *Legendre* (Fonct. ell. t. I. p. 11) der abkürzenden Bezeichnung:

$$\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \Delta(\varphi)$$

bedient. Diese Bezeichnung hat auch *Jacobi* angenommen, indem derselbe für $\varphi = \operatorname{am} u$ setzt:

$$10) \quad \sqrt{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u} = \Delta \operatorname{am} u.$$

Nennt man $u$ das *Argument*, so heisst $K - u$ nach *Jacobi* das *Complement* von $u$, die Amplitudo des Complements wird nach *Jacobi* durch *coam* bezeichnet, so dass:

$$11) \quad \operatorname{am}(K-u) = \operatorname{coam} u.$$

Diese Bezeichnung ist indessen von untergeordneter Bedeutung. Ist nun $\varphi$ durch die Differentialgleichung 1) bestimmt, so nennt *Jacobi* alle trigonometrischen Functionen der Amplitudo $\varphi = \operatorname{am} u$ *elliptische Functionen*. Es sind also: $\sin \operatorname{am} u$, $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$,

$\sin\operatorname{am}(K-u) = \sin\operatorname{coam} u$, $\cos\operatorname{coam} u$, $\Delta\operatorname{coam} u$, etc. elliptische Functionen.

Bezeichnet man die Integrationsvariabele in der Gleichung 2) durch $\Theta$, multiplicirt auf beiden Seiten mit der negativen Einheit, so folgt:

$$-\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} = -u,$$

oder $\Theta = -\psi$ gesetzt:

$$\int_0^{-\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = -u.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar $-\varphi = \operatorname{am}(-u)$, da nun $\varphi = \operatorname{am} u$, so folgt:

$$12) \qquad \operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u.$$

Ausser den beiden trigonometrischen Functionen $\sin\operatorname{am} u$ und $\cos\operatorname{am} u = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u}$ ist noch die Function $\Delta\operatorname{am} u$, definirt durch die Gleichung 10), zu bemerken, welche mit den beiden ersteren das System der einfachsten elliptischen Functionen bildet.

Die erste der Gleichungen 5) giebt:

$$13) \qquad \frac{\pi}{2} = \operatorname{am} K, \quad \text{also} \quad 1 = \sin\operatorname{am} K.$$

Aus den Gleichungen 12) und 13) erhält man unmittelbar:

$$\begin{array}{lll} \sin\operatorname{am}(-u) = -\sin\operatorname{am} u, & \sin\operatorname{am} 0 = 0, & \sin\operatorname{am} K = 1, \\ \cos\operatorname{am}(-u) = \cos\operatorname{am} u, & \cos\operatorname{am} 0 = 1, & \cos\operatorname{am} K = 0, \\ \Delta\operatorname{am}(-u) = \Delta\operatorname{am} u, & \Delta\operatorname{am} 0 = 1, & \Delta\operatorname{am} K = k'. \end{array}$$

Setzt man in der Gleichung 1) $\varphi = \operatorname{am} u$, so folgt nach 10):

$$14) \qquad \frac{d\operatorname{am} u}{du} = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} u} = \Delta\operatorname{am} u.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung, oder auch durch Substitution von $y = \sin\operatorname{am} u$ in der Gleichung 6), findet man unter Zuziehung von:

$$\sin^2\operatorname{am} u + \cos^2\operatorname{am} u = 1, \quad \Delta^2\operatorname{am} u + k^2\sin^2\operatorname{am} u = 1$$

die Gleichungen:

$$15)\begin{cases}\dfrac{d\,\mathrm{sin\,am}\,u}{du} = \mathrm{cos\,am}\,u\,.\,\Delta\,\mathrm{am}\,u, & \dfrac{d\,\mathrm{cos\,am}\,u}{du} = -\mathrm{sin\,am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u,\\ \dfrac{d\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{du} = -k^2\,\mathrm{sin\,am}\,u\,\mathrm{cos\,am}\,u.\end{cases}$$

Es lässt sich also jede der Function $\mathrm{sin\,am}\,u$, $\mathrm{cos\,am}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ durch eine Differentialgleichung definiren. Man findet z. B.

$$\frac{d^2\,\mathrm{sin\,am}\,u}{du} + \mathrm{sin\,am}\,u\,[1 + k^2 - 2k^2\,\mathrm{sin^2\,am}\,u] = 0.$$

Die Gleichungen 15) lassen sich noch etwas erweitern. Sind $a$, $b$, $c$ Constanten, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ Functionen von $u$, so sind die Gleichungen 15) in den folgenden enthalten:

$$\frac{d\alpha}{du} = a\beta\gamma, \quad \frac{d\beta}{du} = b\alpha\gamma, \quad \frac{d\gamma}{du} = c\alpha\beta.$$

Eine weitere Ausführung dieser Gleichungen bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar.

## § 7. Die reelle Periode der elliptischen Functionen.

Die Quantitäten $s$ und $t$ seien durch die folgenden Gleichungen mit einander verbunden, von denen immer eine Gleichung die übrigen zur Folge hat:

$$1)\begin{cases} s = \sqrt{\dfrac{1-t^2}{1-k^2t^2}}, \quad t = \sqrt{\dfrac{1-s^2}{1-k^2s^2}}.\\ \sqrt{1-s^2} = \dfrac{k't}{\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad \sqrt{1-t^2} = \dfrac{k's}{\sqrt{1-k^2s^2}},\\ \sqrt{1-k^2s^2} = \dfrac{k'}{\sqrt{1-k^2t^2}}, \quad \sqrt{1-k^2t^2} = \dfrac{k'}{\sqrt{1-k^2s^2}}.\end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass $t = 1$ für $s = 0$ und $t = 0$ für $s = 1$ ist. Man findet durch Differentiation:

$$ds = -\frac{k'^2t}{1-k^2t^2}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

und hieraus:

$$2)\quad \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = -\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Integrirt man nach $s$ zwischen den Gränzen $s = 0$ und $s = x$, so sind 1 und $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-k^2x^2}}$ die Gränzen von $t$. Es folgt dann:

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = -\int_1^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} =$$

$$\int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Da nun allgemein für eine Function $f(t)$, welche zwischen den Gränzen 0 und 1 endlich und stetig bleibt:

$$\int_\tau^1 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^\tau f(t)\,dt \qquad 0 \leqq \tau \leqq 1,$$

so lässt sich die obige Relation zwischen den Integralen auch schreiben:

$$3) \qquad \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} =$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} - \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist gleich $K$. Setzt man:

$$4) \qquad \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = u,$$

so leitet man aus der Gleichung 3) die folgende ab:

$$u = K - \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

oder:

$$5) \qquad \int_0^{\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = k-u.$$

Die Gleichungen 4) und 5) geben nach § 6:

$$x = \operatorname{sin\,am} u, \qquad \sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}} = \operatorname{sin\,am}(K-u).$$

Durch Elimination von $x$ zwischen diesen Gleichungen folgt:

$$6) \qquad \sin\mathrm{am}(K-u) = \sqrt{\frac{1-\sin^2\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u}} = \frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ergeben sich die folgenden:

$$7) \qquad \cos\mathrm{am}(K-u) = \frac{k'\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \quad \Delta\,\mathrm{am}(K-u) = \frac{k'}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}.$$

Was bei Ausziehung der Quadratwurzel die Vorzeichen der rechten Seiten der Gleichungen 7) anbelangt, so bestimmen sich dieselben mittelst des Werthes $u = K$.

Nimmt man in den Gleichungen 6) und 7) $-u$ statt $u$, so erhält man:

$$8) \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(K+u) = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, & \cos\mathrm{am}(K+u) = -\dfrac{k'\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ & \Delta\,\mathrm{am}(K+u) = \dfrac{k'}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Nimmt man in den vorstehenden Gleichungen $K+u$ statt $u$, so gehen dieselben über in:

$$9) \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(2K+u) = \dfrac{\cos\mathrm{am}(K+u)}{\Delta\,\mathrm{am}(K+u)} = -\sin\mathrm{am}\,u, \\ \cos\mathrm{am}(2K+u) = -\dfrac{k'\sin\mathrm{am}(K+u)}{\Delta\,\mathrm{am}(K+u)} = -\cos\mathrm{am}\,u, \\ \Delta\,\mathrm{am}(2K+u) = \dfrac{k'}{\Delta\,\mathrm{am}(K+u)} = \Delta\,\mathrm{am}\,u. \end{cases}$$

Die Functionen $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ nehmen, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Werthe an, wenn das Argument um $2K$ zunimmt; die bemerkten Functionen sind also *periodische* Functionen. Tritt in den Gleichungen 8) $u+2K$, $u+4K$, .... an Stelle von $u$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen, in denen $m$ eine ganze positive Zahl bedeutet.

$$10) \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(2mK+u) = (-1)^m\sin\mathrm{am}\,u, \\ \cos\mathrm{am}(2mK+u) = (-1)^m\cos\mathrm{am}\,u, \\ \Delta\,\mathrm{am}(2mK+u) = \Delta\,\mathrm{am}\,u. \end{cases}$$

In den vorstehenden Gleichungen werde $u$ durch $u+K$ ersetzt. Unter Anwendung der Gleichungen 8) folgt:

$$11)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}[(2m+1)K+u] = (-1)^m \dfrac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \\ \cos\operatorname{am}[(2m+1)K+u] = (-1)^{m+1} \dfrac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \\ \Delta\operatorname{am}[(2m+1)K+u] = \dfrac{k'}{\Delta\operatorname{am} u}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 10) und 11) lassen sich durch Vertauschung von $u$ mit $-u$ neue Gleichungen herleiten. Es ist nun:

$$\sin\operatorname{am}(a \pm u) = \sin\operatorname{am} \pm (u \pm a) = \pm \sin\operatorname{am}(u \pm a).$$

$$\cos\operatorname{am}(a \pm u) = \cos\operatorname{am}(u \pm a), \quad \Delta\operatorname{am}(a \pm u) = \Delta\operatorname{am}(u \pm a).$$

Bringt man die vorstehenden Gleichungen zur Anwendung, so lassen sich die Gleichungen 10) und 11) durch die folgenden allgemeinen Gleichungen ersetzen, wo $\delta = \pm 1$ ist.

$$12)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}(u + \delta \,.\, 2mK) = (-1)^m \sin\operatorname{am} u, \\ \cos\operatorname{am}(u + \delta \,.\, 2mK) = (-1)^m \cos\operatorname{am} u, \\ \Delta\operatorname{am}(u + \delta \,.\, 2mK) = \Delta\operatorname{am} u. \end{cases}$$

$$13)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}[u + \delta.(2m+1)K] = \delta(-1)^m \dfrac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \\ \cos\operatorname{am}[u + \delta.(2m+1)K] = -\delta(-1)^m \dfrac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \\ \Delta\operatorname{am}[u + \delta.(2m+1)K] = \dfrac{k'}{\Delta\operatorname{am} u}. \end{cases}$$

## § 8. Die elliptischen Functionen mit imaginärem Argument. Die imaginäre Periode der elliptischen Functionen.

Es sei wieder $x$ als Function von $u$, nämlich $x = \sin\operatorname{am} u$, durch die Gleichung:

$$1)\quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = u$$

definirt, wobei $x$ beliebige reelle Werthe annehmen kann. Es haben nun *Abel* (Crelle. Journ. t. II. p. 104) und *Jacobi* (Fundam. p. 34) an Stelle der reellen Integrationsvariabeln $t$ einfach eine imaginäre Variabele substituirt, ein Verfahren, dessen nicht weiter begründete Anwendung wohl nicht ganz einwurfsfrei sein möchte. Operirt man nur mit reellen Integrationsvariabeln, so lassen sich

die Regeln für bestimmte Integrale nicht direct auf Integrale anwenden, welche die Betrachtungen complexer Variabeln erfordern. Man kann aber die elliptischen Functionen mit imaginären Variabeln sehr einfach behandeln, wenn in der Gleichung 1) $x$ beliebige reelle Werthe annimmt; die Integrationsvariabele $t$ bleibt dann immer reell, während das Integral $u$ selbst theils reelle, theils imaginäre Werthe annimmt. [Man vergleiche hierüber *Schlömilch* in den Abhandl. der Sächsischen Gesellsch. d. Wissensch. t. IV. p. 407.]

In der Gleichung 1) ist $u$ reell, wenn $0 \leqq x \leqq 1$, für $1 \leqq x \leqq \frac{1}{k}$ ist $u$ imaginär, endlich ist $u$ reell, wenn $x \geqq \frac{1}{k}$. Man nehme $y$ zwischen den Gränzen 0 und $\frac{1}{k}$ an und setze:

$$2) \quad v = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + k^2 \sin^2\alpha}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

oder durch Zerlegung der Gränzen:

$$v = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + k^2 \sin^2\alpha}}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Das erste der rechts stehenden Integrale ist gleich $K$, in dem zweiten Integrale ist $(t^2-1)(1-k^2t^2)$ positiv, man erhält also:

$$3) \quad v = K + \frac{1}{i} \int_1^{\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + k^2 \sin^2\alpha}}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

Zur Transformation des rechts stehenden Integrals setze man:

$$t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2s^2}}, \quad \sqrt{t^2-1} = \frac{k's}{\sqrt{1-k'^2s^2}}, \quad \sqrt{1-k^2t^2} = \frac{k'\sqrt{1-s^2}}{\sqrt{1-k'^2s^2}}.$$

Für $t = 1$ ist $s = 0$ und für $t = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}$ ist $s = \sin\alpha$.

Bringt man $K$ in 3) auf die linke Seite, multiplicirt auf beiden Seiten mit $i$, so folgt:

$$4) \quad (v-K)i = \int_0^{\sin\alpha} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}}.$$

Die Anwendung der Gleichungen 2) und 4) erfordert, dass d$\varphi$

Modul mit angemerkt werde. In dem Integrale auf der rechten Seite der Gleichung 2) izt $k$ der Modul, dagegen im entsprechenden Integrale der Gleichung 4) tritt der Complementärmodul $k'$ von $k$ auf. Die Gleichungen 2) und 4) geben:

$$\frac{1}{\sqrt{\cos^2\alpha + k^2\sin^2\alpha}} = \sin\mathrm{am}(v, k),$$
$$\sin\alpha = \sin\mathrm{am}[(v - K)i,\ k'],$$

oder $v - K = u$ gesetzt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k'^2\sin^2\alpha}} = \frac{\cos\mathrm{am}(u, k)}{\Delta\mathrm{am}(u, k)},$$
$$\sin\alpha = \sin am(ui,\ k').$$

Durch Elimination von $\alpha$ folgt:

$$\frac{1}{\Delta\mathrm{am}(ui, k')} = \frac{\cos\mathrm{am}(u, k)}{\Delta\mathrm{am}(u, k)}.$$

Vertauscht man in dieser Gleichung $k$ und $k'$, so erhält man

$$5) \qquad \Delta\mathrm{am}(ui, k) = \frac{\Delta\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}.$$

Diese Gleichung giebt:

$$\sin^2\mathrm{am}(ui, k) = \frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{\Delta^2\mathrm{am}(u, k')}{\cos^2\mathrm{am}(u, k')}\right) =$$
$$\frac{1}{k^2}\left(1 - \frac{1 - k'^2\sin^2\mathrm{am}(u, k')}{\cos^2\mathrm{am}(u, k')}\right) = -\mathrm{tang}^2\mathrm{am}(u, k'),$$
$$\cos^2\mathrm{am}(ui, k) = \frac{1}{\cos^2\mathrm{am}(u, k')}.$$

Es ist also:

$$6) \quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(ui, k) = \pm i\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u, k'), \\ \cos\mathrm{am}(ui, k) = \pm\dfrac{1}{\cos\mathrm{am}(u, k')}. \end{cases}$$

In beiden Fällen muss das obere Zeichen genommen werden, dieses folgt unmittelbar, wenn die erste der Gleichungen 6) nach $u$ differentiirt und darauf $u = 0$ gesetzt wird. Für $u = 0$ müssen sich beide Seiten der zweiten Gleichung 6) auf $+1$ reduciren. Die Zusammenstellung der Gleichungen 5) und 6) giebt:

$$7)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(ui, k) = i\dfrac{\sin\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}, \\ \cos\mathrm{am}(ui, k) = \dfrac{1}{\cos\mathrm{am}(u, k')}, \\ \Delta\mathrm{am}(ui, k) = \dfrac{\Delta\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die elliptischen Functionen mit imaginärem Argument sich ausdrücken lassen durch ähnliche Functionen mit reellem Argument und dem Complementärmodul. Die Gleichungen 7) geben durch Division:

$$8)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u, k') = \dfrac{1}{i}\dfrac{\sin\mathrm{am}(ui, k)}{\cos\mathrm{am}(ui, k)}, \\ \cos\mathrm{am}(u, k') = \dfrac{1}{\cos\mathrm{am}(ui, k)}, \\ \Delta\mathrm{am}(u, k') = \dfrac{\Delta\mathrm{am}(ui, k)}{\cos\mathrm{am}(ui, k)}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 2) und 4) nehme man $\alpha = \frac{1}{2}\pi$. Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung 4) wird dann gleich:

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k'^2s^2)}} = K'.$$

Die Gleichungen 2) und 4) werden dann:

$$v = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (v-K)i = K'.$$

Diese beiden Werthe von $v$ geben:

$$9)\quad \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = K + \frac{K'}{i} = K - K'i.$$

In der Gleichung 1) sei $x > \frac{1}{k}$, man setze $x = \frac{1+z^2}{k}$ und:

$$10)\quad w = \int_0^{\frac{1+z^2}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Das Integral rechts zerlege man in zwei Integrale mit den respectiven Gränzen 0, $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{k}$, $\frac{1+z^2}{k}$. Für das erste Integral

substituire man den Werth aus 9), im zweiten Integrale setze man: $(1-t^2)(1-k^2t^2) = (t^2-1)(t^2k^2-1)$, da in demselben $t > \frac{1}{k}$ ist, so folgt dann:

$$11) \quad w = K - K'i + \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1+z^2}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t^2k^2-1)}}.$$

Das rechts stehende Integral geht für $tk = \frac{1}{s}$ über in:

$$\int_{\frac{1}{1+z^2}}^{1} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = K - \int_{0}^{\frac{1}{1+z^2}} \frac{dt}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Die Gleichung 11) wird hierdurch:

$$w = 2K - K'i - \int_{0}^{\frac{1}{1+z^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

oder:

$$\int_{0}^{\frac{1}{1+z^2}} \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}} = 2K - w - K'i.$$

Die vorstehende Gleichung und die Gleichung 10) geben:

$$\frac{1+z^2}{k} = \operatorname{sin\,am} w, \quad \frac{1}{1+z^2} = \operatorname{sin\,am}(2K - w - K'i).$$

Das Product dieser Gleichungen führt auf:

$$\frac{1}{k} = \operatorname{sin\,am} w \,.\, \operatorname{sin\,am}(2K - w - iK'),$$

oder $2K - w = u$ gesetzt:

$$12) \quad 1 = k \operatorname{sin\,am} u \,.\, \operatorname{sin\,am}(u - iK').$$

Nimmt man hierin $-u$ statt $u$, so ist auch:

$$13) \quad 1 = k \operatorname{sin\,am} u \,.\, \operatorname{sin\,am}(u + iK').$$

Die Gleichungen 12) und 13), welche unmittelbar auf die imaginäre Periode der elliptischen Functionen führen, können auch aus den Gleichungen 7) hergeleitet werden.

Geht $k$ über in $k'$, so geht $K$ über in $K'$; es gelten nun für die rechten Seiten der Gleichungen 7), wenn $u$ um Multipla von

$K'$ zunimmt, genau dieselben Gleichungen 12) und 13) des § 7, wenn $k$, $K$ respective durch $k'$, $K'$ ersetzt werden. Lässt man in den Gleichungen 7) $u$ um $K'$ zunehmen, so erhält man:

$$\sin\mathrm{am}(ui + K'i, k) = i\,\frac{\sin\mathrm{am}(u+K', k')}{\cos\mathrm{am}(u+K', k')} = -\frac{i}{k}\,\frac{\cos\mathrm{am}(u, k')}{\sin\mathrm{am}(u, k')},$$

$$\cos\mathrm{am}(ui + K'i, k) = \frac{1}{\cos\mathrm{am}(u+K', k')} = -\frac{\Delta\mathrm{am}(u, k')}{k\sin\mathrm{am}(u, k')},$$

$$\Delta\mathrm{am}(ui + K'i, k) = \frac{\Delta\mathrm{am}(u+K', k')}{\cos\mathrm{am}(u+K', k')} = -\frac{1}{\sin\mathrm{am}(u, k')}.$$

Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen ersetze man mittelst der Gleichungen 8) die Functionen mit reellem Argument und dem Modul $k'$ durch die Functionen mit dem Argumente $ui$ und dem Modul $k$. Es ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\sin\mathrm{am}(ui + K'i, k) = \frac{1}{k\sin\mathrm{am}(ui, k)},$$

$$\cos\mathrm{am}(ui + K'i, k) = -\frac{i\,\Delta\mathrm{am}(ui, k)}{k\sin\mathrm{am}(ui, k)},$$

$$\Delta\mathrm{am}(ui + K'i, k) = -i\,\frac{\cos\mathrm{am}(ui, k)}{\sin\mathrm{am}(ui, k)}.$$

Da der Modul $k$ auf beiden Seiten derselbe ist, so kann man ihn unter den Functionszeichen einfach weglassen. Setzt man $\frac{u}{i}$ statt $u$, so ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$14)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u+K'i) = \dfrac{1}{k\sin\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}(u+K'i) = -\dfrac{i\,\Delta\mathrm{am}\,u}{k\sin\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\mathrm{am}(u+K'i) = -i\,\dfrac{\cos\mathrm{am}\,u}{\sin\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Man kann in diesen Gleichungen $u$ successive um $K'i$, $2K'i$, ... zunehmen lassen. Es ergiebt sich dann, je nachdem das Multiplum von $K'i$ gerade oder ungerade ist, ein System von sechs Gleichungen. Setzt man in den so erhaltenen Gleichungen $-u$ statt $u$, so erhält man analog wie die Gleichungen 12) und 13) des § 7 die folgenden Gleichungen, in denen $m'$ eine ganze positive Zahl bedeutet und $\delta' = \pm 1$ ist.

$$15)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u+\delta'.2m'K'i) = \sin\mathrm{am}u, \\ \cos\mathrm{am}(u+\delta'.2m'K'i) = (-1)^{m'}\cos\mathrm{am}u, \\ \Delta\mathrm{am}(u+\delta'.2m'K'i) = (-1)^{m'}\Delta\mathrm{am}u. \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}[u+\delta'.(2m'+1)K'i] = \dfrac{1}{k\sin\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}[u+\delta'.(2m'+1)K'i] = i\delta'(-1)^{m'+1}\dfrac{\Delta\mathrm{am}u}{k\sin\mathrm{am}u}. \\ \Delta\mathrm{am}[u+\delta'.(2m'+1)K'i] = i\delta'(-1)^{m'+1}\dfrac{\cos\mathrm{am}u}{\sin\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 15) folgt, dass die elliptischen Functionen, abgesehen vom Zeichen, ihre Werthe nicht ändern, wenn das Argument um ein Multiplum von $2K'i$ zunimmt; sie sind also periodische Functionen mit einer imaginären Periode.

## § 9. Die elliptischen Functionen sind doppelt periodische Functionen. Allgemeine Gleichungen für dieselben.

Die Gleichungen 15) und 16) des § 8 lassen sich mit den Gleichungen 12) und 13) des § 7 so combiniren, dass sich die allgemeinsten Gleichungen für $\varphi(u+\mu K+\nu K'i)$ ergeben, wo $\varphi$ eine der Functionen Sinus Amplitudinis, Cosinus Amplitudinis oder $\Delta$ Amplitudinis ist. Man lasse zuerst in den Gleichungen 12), dann in den Gleichungen 13) von § 7 $u$ zunehmen um $\delta'2m'K'i$ und $\delta'.(2m'+1)K'i$. Mittelst der Gleichungen 15) und 16) von § 8 ergeben sich dann die folgenden zwölf Fundamentalformeln in der Theorie der elliptischen Functionen:

$$\delta^2 = 1, \quad \delta'^2 = 1.$$

$$1)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u+\delta.2mK+\delta'.2m'K'i) = (-1)^m.\sin\mathrm{am}u, \\ \cos\mathrm{am}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = (-1)^{m+m'}.\cos\mathrm{am}u. \\ \Delta\mathrm{am}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = (-1)^{m'}.\Delta\mathrm{am}u. \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(u+\delta.2mK+\delta'.(2m'K'i) = \dfrac{(-1)^m}{k\sin\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = i\delta'(-1)^{m+m'+1}\dfrac{\Delta\mathrm{am}u}{k\sin\mathrm{am}u}, \\ \Delta\mathrm{am}(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = i\delta'(-1)^{m'+1}\dfrac{\cos\mathrm{am}u}{\sin\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,(u+\delta(2m+1)K+\delta'2m'K'i) = \delta(-1)^m \dfrac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}\,(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = \delta(-1)^{m+m'-1} \dfrac{k'\sin\mathrm{am}\,n}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\,(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = (-1)^{m'} \dfrac{k'}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,(u+\delta(2m+1)K+\delta'(2m'+1)K'i) = \delta(-1)^m \dfrac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{k\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}\,(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = \dfrac{i\delta\delta'(-1)^{m+m'+1}.k'}{k\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\,(\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad) = \dfrac{i\delta'(-1)^{m'}k'\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 1) erhellt unmittelbar, dass die Functionen $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$ und $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ zwei Perioden haben, eine reelle und eine imaginäre; diese Functionen sind also *doppeltperiodische Functionen.* Da jede der Quantitäten $\delta$ und $\delta'$ die positive oder negative Einheit sein kann, so setze man in den Gleichungen 1), 2), 3) und 4) $\delta = 1$, $\delta' = 1$ und verstehe unter $m$ und $m'$ beliebige ganze positive oder negative Zahlen. Setzt man in der ersten Gleichung 1), in der zweiten Gleichung 3) und in der dritten Gleichung 4) $u = 0$, so folgt:

$$5)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,(2mK+2m'K'i) = 0, \\ \cos\mathrm{am}\,[(2m+1)K+2m'K'i] = 0, \\ \Delta\,\mathrm{am}\,[(2m+1)K+(2m'+1)K'i] = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 2) geben für $u = 0$:

$$6)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,[2mK+(2m'+1)K'i] = \infty, \\ \cos\mathrm{am}\,[\quad\quad\quad\quad\quad\quad] = \infty, \\ \Delta\,\mathrm{am}\,[\quad\quad\quad\quad\quad\quad] = \infty. \end{cases}$$

Jede der drei Functionen $\sin\mathrm{am}\,u$, $\cos\mathrm{am}\,u$, $\Delta\,\mathrm{am}\,u$ verschwindet für unendlich viele Werthe des Arguments; in Folge der Gleichungen 6) existiren unendlich viele Werthe, für welche jede der bemerkten Functionen keinen endlichen Werth mehr hat und zwar findet dieses bei allen drei Functionen für dieselben Werthe des Arguments statt. Sind $U$, $U_1$, $U_2$, $U_3$ Functionen von $u$, so lassen sich die Gleichungen aufstellen:

7) $\sin\mathrm{am}\,u = \frac{U_1}{U}, \quad \cos\mathrm{am}\,u = \frac{U_2}{U}, \quad \Delta\mathrm{am}\,u = \frac{U_3}{U},$

wo die Zähler und Nenner für dieselben Werthe verschwinden, für welche die Functionen verschwinden oder unendlich werden. Enthält eine der Functionen einen Factor von der Form $1 - \frac{u}{a}$, so kann dieser Factor nur linear vorkommen. Nach Gleichung 15) des § 6 ist:

$$8) \quad \frac{d\sin\mathrm{am}\,u}{du} = \cos\mathrm{am}\,u.\Delta\mathrm{am}\,u.$$

Verschwindet $\sin\mathrm{am}\,u$, so reducirt sich die rechte Seite der vorstehenden Gleichung auf die Einheit. Es können also $\sin\mathrm{am}\,u$ und $\frac{d\sin\mathrm{am}\,u}{du}$ nicht für dieselben Werthe von $u$ verschwinden, d. h. die Gleichung $\sin\mathrm{am}\,u = 0$ kann einen Factor $1 - \frac{u}{a}$ nur linear enthalten. Die Gleichung 8) lässt sich wegen der ersten Gleichung 7) schreiben:

$$U\frac{dU_1}{du} - U_1\frac{dU}{du} = U_2 U_3.$$

Die Functionen $U$ und $\frac{dU}{du}$ können nicht gleichzeitig verschwinden, da dieses dann auch mit $U$ und $U_2$ odnr $U$ und $U_3$ der Fall sein müsste, was nicht stattfinden kann, da $\cos\mathrm{am}\,u$ und $\Delta\mathrm{am}\,u$ nicht für dieselben Werthe des Arguments verschwinden und unendlich werden können. Hieraus folgt, dass die Gleichung $U = 0$ keine mehrfachen Wurzeln hat. Ganz auf dieselbe Art folgt, dass die Gleichungen $\cos\mathrm{am}\,u = 0$ und $\Delta\mathrm{am}\,u = 0$ einen Factor von der Form $1 - \frac{u}{a}$ nur in der ersten Potenz enthalten können.

# Dritter Abschnitt.

## § 10. Darstellung elliptischer Functionen in Form unendlicher Producte.

In den Gleichungen 5) und 6) des § 9 können $m$ und $m'$ alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe annehmen, es existirt also eine doppelt unendliche Reihe von Werthen, für welche sin am $u$, cos am $u$ und $\Delta$ am $u$ verschwinden oder unendlich werden. Es liegt nun nahe, Producte aufzustellen, in deren Factoren von der Form $1 - \frac{u}{a}$ die Quantität $u$ alle die Werthe der Argumente annimmt, welche auf den linken Seiten der Gleichungen 5) und 6) des § 9 vorkommen. Man gelangt so zu unendlichen Doppelproducten, welche sich durch Einführung trigonometrischer Functionen auf einfache unendliche Producte reduciren lassen. Es ist dieses ein ähnliches Verfahren wie das von *Euler* im Caput IX des ersten Bandes der „Introductio in Analysin Infinitorum" befolgte. Die Darstellung elliptischer Functionen durch unendliche Producte hat *Abel* in seiner berühmten Abhandlung „Recherches sur les fonctions elliptiques" (Crelle Journ. t. 2. p. 154) auf seine genialen Untersuchungen über die Theilung der elliptischen Functionen basirt. Die „Fundamenta" von *Jacobi* legen die Transformation zu Grunde. Das in Folgendem einzuschlagende Verfahren lässt sich, ohne der mathematischen Strenge Abbruch zu thun, leicht dahin vervollständigen, dass man für den gefundenen Ausdruck $x = \sin \text{am } u$ den Nachweis liefert, dass derselbe wirklich der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = du$$

genügt. Dieser Nachweis lässt sich einfach durch Betrachtungen und Formeln liefern, welche für die Theorie der elliptischen Functionen selbst, wie man dieselbe auch begründen möge, von Wichtigkeit und in ihren Anwendungen fast unentbehrlich sind.

Nehmen $m$ und $m'$ alle ganzzahligen Werthe an, bedeuten

$A$, $B$, $C$ Constanten, so lassen sich die Gleichungen 7) des § 9 in Folge der vorhergehenden Gleichungen 5) und 6) auf folgende Formen bringen:

$$1)\quad \sin\operatorname{am} u = \frac{A}{U}\,\Pi\Pi\left(1-\frac{u}{2mK+2m'K'i}\right),$$

$$2)\quad \cos\operatorname{am} u = \frac{B}{U}\,\Pi\Pi\left(1-\frac{u}{(2m+1)K+2m'K'i}\right),$$

$$3)\quad \Delta\operatorname{am} u = \frac{C}{U}\,\Pi\Pi\left(1-\frac{u}{(2m+1)K+(2m'+1)K'i}\right),$$

$$4)\quad U = \Pi\Pi\left(1-\frac{u}{2mK+(2m'+1)K'i}\right).$$

Das Zeichen $\Pi$ hat die Bedeutung, dass in dem nachfolgenden eingeklammerten Term für $m$ und $m'$, unabhängig von einander, alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu setzen sind und das Product der sämmtlichen so erhaltenen Ausdrücke zu bilden ist. Zur Vereinfachung des Druckes ist:

$$\Pi\Pi \text{ statt } \prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\ \prod_{m'=-\infty}^{m'=\infty}$$

gesetzt. In der Gleichung 1) ist die Combination $m=0$, $m'=0$ auszuschliessen und statt derselben der Factor $u$ zu setzen.

Die obigen unendlichen Doppelproducte lassen sich in einfache Producte transformiren unter Anwendung der beiden folgenden allgemeinen Gleichungen:

$$5)\quad \sin(a+bi) = \frac{e^{(a+bi)i}-e^{-(a+bi)i}}{2i} = (a+bi)\prod_{m=1}^{m=\infty}\left\{1-\left(\frac{a+bi}{m\pi}\right)^2\right\}.$$

$$6)\quad \cos(a+bi) = \frac{e^{(a+bi)i}+e^{-(a+bi)i}}{2} = \prod_{m=-\infty}^{m=\infty}\left(1-\frac{a+bi}{\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi}\right).$$

Eine einfache Ableitung dieser Gleichungen ist in der Note II gegeben.

Unendliche Doppelproducte von der Art der Ausdrücke auf den rechten Seiten der Gleichungen 1) bis 4) bilden den Gegenstand einer eingehenden Untersuchung von *Eisenstein* in der Abhandlung: „Genauere Untersuchung der unendlichen Doppelproducte,

aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind.“ (Crelle. Journ. t. 35. p. 153—274, auch Mathemat. Abh. p. 213.) Was die weitere Transformation der Doppelproducte betrifft, so sind im Folgenden einige Anmerkungen der erwähnten Abhandlung (l. c. p. 197 u. 215) zur Anwendung gebracht.

Zur Vereinfachung werde in den Gleichungen 1)—4) $m' = r$ gesetzt. Es ist nun:

$$\prod_{r=-\infty}^{r=\infty} \varphi(2r+1) = \prod_{r=0}^{r=\infty} \varphi(2r+1) \cdot \prod_{r=-\infty}^{r=-1} \varphi(2r+1) =$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \varphi(2r-1)\,\varphi(-2r+1).$$

Wendet man dieses auf den in der Gleichung 4) enthaltenen Ausdruck $U$ an, so folgt:

$$U = \prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left(1 - \frac{u}{2mK+(2r-1)K'i}\right)\left(1 - \frac{u}{2mK-(2r-1)K'i}\right).$$

Es ist nun weiter:

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \psi(m) = \psi(0) \prod_{m=1}^{m=\infty} \psi(m)\,\psi(-m),$$

folglich:

$$7) \qquad U = \prod_{r=1}^{r=\infty} F(r),$$

wo zur Vereinfachung gesetzt ist:

$$F(r) =$$

$$\left(1 - \frac{u}{(2r-1)K'i}\right)\left(1 + \frac{u}{(2r-1)K'i} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 - \frac{u}{2mK+(2r-1)K'i}\right)\times\right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{u}{2mK-(2r-1)K'i}\right)\left(1 - \frac{u}{2mK-(2r-1)K'i}\right)\left(1 + \frac{u}{2mK+(2r-1)K'i}\right)\right.$$

Da nun:

$$1 \pm \frac{u}{2mK+a} = \frac{2mK+a\pm u}{2mK+a} = \frac{1+\frac{a\pm u}{2mK}}{1+\frac{a}{2mK}},$$

so lässt sich der Ausdruck für $F(r)$ auf folgende Form bringen, wenn unter dem Productzeichen $\Pi$ der erste Factor mit dem zweiten und der dritte mit dem vierten multiplicirt wird:

$$F(r) = \frac{(2r-1)K'i-u}{(2r-1)K'i} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-\left(\frac{(2r-1)K'i-u}{2mK}\right)^2}{1-\left(\frac{(2r-1)K'i}{2mK}\right)^2} \times$$

$$\frac{(2r-1)K'i+u}{(2r-1)K'i} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1-\left(\frac{(2r-1)K'i+u}{2mK}\right)^2}{1-\left(\frac{(2r-1)K'i}{2mK}\right)^2}.$$

Durch Anwendung der Gleichung 5) lässt sich der vorstehende Ausdruck von $F(r)$ auf folgende Form bringen:

$$F(r) = \frac{\sin\pi\frac{(2r-1)K'i-u}{2K}}{\sin\pi\frac{(2r-1)K'i}{2K}} \times \frac{\sin\pi\frac{(2r-1)K'i+u}{2K}}{\sin\pi\frac{(2r-1)K'i}{2K}}.$$

Setzt man in Zähler und Nenner:

$$2\sin a\sin b = \cos(a-b)-\cos(a+b),$$

so wird:

$$F(r) = \frac{\cos\frac{\pi u}{K}-\cos\pi\frac{(2r-1)K'i}{K}}{1-\cos\pi\frac{(2r-1)K'i}{K}} = \frac{\cos\pi\frac{(2r-1)K'i}{K}-\cos\frac{\pi u}{K}}{\cos\pi\frac{(2r-1)K'i}{K}-1}.$$

Da nun:

$$\cos ai = \frac{e^a+e^{-a}}{2},$$

so lässt sich der Ausdruck für $F(r)$ auch schreiben:

$$8)\quad F(r) = \frac{e^{(2r-1)\pi\frac{K'}{K}}-2\cos\frac{\pi u}{K}+e^{-(2r-1)\pi\frac{K'}{K}}}{e^{(2r-1)\pi\frac{K'}{K}}-2+e^{-(2r-1)\pi\frac{K'}{K}}}.$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise hat *Jacobi* folgende Bezeichnung eingeführt:

$$9)\quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Setzt man $u = \frac{2Kx}{\pi}$, so wird die Gleichung 8) einfacher:

$$F(r) = \frac{q^{-(2r-1)} - 2\cos 2x + q^{2r-1}}{q^{-(2r-1)} - 2 + q^{2r-1}} = \frac{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{(1-q^{2r-1})^2}.$$

Die Gleichung 7) nimmt hierdurch folgende bemerkenswerthe Form an:

$$10) \quad U = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{(1-q^{2r-1})^2}.$$

In dem Doppelproducte der rechten Seite der Gleichung 1) setze man $m' = r$, $u = \frac{2Kx}{\pi}$ und nach 9) $\pi\frac{K'}{K} = -\log q$. Das Doppelproduct nimmt dann folgende Form an:

$$\prod\prod\left(1 - \frac{x}{m\pi - ri\log q}\right),$$

wo die Combination $m = 0$, $r = 0$ auszuschliessen und dafür der Factor $x$ zu setzen ist. Da:

$$11) \quad \prod_{r=-\infty}^{r=\infty} f(r) = f(0)\prod_{r=1}^{r=\infty} f(r)f(-r),$$

so lässt sich das bemerkte Doppelproduct auch schreiben:

$$12) \prod\left(1 - \frac{x}{m\pi}\right)\prod\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1 - \frac{x}{m\pi - ri\log q}\right)\left(1 - \frac{x}{m\pi + ri\log q}\right).$$

In dem ersten Factor ist $m = 0$ auszunehmen und dafür $x$ zu setzen. Wendet man in Beziehung auf $m$ die Transformation 11) an, so geht der Ausdruck 12) über in:

$$13) \quad x\prod_{m=1}^{m=\infty}\left\{1 - \left(\frac{x}{m\pi}\right)^2\right\} \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty} F_1(r),$$

wo:

$$F_1(r) = \left(1 + \frac{x}{ri\log q}\right)\prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{x}{m\pi - ri\log q}\right)\left(1 + \frac{x}{m\pi + ri\log q}\right)\times$$

$$\left(1 - \frac{x}{ri\log q}\right)\prod_{m=1}^{m=\infty}\left(1 - \frac{x}{m\pi + ri\log q}\right)\left(1 + \frac{x}{m\pi - ri\log q}\right).$$

Durch einfache Transformation folgt:

$$F_1(r) = \frac{r i \log q + x}{r i \log q} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1 - \left(\frac{r i \log q + x}{m\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{r i \log q}{m\pi}\right)^2} \times$$

$$\frac{r i \log q - x}{r i \log q} \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{1 - \left(\frac{r i \log q - x}{m\pi}\right)^2}{1 - \left(\frac{r i \log q}{m\pi}\right)^2}.$$

Unter Zuziehung der Gleichung 5) wird einfacher:

$$F_1(r) = \frac{\sin(r i \log q + x)}{\sin r i \log q} \frac{\sin(r i \log q - x)}{\sin r i \log q} =$$

$$\frac{q^{-r} e^{xi} - q^r e^{-xi}}{q^{-r} - q^r} \frac{q^{-r} e^{-xi} - q^r e^{xi}}{q^{-r} - q^r} =$$

$$\frac{q^{-2r} - 2\cos 2x + q^{2r}}{(q^{-r} - q^r)^2} = \frac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{(1 - q^{2r})^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Form von $\sin x$ als unendliches Product reducirt sich der in 13) enthaltene Ausdruck auf:

$$\sin x \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{(1 - q^{2r})^2}.$$

Dieses ist der Zähler von $\sin \mathrm{am} \frac{2Kx}{\pi}$, abgesehen von einer Constanten in Beziehung auf $x$.

Der Zähler von $\cos \mathrm{am} \frac{2Kx}{\pi}$ nimmt nach 2) und 9) folgende Form an:

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{r=-\infty}^{r=\infty} \left(1 - \frac{x}{(m + \tfrac{1}{2})\pi - r i \log q}\right) =$$

$$\prod \prod \frac{1 - \frac{x + r i \log q}{(m + \frac{1}{2})\pi}}{1 - \frac{r i \log q}{(m + \frac{1}{2})\pi}}.$$

Wegen der Gleichung 6) reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$\prod_{r=-\infty}^{r=\infty} \frac{(\cos x + r i \log q)}{\cos r i \log q},$$

d. i. nach 11):

$$\cos x \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos(r\,i\log q + x)\cos(r\,i\log q - x)}{\cos r\,i\log q \,.\cos r\,i\log q} =$$

$$\cos x \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{(1+q^{2r})^2}.$$

Genau auf dieselbe Art lässt sich der Zähler von $\Delta$ am $\frac{2Kx}{\pi}$ reduciren. Man erhält so:

$$\prod_{m=-\infty}^{m=\infty} \prod_{r=-\infty}^{r=\infty} \left(1 - \frac{x}{(m+\frac{1}{2})\pi - (r+\frac{1}{2})\,i\log q}\right) =$$

$$\prod\prod \frac{1 - \dfrac{x + (r+\frac{1}{2})\,i\log q}{(m+\frac{1}{2})\pi}}{1 - \dfrac{(r+\frac{1}{2})\,i\log q}{(m+\frac{1}{2})\pi}} = \prod_{r=-\infty}^{r=\infty} \frac{\cos[x + (r+\frac{1}{2})\,i\log q]}{\cos(r+\frac{1}{2})\,i\log q} =$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{\cos[(r-\frac{1}{2})\,i\log q + x]}{\cos(r-\frac{1}{2})\,i\log q} \cdot \frac{\cos[(r-\frac{1}{2})\,i\log q - x]}{\cos(r-\frac{1}{2})\,i\log q} =$$

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{(1+q^{2r-1})^2}.$$

Die Zusammenstellung der vorstehenden Resultate gestattet es, die drei elliptischen Functionen sin am $u$, cos am $u$, $\Delta$ am $u$ für $u = \frac{2Kx}{\pi}$ auf folgende Weise durch unendliche Producte zu definiren*):

14)

$$\begin{cases} \sin\text{am}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = A \prod\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1-q^{2r-1}}{1-q^{2r}}\right)^2 . \sin x \prod\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}, \\ \cos\text{am}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = B \prod\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 . \cos x \prod\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}, \\ \Delta\text{am}\,\dfrac{2Kx}{\pi} = C \prod\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 \prod\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Constanten $A$, $B$ und $C$ setze man in

*) Zur Vereinfachung ist $\prod\limits_{1}^{\infty}$ statt $\prod\limits_{r=1}^{r=\infty}$ gesetzt.

der ersten Gleichung 14) $x = \frac{\pi}{2}$, in den beiden folgenden $x = 0$. Da sin am $K = 1$, cos am $0 = 1$, $\Delta$ am $0 = 1$, so folgt:

$$1 = A \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1-q^{2r}}\right)^2 \cdot \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\right)^2, \quad B = 1, \; C = 1.$$

Die Gleichungen 14) werden hierdurch:

15) $$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sin x \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1-2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}},$$

16) $$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \cos x \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1+2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}},$$

17) $$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}.$$

## § 11. Bemerkungen über die unendlichen Producte des § 10.

Die Aufstellung der Gleichungen 15), 16) und 17) des vorhergehenden § ist auf sehr einfache Betrachtungen basirt; um die erhaltenen Resultate ganz sicher hinstellen zu können, bieten sich zwei Wege dar. Man kann zuerst die Richtigkeit verschiedener Annahmen, welche stillschweigend vorausgesetzt wurden, näher begründen. Es wurde angenommen, dass die Functionen sin am $u$, cos am $u$ und $\Delta$ am $u$ für keine anderen Werthe verschwinden oder unendlich werden, wie für die Werthe, welche in den Gleichungen 5) und 6) des § 9 angemerkt sind. Diese Annahme enthält implicite einen Satz, welcher nicht selbstverständlich ist, sondern, wie *Jacobi* (Crelle. Journ. t. 14) gezeigt hat, eines eingehenden Beweises bedarf, dass nämlich eine Function einer Variabeln nicht mehr wie zwei Perioden haben kann. Durch Anwendung der Gleichungen für sin $(a+bi)$ und cos $(a+bi)$ ist die Multiplication auf den rechten Seiten der Gleichungen 1), 2), 3) und 4) in § 10 ausgeführt worden. Es sind bei diesem Verfahren die Factoren des unendlichen Products in bestimmter Reihenfolge angenommen worden, wobei nun die Frage sich darbietet, ob eine andere Anordnung der Factoren zu anderen Resultaten führen muss. Man

könnte z. B. die Multiplication in den oben bemerkten Gleichungen zuerst nach $m'$ ausführen. Ohne einige Vorsicht ergeben sich bei diesem zweiten Verfahren Resultate, welche nicht richtig sind, wie *Eisenstein* in der Abhandlung: „Genauere Untersuchung der unendlichen Doppelproducte etc.“ (Crelle. Journal t. 35 p. 153.) nachgewiesen hat. In einer kurzen Notiz in Crelle, Journal t. 27 p. 285 finden sich Relationen zwischen unendlichen Producten aufgestellt, welche nicht richtig sind.*) Nimmt man die Logarithmen der unendlichen Doppelproducte, z. B.:

$$\log \Pi\Pi\left(1-\frac{u}{2mK+(2m'+1)K'i}\right)$$

entwickelt diesen Ausdruck nach Potenzen von:

$$\frac{u}{2mK+(2m'+1)K'i},$$

und zwar für solche Werthe von $u$, welche eine convergente Reihe ergeben, so ist der Factor von $-\frac{u^n}{n}$ eine Doppelsumme von der Form:

$$\Sigma\Sigma\frac{1}{[2mK+(2m'+1)K'i]^n}.$$

Hierbei ist die Summe nicht unabhängig von der Anordnung der zu summirenden Terme, wenn $n=1$ oder $n=2$ ist. Eine Ausführung dieser beiden erwähnten analytischen Untersuchungen sowie anderer Untersuchungen, zu denen die Gleichungen 15), 16) und 17) des vorhergehenden § Veranlassung geben können, muss insofern hier ungeeignet erscheinen, als die Einfachheit der angewandten Methode durch nachfolgende weitläufige Untersuchungen gänzlich illusorisch würde. Unter diesen Umständen bietet sich ein zweiter Weg zur weiteren Behandlung der erwähnten Gleichungen fast von selbst dar, nämlich die Verification der gefundenen Resultate. Man kann die gefundenen unendlichen Producte unabhängig von ihrer Herleitung nehmen und zeigen, dass, wenn die rechte Seite der Gleichung 15) in § 10 durch $z$ bezeichnet wird, nämlich:

*) Vergleiche hierüber eine Bemerkung von *Jacobi*. Crelle. Journal t. 30. p. 184.

1) $$z = \sin x \prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1-2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}$$

umgekehrt $x$ in Function von $z$ durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{2Kx}{\pi}.$$

Diese Betrachtungsweise ist zuerst von *Heine* in seinem „Abriss einer Theorie der elliptischen Functionen" (Crelle. Journal t. 39 p. 122—137) ausgeführt worden. *Heine* nimmt dabei Untersuchungen über eine sehr allgemeine Reihe zu Hülfe, welche auf unendliche Producte führt, von welchen die oben bemerkten nur sehr specielle Fälle sind. Man kann, ohne den von *Heine* befolgten Grundgedanken wesentlich zu ändern, zur weiteren Behandlung der vorkommenden unendlichen Producte mit sehr elementaren Hülfsmitteln zu Werke gehn, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Was die Quantität $q$ betrifft, so ist dieselbe ein positiver, ächter Bruch. Das Integral:

$$K = \int_0^1 \frac{\pi}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

nimmt zu von

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

bis zu einem unendlich grossen positiven Werthe, dargestellt durch

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2},$$

wenn $k$ von 0 bis 1 zunimmt. Da $k' = \sqrt{1-k^2}$, so nimmt $k'$ dieselben Werthe wie $k$ in umgekehrter Reihenfolge an, also nimmt das Integral $K'$ ab, von einem unendlich grossen, positiven Werthe bis $\frac{\pi}{2}$, wenn $k$ die Werthe von 0 bis 1 durchläuft. Für das bemerkte Intervall nimmt also:

$$\frac{K'}{K}$$

alle positiven Werthe von $\infty$ bis 0 an, mithin nimmt

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$$

zu von 0 bis 1. Es soll nun im Folgenden die Quantität $q$ der einzigen Bedingung unterworfen sein, dass $0 \leqq q < 1$ ist. Was die Convergenz der vorkommenden Producte betrifft, so überzeugt man sich sehr leicht von derselben durch Anwendung der Logarithmen. Es ist:

$$2) \quad \log(1 - 2p\cos 2x + p^2) = -2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{p^s}{s} \cos 2sx. \quad -1 \leqq p \leqq 1.$$

Setzt man hierin $p = q^{2r}$ und $p = q^{2r-1}$ bildet die Differenz der erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$\log \frac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}} = 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} (1 - q^s) q^{(2r-1)s} \frac{\cos 2sx}{s}.$$

Legt man $r$ alle ganzzahligen, positiven Werthe bei, bildet die Summe der so erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$3) \quad \sum_{r=1}^{r=\infty} \log \frac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}$$

$$= \log \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}} = 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^s}{1 + q^s} \cdot \frac{\cos 2sx}{s}.$$

Für $s = \frac{\pi}{2}$ folgt hieraus:

$$4) \quad \log \prod_{1}^{\infty} \left( \frac{1 + q^{2r}}{1 + q^{2r-1}} \right)^2 = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} \frac{q^s}{1 + q^s}.$$

Setzt man in den Gleichungen 3) und 4) $\frac{\pi}{2} - x$ statt $x$ und $-q$ statt $q$, so gehen dieselben über in:

$$5) \quad \sum_{r=1}^{r=\infty} \log \frac{1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}$$

$$= \log \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 + 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}} = 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^s}{1 + (-q)^s} \frac{\cos 2sx}{s},$$

$$6) \quad \log \prod \left( \frac{1 + q^{2r}}{1 + q^{2r-1}} \right)^2 = 2 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s} \frac{q^s}{1 + (-q)^s}.$$

In der Gleichung 2) nehme man $-p$ statt $p$, ziehe von der so erhaltenen Gleichung die Gleichung 2) ab. Es ist dann:

$$\log \frac{1+2p\cos 2x+p^2}{1-2p\cos 2x+p^2} = 4\sum_{1}^{\infty} p^{2s-1}\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}.$$

Man setze hierin $p = q^{2r-1}$, lege $r$ alle ganzzahligen positiven Werthe bei und bilde die Summe der so erhaltenen Gleichungen. Es ist dann:

$$7)\quad \sum_{r=1}^{r=\infty} \log \frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}$$

$$= \log \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}} = 4\sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^{2s-1}}{1-q^{4s-2}}\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}$$

$$= 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{q^{2s-1}}{1+q^{2s-1}}+\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2s-1}}\right)\frac{\cos 2(2s-1)x}{2s-1}.$$

Für $x = 0$ folgt:

$$8)\quad \log \prod_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\right)^2 = 2\sum_{s=1}^{s=\infty}\left(\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2s-1}}+\frac{q^{2s-1}}{1-q^{2s-1}}\right)\frac{1}{2s-1}.$$

Die in den Gleichungen 3) bis 8) vorkommenden Reihen sind sämmtlich convergent, wenn $q < 1$ ist. Hieraus folgt, dass die unendlichen Producte, welche in den Gleichungen 15), 16) und 17) des § 10 vorkommen, endliche Werthe haben. Um keine neuen Bezeichnungen einzuführen, sollen die Bezeichnungen:

$$\sin \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\ \cos \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},\ \Delta \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}$$

beibehalten werden und vorläufig nur die Bedeutungen beliebiger Functionsbezeichnungen haben für die oben erwähnten unendlichen Producte. Es sollen hierbei zwischen diesen Functionen keine anderen Beziehungen angenommen werden, als die, welche sich aus den unendlichen Producten ergeben, also die Gleichung:

$$\sin^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}+\cos^2 \operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 1$$

soll nicht als selbstverständlich angenommen werden. Zur Vereinfachung setze man:

9) $$z_1 = \cos x \prod_1^{\infty}\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^{\infty}\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}},$$

10) $$z_2 = \prod_1^{\infty}\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 \prod_1^{\infty}\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

Die Gleichungen 1) und 9) zeigen, dass durch gleichzeitige Vertauschung von $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$ und von $q$ mit $-q$ $z$ und $z_1$ in einander übergehn. Geht $q$ in $-q$ über, so geht nach 10) $z_2$ über in $\frac{1}{z_2}$. Setzt man in 1) $z = \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, also:

11) $$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sin x \prod_1^{\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^{\infty}\frac{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}$$

$$= \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}\prod_1^{\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^{\infty}\frac{(1-q^{2r}e^{2xi})(1-q^{2r}e^{-2xi})}{(1-q^{2r-1}e^{2xi})(1-q^{2r-1}e^{-2xi})},$$

so folgt, wenn $x$ mit $x-\frac{1}{2}i\log q$ vertauscht wird:

12) $$\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x-\tfrac{1}{2}i\log q) = \prod_1^{\infty}\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 . H,$$

13) $$H = \frac{e^{xi}q^{\frac{1}{2}}-e^{-xi}q^{-\frac{1}{2}}}{2i}\prod_1^{\infty}\frac{(1-q^{2r+1}e^{2xi})(1-q^{2r-1}e^{-2xi})}{(1-q^{2r}e^{2xi})(1-q^{2r-2}e^{-2xi})}.$$

Es ist:

$$\frac{e^{xi}q^{\frac{1}{2}}-e^{-xi}q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = -\frac{e^{-xi}}{2i\sqrt{q}}(1-qe^{2xi}),$$

$$\frac{1}{1-e^{-2xi}} = \frac{e^{xi}}{2i\sin x}.$$

Mit Rücksicht hierauf reducirt sich der Ausdruck von $H$ in 13) auf:

$$H = \frac{1}{4\sin x\sqrt{q}}\prod_1^{\infty}\frac{(1-q^{2r-1}e^{2xi})(1-q^{2r-1}e^{-2xi})}{(1-q^{2r}e^{2xi})(1-q^{2r}e^{-2xi})} =$$

$$\frac{1}{4\sin x\sqrt{q}}\prod_1^{\infty}\frac{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}.$$

Die Gleichung 12) wird dann:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x - \tfrac{1}{2} i \log q) =$$

$$\frac{1}{4 \sin x \sqrt{q}} \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod_1^{\infty} \frac{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}.$$

Die vorstehende Gleichung mit der Gleichung 11) multiplicirt, giebt:

14) $$\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}(x - \tfrac{1}{2} i \log q) = \frac{1}{4\sqrt{q}} \prod_1^{\infty} \left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^4.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung lässt sich $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ durch eine unendliche Reihe darstellen, wie im folgenden § gezeigt werden soll.

Die Gleichungen 9) und 10) zeigen, dass für $x = 0$ gleichzeitig $z_1 = 1$ und $z_2 = 1$ ist. Für $x = \frac{\pi}{2}$ giebt die Gleichung 1) $z = 1$.

---

# Vierter Abschnitt.

## § 12. Transformation eines unendlichen Products in eine unendliche Reihe. Darstellung der elliptischen Functionen durch trigonometrische Reihen.

Sind $\psi(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ Polynome von $\alpha$, ist der Grad von $\psi(\alpha)$ um eine Einheit geringer wie der von $\varphi(\alpha)$, so lässt sich bekanntlich:

1) $$\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$$

durch eine Reihe von Brüchen darstellen von der Form:

$$\frac{A}{\alpha - \alpha},$$

wo $A$ eine Constante und $\alpha$ eine Wurzel von $\varphi(\alpha) = 0$ ist. Da die Anzahl der Wurzeln von $\varphi(\alpha) = 0$ beliebig ist, so kann man dieselbe unbegränzt zunehmen lassen. Sind nun $\psi(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$

unendliche Producte, so lässt sich auf den Ausdruck 1) noch die Methode der Zerlegung in Partialbrüche anwenden, wenn man die Vorsicht gebraucht, den obigen Ausdruck zu multipliciren mit einem Term von der Form:

$$\frac{1}{g-\alpha},$$

wo $g$ eine Constante ist. Es ist dann der Grad des Nenners um eine Einheit höher wie der Grad des Zählers, wenn jedem Factor des unendlichen Products $\psi(\alpha)$ ein Factor des unendlichen Products $\varphi(\alpha)$ entspricht.

Es sei:

$$P = \frac{1}{\sin x}\,\frac{1-2q\cos 2(x+y)+q^2}{1-2q^2\cos 2x+q^4}\cdot\frac{1-2q^3\cos 2(x+y)+q^6}{1-2q^4\cos 2x+q^8}\cdots$$
$$\cdots\frac{1-2q^{2\varrho-1}\cos 2(x+y)+q^{4\varrho-2}}{1-2q^{2\varrho}\cos 2x+q^{4\varrho}},$$

oder:

$$2)\qquad P = \frac{1}{\sin x}\prod_{r=1}^{r=\varrho}\frac{1-2q^{2r-1}\cos 2(x+y)+q^{4r-2}}{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}.$$

Setzt man statt der trigonometrischen Functionen Exponentialfunctionen, so ist auch:

$$P = \frac{2ie^{xi}}{e^{2xi}-1}\prod_{r=1}^{r=\varrho}\frac{1-q^{2r-1}e^{2(x+y)i}}{1-q^{2r}e^{2xi}}\,\frac{1-q^{2r-1}e^{-2(x+y)i}}{1-q^{2r}e^{-2xi}},$$

oder:

$$3)\qquad e^{2xi} = \alpha,\quad e^{2yi} = \beta$$

gesetzt:

$$4)\qquad P = 2ie^{xi}f(\alpha),$$

wo:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\prod_{r=1}^{r=\varrho}\frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha}\,\frac{\alpha-q^{2r-1}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}}.$$

Der Ausdruck rechts lässt sich in Partialbrüche zerlegen, welchen Werth auch $\varrho$ haben möge. Zur Vereinfachung der folgenden Entwicklungen lasse man $\varrho$ unbegrenzt zunehmen und setze:

$$5)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\prod_{r=1}^{r=\infty}\frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha}\,\frac{\alpha-q^{2r}\beta^{-1}}{\alpha-q^{2r}},$$

oder:

$$6) \quad f(\alpha) = \frac{A_0}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{A_n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{B_n}{\alpha - q^{2n}} \right).$$

Diese Art der Zerlegung in Partialbrüche findet sich in der Abhandlung von *Somoff*: Démonstration des formules de Mr. *Jacobi* etc. (Crelle, Journal t. 43 p. 95, oder auch Mélanges Mathémat. et Astron. t. I, p. 359). Es ist selbstverständlich, dass sich eine Zerlegung des Verhältnisses zweier unendlichen Producte auch ausführen lässt, wenn man Zähler und Nenner von gleichem Grade annimmt, wobei dann die entsprechenden Regeln bei Zerlegungen in Partialbrüche in Anwendung zu bringen sind. Nur scheint der oben eingeschlagene Weg der einfachste zu sein.

Die Gleichung 6) giebt:

$$[f(\alpha).(\alpha - 1)]_{\alpha=1} = A_0.$$

Wegen 5) erhält man unmittelbar:

$$7) \quad A_0 = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-1}\beta}{1 - q^{2r}} \cdot \frac{1 - q^{2r-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r}}.$$

Nach 6) ist ferner:

$$A_n = [f(\alpha).(1 - q^{2n}\alpha)]_{\alpha = q^{-2n}}.$$

Mittelst der Gleichung 5) folgt:

$$8) \quad A_n = \frac{1}{q^{-2n} - 1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1 - q^{2r-2n-1}\beta}{1 - q^{2r-2n}} .(1 - q^{-1}\beta).N,$$

$$9) \quad N = \prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-2n-1}\beta}{1 - q^{2r-2n}} \cdot \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r+2n-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r+2n}}.$$

Setzt man $r - n = s$, so ist:

$$\prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r-2n-1}\beta}{1 - q^{2r-2n}} = \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta}{1 - q^{2s}}.$$

Für $r + n = s$ folgt:

$$\prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r+2n-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r+2n}} = \prod_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{1 - q^{2s-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2s}}.$$

Mittelst der beiden letzten Gleichungen wird die Gleichung 9):

$$10) \quad N = \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta}{1-q^{2s}} \prod_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}.$$

Es ist ferner:

$$\frac{1}{q^{-2n}-1} \cdot \prod_{r=1}^{r=n-1} \left(\frac{1-q^{2r-2n-1}\beta}{1-q^{2r-2n}}\right).(1-q^{-1}\beta) =$$

$$-\frac{\beta-q}{1-q^{2n}}q^{2n-1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1}{q} \cdot \frac{\beta-q^{2n-2r+1}}{1-q^{2n-2r}} =$$

$$-q^n \cdot \frac{(\beta-q)(\beta-q^3)\ldots\ldots(\beta-q^{2n-1})}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots\ldots(1-q^{2n})} =$$

$$-q^n\beta^n \prod_{s=1}^{s=n} \frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}.$$

Multiplicirt man die rechte Seite der Gleichung 10) mit dem vorstehenden Ausdruck, so erhält man nach 8) den Werth von $A_n$. Mit Rücksicht auf den Werth von $A_0$ zu 7) folgt:

$$11) \quad A_n = -q^n\beta^n A_0.$$

Die Gleichung 5) mit $\alpha - q^{2n}$ multiplicirt lässt sich auf folgende Form bringen:

$$12) \quad f(\alpha)(\alpha-q^{2n}) = \frac{\alpha-q^{2n-1}\beta^{-1}}{\alpha-1} \prod_{r=1}^{r=n-1} \frac{1-q^{2r-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}}{1-q^{2r}\alpha^{-1}}.L,$$

$$13) \quad L = \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r-1}\alpha\beta}{1-q^{2r}\alpha} \cdot \prod_{r=n+1}^{r=\infty} \frac{1-q^{2r-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}}{1-q^{2r}\alpha^{-1}}.$$

Aus der Gleichung 6) folgt:

$$B_n = [f(\alpha)(\alpha-q^{2n})]_{\alpha=q^{2n}}.$$

Die Gleichungen 12) und 13) geben nach leichter Transformation:

$$B_n = \beta^{-1}q^{2n-1} \frac{1-q\beta}{1-q^{2n}} \prod_{r=1}^{r=n-1} \left(\frac{\beta^{-1}}{q} \cdot \frac{1-q^{2n-2r+1}\beta}{1-q^{2n-2r}}\right).L,$$

$$L = \prod_{s=n+1}^{n=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta}{1-q^{2s}} \cdot \prod_{s=1}^{s=\infty} \frac{1-q^{2s-1}\beta^{-1}}{1-q^{2s}}.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von $A_0$ in 7) folgt:

$$B_n = q^n \beta^{-n} A_0.$$

Setzt man diesen Werth von $B_n$, ferner den Werth von $A_n$ aus 11) in die Gleichung 6), dividirt durch $A_0$, so folgt:

$$\frac{f(\alpha)}{A_0} = \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^n \beta^n}{1 - q^{2n} \alpha} + \frac{q^n \beta^{-n}}{\alpha - q^{2n}} \right).$$

Substituirt man links für $f(\alpha)$ und $A_0$ ihre Werthe aus 5) und 7), so erhält man die folgende Zerlegung in Partialbrüche eines unendlichen Products:

$$14) \quad \frac{1}{\alpha - 1} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^{2r-1}\beta} \cdot \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^{2r-1}\beta^{-1}} \cdot \frac{1 - q^{2r-1}\alpha\beta}{1 - q^{2r}\alpha} \cdot \frac{1 - q^{2r-1}\alpha^{-1}\beta^{-1}}{1 - q^{2r}\alpha^{-1}}$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^n \beta^n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{q^n \beta^{-n}}{\alpha - q^{2n}} \right)$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^n \beta^n}{1 - q^{2n}\alpha} + \frac{q^n \beta^{-n} \alpha^{-1}}{1 - q^{2n}\alpha^{-1}} \right).$$

Setzt man hierin $\alpha = e^{2xi}$, $\beta = e^{2yi}$, multiplicirt auf beiden Seiten mit $2i e^{xi}$, so findet man die folgende allgemeine Entwicklung:

15)

$$\frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{(1 - q^{2r})^2}{1 - 2q^{2r-1}\cos 2y + q^{4r-2}} \cdot \frac{1 - 2q^{2r-1}\cos 2(x+y) + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}$$

$$= \frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \left( \frac{-e^{(2ny+x)i}}{1 - q^{2n} e^{2xi}} + \frac{e^{-(2ny+x)i}}{1 - q^{2n} e^{-2xi}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} q^n \frac{\sin(2ny+x) - q^{2n}\sin(2ny-x)}{1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n}}.$$

Für $y = 0$ giebt die Gleichung 15):

$$\frac{1}{\sin x} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^{2r-1}} \right)^2 \frac{1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}{1 - 2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}} =$$

$$\frac{2i}{e^{xi} - e^{-xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^n e^{xi}}{1 - q^{2n} e^{2xi}} + \frac{q^n e^{-xi}}{1 - q^{2n} e^{-2xi}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sin x} + 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^n (1-q^{2n}) \sin x}{1 - 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}}.$$

Wegen der Gleichung 11) des § 11 lässt sich diese Gleichung noch schreiben:

$$16) \quad \frac{1}{\operatorname{sin\,am} \frac{2Kx}{\pi}} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}} \cdot \frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}} \right)^2 =$$

$$\frac{-2i\, e^{xi}}{1-e^{2xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^n e^{xi}}{1-q^{2n} e^{2xi}} + \frac{q^n e^{-xi}}{1-q^{2n} e^{-2xi}} \right).$$

Nimmt man in dieser Gleichung $x - \frac{1}{2} i \log q$ statt $x$, so wird:

$$\frac{1}{\operatorname{sin\,am} \frac{2K}{\pi} (x - \frac{1}{2} i \log q)} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}} \cdot \frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}} \right)^2 =$$

$$\frac{-2i\, q^{\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q\, e^{2xi}} + 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{-q^{n+\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q^{2n+1} e^{2xi}} + \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{1-q^{2n-1} e^{-2xi}} \right)$$

$$= 2i \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{1-q^{2n-1} e^{-2xi}} - \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q^{2n-1} e^{2xi}} \right).$$

Auf der linken Seite bringe man die Formel 14) des § 11 zur Anwendung, auf der rechten Seite entwickele man

$$\frac{1}{1-q^{2n-1} e^{\pm 2xi}}$$

nach Potenzen von $q^{2n-1}$ und summire schliesslich nach $n$. Es ist dann:

$$\operatorname{sin\,am} \frac{2Kx}{\pi} \cdot \sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}} \cdot \frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}} \right)^2 =$$

$$\frac{1}{2i} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left( \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{xi}}{1-q^{2n-1} e^{2xi}} - \frac{q^{n-\frac{1}{2}} e^{-xi}}{1-q^{2n-1} e^{-2xi}} \right) =$$

$$\frac{1}{2i} \sum \left\{ q^{\frac{2n-1}{2}} (e^{xi} - e^{-xi}) + q^{3\frac{2n-1}{2}} (e^{3xi} - e^{-3xi}) + \ldots \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{q}}{1-q} \sin x + \frac{\sqrt{q^3}}{1-q^4} \sin 3x + \ldots.$$

Bedient man sich des Summenzeichens, so ist folglich:

$$17) \quad \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1-q^{4r}}{1-q^{4r-2}} \right)^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \sin(2s-1)x.$$

Diese Gleichung dividire man auf beiden Seiten durch $\sqrt{q}$, darauf setze man $-q$ statt $q$ und $\frac{\pi}{2} - x$ statt $x$. Nach Ausführung dieser Operationen, wodurch $\sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$ übergeht in $\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, multiplicire man wieder mit $\sqrt{q}$.

Bedient man sich der Bezeichnungen $z$ und $z_1$ der Gleichungen 1) und 9) des § 11, setzt zur Abkürzung:

$$18) \quad \sqrt{q} \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1-q^{4r}}{1-q^{4r-2}} \right)^2 = Q,$$

so giebt die Gleichung 17) und die aus derselben abgeleitete:

$$19) \quad \begin{cases} z \cdot Q = \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \sin(2s-1)x, \\ z_1 \cdot Q = \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1+q^{2s-1}} \cos(2s-1)x. \end{cases}$$

In der allgemeinen Gleichung 15) setze man $x = \frac{\pi}{2}$ und dann $x$ statt $y$. Für das unendliche Product führe man $z_2$ ein, definirt durch die Gleichung 10) des § 11. Setzt man zur Vereinfachung:

$$20) \quad \prod_{r=1}^{r=\infty} \left( \frac{1+q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}} \cdot \frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}} \right)^2 = Q_1,$$

so ist:

$$21) \quad z_2 Q_1 = 1 + 4 \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{q^s}{1+q^{2s}} \cos 2sx.$$

Die unendlichen Producte $Q$ und $Q_1$ lassen sich leicht durch Reihen ausdrücken. Setzt man in der ersten Gleichung 19) $x = \frac{1}{2}\pi$, in der zweiten $x = 0$, so erhält man die beiden Gleichungen:

22) $$Q = \sum_1^\infty (-1)^{s-1} \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}}, \quad Q = \sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1+q^{2s-1}}.$$

Die Gleichung 21) giebt für $x = 0$:

23) $$Q_1 = 1 + 4 \sum_1^\infty \frac{q^s}{1+q^{2s}}.$$

Die Gleichungen 19) und 21) enthalten die Entwicklungen der elliptischen Functionen nach den Sinus und Cosinus der ungraden und graden Vielfachen des Bogens $x$. Man könnte hier versucht sein, direct die Lehre der trigonometrischen Reihen von *Lagrange* und *Fourier* anzuwenden und so ohne Zuhülfenahme der unendlichen Producte die bemerkten Reihen zu entwickeln. Dieser Gedanke ist von *Schlömilch* in den „Abhandlungen d. K. Sächsischen Gesellsch. der Wissenschaft" t. IV p. 397—430 ausgeführt worden, es sind die Logarithmen der elliptischen Functionen durch trigonometrische Reihen dargestellt und nachher durch Differentiation und Transformation aus diesen Reihen die obigen Resultate hergeleitet. Der eingeschlagene Weg enthält manche Betrachtungen, welche sich hier nicht wohl in Kürze reproduciren lassen.

Die Gleichungen 19) und 21), in unwesentlich verschiedener Form, hat zuerst *Jacobi* aufgestellt (Fund. p. 101), ebenso die Gleichungen 15), 16) und 17) in § 10. (Fund. p. 99).

## § 13. Die Quadrate und Producte der elliptischen Functionen in Form unendlicher Reihen.

Für die Verification der bisher gefundenen Resultate ist die Bildung der Quadrate der in 19) und 21) des § 12 angeführten Reihen nöthig. Diese Darstellung hat zuerst *Jacobi* (Fund. p. 109) unternommen und zwar zur genaueren Untersuchung der von *Legendre* betrachteten elliptischen Integrale, welche Anwendung dieser Reihen auch später gemacht werden soll.

Man setze:

1) $$z_1 Q = \sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1+q^{2s-1}} \cos(2s-1)x = \frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos x + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\cos 3x + \ldots$$

$$11)\quad F(x+\frac{i}{2}\log q) = \prod_{1}^{\infty}(1-q^{2r}e^{2xi})(1-q^{2r-2}e^{-2xi})$$

$$= (1-e^{-2xi})\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2r}e^{2xi})(1-q^{2r}e^{-2xi})$$

$$= 2ie^{-xi}\sin x\prod_{1}^{\infty}(1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}),$$

$$12)\quad F(x+\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q) = 2e^{-xi}\cos x\prod_{1}^{\infty}(1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}).$$

Für $x=0$ giebt die letzte Gleichung:

$$13)\qquad F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q\right) = 2\prod_{1}^{\infty}(1+q^{2r})^2.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 8) bis 13) lassen sich die Gleichungen 15), 16) und 17) des § 10 anf folgende Weise darstellen:

$$14)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{e^{xi}}{i}\cdot\dfrac{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q\right)}\dfrac{F(x-\frac{i}{2}\log q)}{F(x)}, \\ \cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} = e^{xi}\dfrac{F(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q\right)}\dfrac{F(x+\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q)}{F(x)}, \\ \Delta\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi} = \dfrac{F(0)}{F\left(\frac{\pi}{2}\right)}\dfrac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{F(x)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 14) zeigen, dass man eine beliebige der vier Functionen

$$F(x),\ F\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ F(x-\frac{i}{2}\log q),\ F(x+\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}\log q),$$

als fundamentale Function nehmen kann, mit deren Hülfe sich die elliptischen Functionen durch Aenderungen des Arguments als Quotienten darstellen lassen. Es ist daher von Interesse, eine Function $F(x)$, definirt durch die Gleichung 8), genauer zu untersuchen. Eine solche Untersuchung führt durch Auflösung des unendlichen Products auf eine Reihe, deren ebenso einfache wie

eigenthümliche Form *Jacobi* zu Resultaten geführt hat, welche zu den glänzendsten und productivsten Entdeckungen dieses grossen Mathematikers gehören.

Ohne an den Gleichungen 14) etwas zu ändern, kann man statt $F(x)$ den Ausdruck $C.F(x)$ nehmen, wo $C$ in Beziehung auf $x$ constant ist. Da die Darstellung durch Hinzufügung einer solchen Constanten etwas an Einfachheit gewinnt, so soll statt $F(x)$ der folgende Ausdruck zu Grunde gelegt werden:

$$f(x) = \prod_1^\infty (1-q)^{2r} \prod_1^\infty (1-2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}).$$

## § 15. Entwickelung eines unendlichen Products in eine Reihe. Der Ursprung der Theta-Functionen.

Es sei:

1) $$\varphi(z) = (1+qz)(1+q^3z)(1+q^5z)\ldots = \prod_1^\infty (1+q^{2r-1}z).$$

Denkt man sich rechts die Multiplication ausgeführt, so ist auch

2) $$\varphi(z) = A_0 + A_1 z + \ldots = \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s z^s.$$

Setzt man in 1) $q^2z$ statt $z$, so folgt:

$$\varphi(q^2z) = (1+q^3z)(1+q^5z)\ldots.$$

Diese Gleichung mit $1+qz$ multiplicirt, reproducirt rechts nach 1) $\varphi(z)$; man erhält:

$$(1+qz)\varphi(q^2z) = \varphi(z).$$

Nimmt man die Entwickelung 2), so lässt sich die vorstehende Gleichung schreiben:

$$(1+qz)(A_0+A_1q^2z+\ldots+A_{n-1}q^{2n-2}z^{n-1}+A_nq^{2n}z^n+\ldots) = A_0+A_1z+\ldots+A_nz^n+\ldots$$

Die Vergleichung der Factoren von $z^n$ giebt:

$$A_nq^{2n} + A_{n-1}q^{2n-1} = A_n,$$

oder:

2) $$A_n = \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n}} A_{n-1}.$$

Für $z=0$ ist nach 1) $\varphi(0)=1$. Die Gleichung 2) giebt dann $A_0=1$. Mittelst der Recursionsformel 2) erhält man:

3) $$A_n = \frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}.$$

Man setze mit *Jacobi:*

4) $$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots} = 1 + \frac{z}{1-qz}B_1 + \frac{z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}B_2 + \ldots$$

Wird $qz$ statt $z$ gesetzt, die so erhaltene Gleichung mit $\frac{1}{1-qz}$ multiplicirt, so bleibt die linke Seite der Gleichung 4) unverändert, es folgt dann:

5)

$$1 + \frac{z}{1-qz}B_1 + \frac{z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}B_2 + \frac{z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}B_3 + \ldots$$
$$= \frac{1}{1-qz} + \frac{qz}{(1-qz)(1-q^2z)}B_1 + \frac{q^2z^2}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}B_2 + \ldots$$

Da nun allgemein:

$$\frac{1}{1-q^mz} = 1 + \frac{q^mz}{1-q^mz},$$

so lässt sich die rechte Seite der Gleichung 5) auch schreiben:

$$1 + \frac{qz}{1-qz} + \frac{qz}{1-qz}\left(1 + \frac{q^2z}{1-q^2z}\right)B_1 + \frac{q^2z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}\left(1 + \frac{q^3z}{1-q^3z}\right)B_2 + \ldots.$$
$$= 1 + \frac{qz}{1-qz}(1+B_1) + \frac{q^2z^2}{(1-qz)(1-q^2z)}(B_2+qB_1) + \frac{q^3z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)}(B_3+q^2B_2) + \ldots.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der linken Seite der Gleichung 5), so erhält man zur Bestimmung von $B_1, B_2 \ldots\ldots$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} q\,(B_1+1) &= B_1, \quad \text{oder} \quad (1-q)B_1 = q, \\ q^2(B_2+q\,B_1) &= B_2, \qquad\quad (1-q^2)B_2 = q^3B_1, \\ q^3(B_3+q^2B_2) &= B_3, \qquad\quad (1-q^3)B_3 = q^5B_2, \\ &\ldots\ldots \qquad\qquad \ldots\ldots \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben:

$$B_1 = \frac{q}{1-q},\quad B_2 = \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)},\quad B_3 = \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)},\ \cdots$$

allgemein:

$$B_n = \frac{q^{n^2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^n)}.$$

Die Gleichung 4) wird hierdurch:

$$\frac{1}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots} = 1 + \frac{q}{1-q}\cdot\frac{z}{1-qz} + \frac{q^4}{(1-q)(1-q^2)}\cdot\frac{z^2}{(1-qz)(1-q^2z)} + \frac{q^9}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}\cdot\frac{z^3}{(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)} + \ldots.$$

In der vorstehenden Gleichung setze man $q^2$ statt $q$, darauf $z = q^{2n}$, es folgt dann:

$$\frac{1}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})(1-q^{2n+6})\ldots} = 1 + \frac{q^2}{1-q^2}\cdot\frac{q^{2n}}{1-q^{2n+2}} + \frac{q^{2\cdot 4}}{(1-q^2)(1-q^4)}\cdot\frac{q^{4n}}{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+4})} + \ldots.$$

Diese Gleichung multiplicirt man auf beiden Seiten mit:

$$\frac{q^{n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}.$$

Der allgemeine Term auf der rechten Seite ist dann:

$$\frac{q^{2\cdot m^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})}\cdot\frac{q^{2nm+n^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n+2m})} = \frac{q^{m^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2m})}\cdot\frac{q^{(n+m)^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n+2m})}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich unter Anwendung der in Gleichung 3) gebrauchten Bezeichnung einfacher durch $A_m\, A_{n+m}$ ausdrücken. Da $A_0 = 1$, so erhält man einfach:

$$6)\quad \frac{q^{n^2}}{\prod_1^\infty(1-q^{2r})} = A_0A_n + A_1A_{n+1} + \ldots. = \sum_{s=0}^{s=\infty} A_s\, A_{n+s}.$$

Setzt man in 2) $z = e^{2xi}$ und $xz = e^{-2xi}$, bildet das Product von:

$$\varphi(e^{2xi}) = A_0 + A_1\, e^{2xi} + A_2\, e^{4xi} + \ldots.,$$
$$\varphi(e^{-2xi}) = A_0 + A_1\, e^{-2xi} + A_1\, e^{-4xi} + \ldots.,$$

so ist der Factor von $e^{2nxi} + e^{-2nxi} = 2\cos 2nx$ gleich

$$A_0 A_{n-1} + A_1 A_{n+1} + \ldots = \sum_0^\infty A_s A_{n+s}$$

d. i. nach 6)

$$\frac{q^{n^2}}{\Pi(1-q^{2r})}.$$

Man erhält so:

$$\varphi(e^{2xi})\varphi(e^{-2xi}) = \frac{1}{\Pi(1-q^{2r})}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos 2nx\right].$$

Setzt man links für $\varphi(z)$ seinen Werth in Form eines unendlichen Products aus 1), führt die Multiplication je zweier Factoren:

$$(1 + q^{2r-1}e^{2xi})(1 + q^{2r-1}e^{-2xi}) = 1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2},$$

aus, so erhält man schliesslich:

$$7)\quad \prod_{r=1}^{r=\infty}(1-q^{2r})\prod_1^\infty(1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}) = 1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\cos 2nx.$$

Vertauscht man $x$ mit $\frac{\pi}{2} - x$, so folgt leicht:

8)

$$\prod_1^\infty(1-q^{2r})\prod_1^\infty(1-q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}) = 1 + 2\sum_1^\infty(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx.$$

In der Gleichung 7) setze man $2\cos 2nx = e^{2nxi} + e^{-2nxi}$, vertausche $x$ mit $x - \frac{i}{2}\log q$, multiplicire die so erhaltene Gleichung mit $q^{\frac{1}{4}}e^{xi}$. Es wird dann:

$$9)\quad 2q^{\frac{1}{4}}\cos x\prod_1^\infty(1-q^{2r})\prod_1^\infty(1+2q^{2r})\cos 2x + q^{4r}) = q^{\frac{1}{4}}e^{xi}.$$

$$+ \sum_1^\infty q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)xi} + \sum_1^\infty q^{(n-\frac{1}{2})^2}e^{-(2n-1)xi}$$

$$= \sum_1^\infty q^{(n-\frac{1}{2})^2}e^{(2n-1)xi} + \sum_1^\infty q^{(n-\frac{1}{2})^2}e^{-(2n-1)xi}$$

$$= 2\sum_1^\infty q^{(n-\frac{1}{2})^2}\cos(2n-1)x.$$

Vertauscht man in der vorstehenden Gleichung $x$ mit $\frac{\pi}{2} - x$, so ist endlich:

$$10)\quad 2q^{\frac{1}{4}}\sin x\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2r})\prod_{1}^{\infty}(1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r})=$$

$$2\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{(n-\frac{1}{2})^2}\sin(2n-1)x.$$

Die im Vorhergehenden befolgte Entwickelung eines unendlichen Products in eine Reihe, wie dieselbe in den Gleichungen 4) und 6) enthalten ist, rührt von *Jacobi* her. (Fund. p. 180.) Auf p. 145 der „Fundamenta" wird zuerst das Product auf der linken Seite der Gleichung 7), später auf pag. 172 auch das Product auf der linken Seite der Gleichung 10), durch eine functionale Bezeichnung als besonders bemerkenswerthe Function hervorgehoben. Auf pag. 183, fast am Ende des Werks, definirt *Jacobi* zwei Functionen $\Theta$ und $H$ auf folgende Weise:

$$11)\quad \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x\ldots.$$

$$=1+2\sum_{1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nx,$$

$$12)\quad H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)=2q^{\frac{1}{4}}\sin x-2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x\ldots.$$

$$=2\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{(n-\frac{1}{2})^2}\sin(2n-1)x.$$

Die beiden Functionen $\Theta$ und $H$ sind die unendlichen Reihen, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen 7) und 10) vorkommen, durch einfache Vertauschung von $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$ erhält man die Reihen auf den rechten Seiten der Gleichungen 8) und 9). Die in den Gleichungen 11) und 12) vorkommenden Bezeichnungen haben den Nachtheil, dass dieselben sehr unbequem sind und auch das Argument $\frac{2Kx}{\pi}$ zu complicirt ist, namentlich bei Rechnungen mit derartigen Functionen, bei denen man in die Lage kommt, Functionszeichen und Argument sehr häufig schreiben zu müssen. Dieses hat später *Jacobi* bewogen in seinen Vorträgen über die Theorie der elliptischen Functionen sich einer einfacheren Bezeichnung zu bedienen und jede der in den Gleichungen 7) bis 10) vorkommenden Reihen mit einer besonderen Bezeichnung zu ver-

sehen, statt sich auf die beiden in den Gleichungen 11) und 12) bemerkten Bezeichnungen zu beschränken. In Folge der gewählten Bezeichnung „$\vartheta$“ heissen die Reihen, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen 7) bis 10) vorkommen, „Theta-Functionen“ ($\vartheta$-Functionen). Man kann diese Reihen leicht in etwas anderer Form schreiben, welche geeignet ist, den Zusammenhang dieser Reihen unter einander mit geringen Rechnungen darzuthun. Setzt man $2\cos y = e^{yi} + e^{-yi}$, so ist:

$$1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx = 1 + \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} e^{2nxi} + \sum_{1}^{\infty} q^{n^2} e^{-2nxi}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{n^2} e^{2nxi} + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} e^{-2nxi}.$$

In der ersten Summe rechts nehme man $n = m$, in der zweiten Summe $n = -m$, es durchläuft dann $m$ alle positiven und alle negativen ganzen Zahlen. Die Vereinigung beider Summen giebt:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} q^{m^2} e^{2mxi}.$$

Auf diese Weise lassen sich die rechten Seiten der Gleichungen 7) bis 10) auf folgende Art darstellen:

$$13) \quad \begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi}, & \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mxi}, \\ \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi}, & \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi}. \end{cases}$$

Diese Summen nehmen eine etwas übersichtlichere Form an, wenn man $q = p^4$ setzt. Da $q = e^{\log q}$, so ist auch:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{m^2 . \log q + 2mxi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{am^2 + 2bm},$$

wenn zur Abkürzung $\log q = a$ und $xi = b$ gesetzt wird. Man kann den vorstehenden Ausdruck dahin verallgemeinern, dass in der Summe:

$$14) \quad S = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{am^2 + 2bm + c}$$

$a$, $b$ und $c$ beliebige reelle oder complexe Grössen sind. Setzt man $a = \alpha + \beta i$, so ist das Verhältniss zweier successiven Terme der Summe $S$:

$$\frac{e^{a(n+1)^2 + 2b(n+1) + c}}{e^{an^2 + 2bn + c}} = e^{(2n+1)a + b}$$

$$= e^{(2n+1)\alpha + b}[\cos(2n+1)\beta + i\sin(2n+1)\beta].$$

Ist nun $\alpha$ negativ, so hat der vorstehende Ausdruck Null zur Gränze, wenn $n$ unbegränzt zunimmt. Die in 14) aufgestellte Reihe $S$ ist also immer convergent, wenn der reelle Theil von $a$ negativ ist, welche endlichen Werthe auch $b$ und $c$ haben mögen, es kann $b$ reell, imaginär oder complex sein. Die Quantität $c$ kommt nicht weiter in Betracht, da $e^c$ gemeinschaftlicher Factor aller Terme der Reihe $S$ ist. Der Einfachheit halber werde $c = 0$ gesetzt. Lässt man in der Gleichung 14) $a$ und $b$ variiren, so lassen sich Reihen herstellen, in denen das summirende Element nur grade oder ungrade ist, die Terme der Reihe abwechselnd positiv oder negativ sind, wobei die Reihe mit einem constanten Factor multiplicirt erscheint. Man überzeugt sich leicht von den folgenden Relationen:

$$\sum e^{am^2 + 2bm} = \sum (-1)^m e^{am^2 + 2m(b + \frac{1}{2}\pi i)}$$

$$= e^{\frac{1}{4}a - b} \sum e^{\frac{a}{4}(2m+1)^2 + (b - \frac{1}{2}a)(2m+1)}$$

$$= i e^{\frac{1}{4}a - b} \sum (-1)^m e^{\frac{a}{4}(2m+1)^2 + (b - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\pi i)(2m+1)}.$$

Diese Reihen sind die in 13) aufgestellten Reihen, nur in etwas veränderter Schreibweise.

Reihen von der Form der in 13) und 14) aufgestellten Reihen, d. h. Reihen von Exponentialgrössen, bei welchen das summirende Element im Exponenten in der ersten und in der zweiten Potenz erscheint, hat *Jacobi* einer eingehenden Untersuchung unterworfen und hat in Beziehung auf Relationen zwischen derartigen Reihen die Fundamente zu einer ebenso interessanten wie wichtigen Theorie, der Theorie der Theta-Functionen, gelegt. Die Lehre der elliptischen Functionen erscheint als eine Folgerung der Lehre der

In dem Quadrate $(z_1 Q)^2$ setze man:

$$\cos(2r-1)x\cos(2s-1)x = \tfrac{1}{2}\cos 2(r+s-1)x + \tfrac{1}{2}\cos 2(r-s)x.$$

Der Factor von $\cos 2nx$ besteht aus zwei Reihen, einer endlichen, durch Summation der Argumente und einer unendlichen für eine constante Differenz der Argumente gleich $2n$. Bezeichnet man diesen Factor durch $B_n$, so ist:

$$B_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{q}}{1+q}\frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\frac{\sqrt{q^{2n-3}}}{1+q^{2n-3}} + \ldots + \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}}\frac{\sqrt{q}}{1+q}\right]$$
$$+ \frac{\sqrt{q}}{1+q}\frac{\sqrt{q^{2n+1}}}{1+q^{2n+1}} + \frac{\sqrt{q^3}}{1+q^3}\frac{\sqrt{q^{2n+3}}}{1+q^{2n+3}} + \ldots.$$

oder kürzer:

$$2)\quad B_n = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\frac{q^{\frac{2n-2r+1}{2}}}{1+q^{2n-2r+1}} + \sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\frac{q^{\frac{2n+2r-1}{2}}}{1+q^{2n+2r-1}}$$
$$= \frac{1}{2}q^n\sum_{r=1}^{r=n}\frac{1}{1+q^{2r-1}}\frac{1}{1+q^{2n-2r+1}} + q^n\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})(1+q^{2n+2r-1})}$$

Es ist nun identisch:

$$\frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})(1+q^{2n+2r-1})} = \frac{1}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} - \frac{q^{2n+2r-1}}{1+q^{2n+2r-1}}\right).$$

Legt man $r$ alle ganzzahligen Werthe von 1 bis $\infty$ bei, so erhält man:

$$3)\qquad \sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})(1+q^{2n+2r-1})} =$$
$$\frac{1}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \ldots + \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} + \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}} + \ldots.\right\}$$
$$- \frac{1}{1-q^{2n}}\left\{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}} + \ldots.\right\}$$
$$= \frac{1}{1-q^{2n}}\left\{\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \ldots. + \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right\}.$$

Die identische Gleichung:

$$\frac{1}{1+q^{2r-1}}\frac{1}{1+q^{2n-2r+1}} = \left(1 - \frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} - \frac{q^{2n-2r+1}}{1+q^{2n-2r+1}}\right)\frac{1}{1-q^{2n}}$$

giebt:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{1-q^{2r-1}} \cdot \frac{1}{1-q^{2n-2r+1}} =$$

$$\frac{n}{1-q^{2n}} - \frac{2}{1-q^{2n}}\left(\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \ldots + \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung 3) reducirt sich der Ausdruck für $B_n$ in 2) einfach auf:

$$B_n = \frac{1}{2} \frac{n q^n}{1-q^{2n}}.$$

Der von $x$ unabhängige Term in $(z_1 Q)^2$ ist nach 2):

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}.$$

Man erhält so, wenn $n$ statt $r$ gesetzt wird:

$$4) \quad (z_1 Q)^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n q^n \cos 2nx}{1-q^{2n}},$$

wo:

$$5) \quad Q = \sqrt{q} \prod_{r=1}^{n=\infty} \left(\frac{1-q^{4r}}{1-q^{4r-2}}\right)^2.$$

Geht $q$ in $-q$ und $x$ in $\frac{\pi}{2} - x$ über, so geht $z_1$ über in $z$. Nach 5) geht dann $Q^2$ über in $-Q^2$, es folgt aus 4):

$$6) \quad (z Q)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{n q^n \cos 2nx}{1-q^{2n}}.$$

Setzt man in 4) $x = 0$, in 5) $x = \frac{\pi}{2}$, also $z = 1$, $z_1 = 1$, so erhält man für $Q^2$ die beiden Gleichungen:

$$2Q^2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{n q^n}{1-q^{2n}},$$

$$2Q^2 = \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2} - \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n n q^n}{1-q^{2n}}.$$

Durch Addition folgt:

$$7) \quad 4Q^2 = \sum_{1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2} + \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right) + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(2n-1) q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

Die Gleichungen 4) und 6) addirt geben:

$$8)\quad 2(z^2+z_1^2)\,Q^2 = \sum_1^\infty\left(\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right).$$

Für $x=0$ folgt:

$$9)\quad 2Q^2 = \sum_1^\infty\left(\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right).$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung 7), so ist:

$$10)\quad Q^2 = \sum_1^\infty\frac{(2n-1)\,q^{2n-1}}{1-q^{4n-2}}.$$

Bildet man das Quadrat der Gleichung:

$$11)\quad z_2 Q_1 = 1+4\sum_1^\infty\frac{q^s}{1+q^{2s}}\cos 2sx,$$

so ergiebt sich als Factor von $\cos 2nx$ die folgende Summe:

$$\frac{8q^n}{1+q^{2n}}+8\left(\frac{q}{1+q^2}\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-2}}+\frac{q^2}{1+q^4}\frac{q^{n-2}}{1+q^{2n-4}}+\ldots+\frac{q^{n-1}}{1+q^{2n-2}}\frac{q}{1+q^2}\right)$$
$$+16\left(\frac{q}{1+q^2}\frac{q^{n+1}}{1+q^{2n+2}}+\frac{q^2}{1+q^4}\frac{q^{n+2}}{1+q^{2n+4}}+\ldots\right),$$

oder kürzer:

$$\frac{8q^n}{1+q^{2n}}+8\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\frac{q^{n-r}}{1+q^{2n-2r}}+16\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}}.$$

Es ist nun:

$$\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\sum_1^\infty\left(\frac{q^{2r}}{1+q^{2r}}-\frac{q^{2n+2r}}{1+q^{2n+2r}}\right)$$
$$= \frac{q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^4}{1+q^4}+\ldots+\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right).$$

$$\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\frac{q^{n-r}}{1+q^{2n-2r}} = \frac{q^n}{1-q^{2n}}\sum_{r=1}^{r=n-1}\left(1-\frac{q^r}{1+q^{2r}}-\frac{q^{2n-2r}}{1+q^{2n-2r}}\right)$$
$$= \frac{(n-1)\,q^n}{1-q^{2n}}-\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\left(\frac{q^2}{1+q^2}+\frac{q^4}{1+q^4}+\ldots+\frac{q^{2n-2}}{1+q^{2n-2}}\right).$$

Durch Vereinigung der vorstehenden Resultate reducirt sich der Factor von $\cos 2nx$ auf:

$$\frac{8q^n}{1+q^{2n}}+\frac{8(n-1)\,q^n}{1-q^{2n}}+\frac{16q^n}{1-q^{2n}}\cdot\frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}.$$

Durch Verbindung des ersten und dritten Terms wird die vorstehende Summe einfacher:

$$\frac{8n\,q^n}{1-q^{2n}}.$$

Die Gleichung 11) giebt folglich:

$$12)\quad (z_2 Q_1)^2 = 1 + 8\sum_1^\infty \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2 + 8\sum_1^\infty \frac{nq^n \cos 2nx}{1-q^{2n}}.$$

Da $z_2 = 1$ für $x = 0$, so erhält man aus 12):

$$13)\quad Q_1^2 = 1 + 8\sum_1^\infty \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2 + 8\sum_1^\infty \frac{nq^n}{1-q^{2n}}.$$

Eliminirt man zwischen den Gleichungen 6) und 12) die Summe:

$$\sum \frac{nq^n}{1-q^{2n}} \cos 2nx,$$

so erhält man zwischen $z$ und $z_2$ die algebraische Relation:

$$14)\quad (z_2 Q_1)^2 + 16(zQ)^2 = 1 + 8\sum_1^\infty \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

Für $x = 0$ folgt hieraus:

$$15)\quad Q_1^2 = 1 + 8\sum_1^\infty \left(\frac{q^n}{1+q^{2n}}\right)^2 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}.$$

Subtrahirt man die Gleichung 9) von der Gleichung 8), so ist:

$$16)\quad z_1^2 + z^2 = 1.$$

Subtrahirt man die Gleichung 15) von der Gleichung 14), dividirt durch $Q_1^2$, so ist:

$$z_2^2 + 16\left(\frac{Q}{Q_1}\right)^2 z^2 = 1,$$

oder zur Abkürzung:

$$17)\quad 4\,\frac{Q}{Q_1} = k$$

gesetzt:

$$18)\quad z_2^2 + k^2 z^2 = 1.$$

Nimmt man $x = \frac{\pi}{2}$, so giebt die vorstehende Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 1) und 10) des § 11:

$$19)\quad \prod_1^\infty \left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^8 + k^2 = 1.$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar, dass $k^2$ ein ächter Bruch ist.

Setzt man die Werthe von $Q$ und $Q_1$ aus den Gleichungen 18) und 20) des § 12 in die Gleichung 17), so erhält man zur Bestimmung von $k$ auch folgende Gleichung:

$$20) \qquad 4\sqrt{q}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\right)^4 = k.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $k$ wesentlich positiv ist, folglich bezeichnet $k$ einen positiven, ächten Bruch. Durch Substitution des Werths von $k$ aus 20) in die Gleichung 19) „sequitur aequatio identica satis abstrusa“:

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots.]^8 + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots.]^8$$
$$= [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots.]^8. \qquad \text{(Fund. p. 90.)}$$

Bildet man das Product der beiden Gleichungen:

$$21) \begin{cases} z_1 Q = \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1+q^{2s-1}} \cos(2s-1)x, \\ z_2 Q_1 = 1 + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{q^s}{1+q^{2s}} \cos 2sx, \end{cases}$$

bezeichnet durch $C_{2n+1}$ den Factor von $\cos(2n+1)x$, so ist:

$$C_{2n+1} = \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+q^{2n+1}}$$
$$+ 2\left(\frac{q}{1+q^2}\,\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1+q^{2n-1}} + \frac{q^2}{1+q^4}\,\frac{q^{\frac{2n-3}{2}}}{1+q^{2n-3}} + \ldots. + \frac{q^n}{1+q^{2n}}\,\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\right)$$
$$+ 2\left(\frac{q}{1+q^2}\,\frac{q^{\frac{2n+3}{2}}}{1+q^{2n+3}} + \frac{q^2}{1+q^4}\,\frac{q^{\frac{2n+5}{2}}}{1+q^{2n+5}} + \ldots\right)$$
$$+ 2\left[\frac{q^{\frac{1}{2}}}{1+q}\,\frac{q^{n+1}}{1+q^{2n+2}} + \frac{q^{\frac{3}{2}}}{1+q^3}\,\frac{q^{n+2}}{1+q^{2n+4}} + \ldots\right],$$

oder kürzer:

$$C_{2n+1} = \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+q^{2n+1}} + 2\sum_{r=1}^{r=n}\frac{q^r}{1+q^{2r}}\,\frac{q^{\frac{2n-2r+1}{2}}}{1+q^{2n-2r+1}}$$
$$+ 2\sum_{r=1}^{r=\infty}\left(\frac{q^r}{1+q^{2r}}\,\frac{q^{\frac{2n+2r+1}{2}}}{1+q^{2n+2r+1}} + \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\,\frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}}\right).$$

Man findet leicht durch Zerlegung:

$$\sum_1^\infty \left( \frac{q^r}{1+q^{2r}} \frac{q^{\frac{2n+2r+1}{2}}}{1+q^{2n+2r+1}} + \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}} \frac{q^{n+r}}{1+q^{2n+2r}} \right)$$

$$= \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1+q^{2n+1}} \sum_1^\infty \left( \frac{q^{2r}}{1+q^{2r}} - \frac{q^{2n+2r+1}}{1+q^{2n+2r+1}} + \frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} - \frac{q^{2n+2r}}{1+q^{2n+2r}} \right)$$

$$= \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left[ \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \ldots + \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \right.$$

$$\left. + \frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \ldots + \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}} \right].$$

Es ist ferner:

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{q^r}{1+q^{2r}} \frac{q^{\frac{2n-2r+1}{2}}}{1+q^{2n-2r+1}} =$$

$$= \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \sum_1^n \left( 1 - \frac{q^{2r}}{1+q^{2r}} - \frac{q^{2n-2r+1}}{1+q^{2n-2r+1}} \right)$$

$$= \frac{nq^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} - \frac{q^{n+\frac{1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \left[ \frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \ldots + \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \right.$$

$$\left. + \frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{1+q^3} + \ldots + \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \right].$$

Die Vereinigung der vorhergehenden Summen giebt:

$$C_{2n+1} = \frac{q^{\frac{2n+1}{2}}}{1+q^{2n+1}} + \frac{2nq^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}} + \frac{2q^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}} \cdot \frac{q^{2n+1}}{1+q^{2n+1}}.$$

Durch Vereinigung des ersten und dritten Terms reducirt sich dieser Ausdruck auf:

$$C_{2n+1} = \frac{(2n+1)q^{\frac{2n+1}{2}}}{1-q^{2n+1}}.$$

Nimmt man wieder $s$ statt $n$ als summirendes Element, so geben die Gleichungen 21):

$$22) \quad z_1 z_2 Q_1 Q_2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(2s-1)q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \cos(2s-1)x.$$

Man kann noch ähnliche Ausdrücke für $z z_2 Q Q_1$ und $z z_1 Q^2$ aufstellen, da dieselben sich indessen kürzer finden lassen mittelst

der folgenden Entwicklungen, so möge diese Darstellung hier unterbleiben.

## § 14. Verification der Reihen für die elliptischen Functionen. Besondere Darstellung der Zähler und Nenner der unendlichen Producte.

Die Zusammenstellung der Gleichungen 1), 16), 18) und 24) des vorhergehenden § giebt:

$$1) \quad z.Q = \sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \sin(2s-1)x,$$

$$2) \quad z_1^2 + z^2 = 1, \qquad z_2^2 + k^2 z^2 = 1,$$

$$3) \quad z_1 z_2 Q Q_1 = \sum_1^\infty \frac{(2s-1)q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \cos(2s-1)x.$$

Man nehme $z_1$ und $z_2$ positiv, ersetze die Gleichungen 2) durch die folgenden:

$$4) \quad z_1 = \sqrt{1-z^2}, \quad z_2 = \sqrt{1-k^2z^2}.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichungen kann man leicht umgekehrt $x$ durch $z$ ausdrücken, der hierbei befolgte Weg, sowie die Herleitung der Gleichung 3) sind wesentlich zuerst von *Heine* angegeben worden, nämlich die unendlichen Producte in Reihen aufzulösen und diese Reihen zu verificiren.

Wegen der Gleichung 1) ist:

$$Q\frac{dz}{dx} = \sum_1^\infty \frac{(2s-1)q^{\frac{2s-1}{2}}}{1-q^{2s-1}} \cos(2s-1)x.$$

Die Gleichung 3) wird hierdurch einfacher:

$$\frac{dz}{dx} = Q_1 z_1 z_2,$$

d. i. nach 4):

$$5) \quad \frac{dz}{dx} = Q_1\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)},$$

wo $k$ ein positiver, ächter Bruch ist. Da für $x = 0$ auch $z = 0$, so giebt die Gleichung 5) integrirt, wenn die Integrationsvariabele durch $t$ bezeichnet wird:

$$6) \qquad \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = Q_1 x.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ ist aber $z = 1$. Die Gleichung 6) giebt folglich:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = Q_1 \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Bezeichnet man das links stehende Integral wieder durch $K$, so ist $K = Q_1 \frac{\pi}{2}$. Für diesen Werth von $Q_1$ wird die Gleichung 6):

$$7) \qquad \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \frac{2Kx}{\pi}.$$

Die vorstehende Gleichung führt wieder auf die Definition von $z$ in Function von $x$, wie die in § 6 gegebene, d. h. man kommt umgekehrt auf dieselbe Integralgleichung zurück, welche den Ausgangspunkt der bisherigen Untersuchungen bildete. Die Gleichungen 4) und 7) geben:

$$z = \operatorname{sin\,am} \frac{2Kx}{\pi}, \quad z_1 = \operatorname{cos\,am} \frac{2Kx}{\pi}, \quad z_2 = \operatorname{\Delta\,am} \frac{2Kx}{\pi}.$$

Durch diese Gleichungen ist die Richtigkeit der unendlichen Producte 15), 16) und 17) des § 10 bewiesen.

Eine aufmerksame Betrachtung der Zähler und des gemeinschaftlichen Nenners dieser Producte zeigt, dass dieselben sich sämmtlich aus einer Function durch Aenderung des Arguments herleiten lassen. Setzt man nämlich:

$$8) \qquad F(x) = \prod_{r=1}^{r=\infty} (1 - 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}),$$

so ist:

$$9) \qquad F(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \prod_{1}^{\infty} (1 + 2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}).$$

Für $x = 0$ erhält man aus 8) und 9):

$$10) \qquad F(0) = \prod (1 - q^{2r-1})^2, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \prod (1 + q^{2r-1})^2.$$

Setzt man in den Gleichungen 8) und 9) $x - \frac{i}{2}\log q$ statt $x$, so gehn dieselben über in:

Theta-Functionen, eine Folgerung, welche im Folgenden nach dem Vorgange von *Jacobi* kurz angemerkt werden soll. Diese Darstellung nimmt in der Hinsicht keinen unnöthigen Raum in Anspruch, als die zu entwickelnden Gleichungen zwischen Theta-Functionen nicht nur für die Lehre der elliptischen Functionen und Integrale wesentlich sind, sondern die Theta-Functionen für verschiedene Zweige der Mathematik von grosser Bedeutung sind. Der von *Jacobi* eingeschlagene Weg ist später in zwei bemerkenswerthen Abhandlungen weiter verfolgt worden, indem statt der einfachen Summe $S$ der Gleichung 14) eine Doppelsumme von der Form:

$$\sum\sum e^{am^2+a_1m_1^2+2bmm_1+2cm+2c_1m_1+g}$$

zu Grunde gelegt wurde, in welcher $a$, $a_1$, $b$, $\boldsymbol{c}$, $c_1$ und $g$ beliebige Quantitäten und $m$, $m_1$ summirende Elemente sind, welche unabhängig von einander alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe annehmen. Die Betrachtungen einer Doppelsumme von der obigen Form führte auf Functionen von zwei Variabeln und vier Perioden, zu Functionen, welche nach *Jacobi*'s Vorschlag „*Abelsche Functionen*" heissen. Die beiden oben erwähnten Arbeiten, welche zuerst in hervorragender Weise ein ganz neues Gebiet der Analysis erschlossen haben, sind die folgenden:

*Göpel:* Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Crelle, Journ. t. 35 p. 277—312.

*Rosenhain:* Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe. Mémoires présentés par divers savants. (Savants étrangers) t. XI, p. 361—468. Paris 1851.

Auszüge aus der zweiten Abhandlung in Briefen an *Jacobi* enthält Crelle Journ. t. 40 p. 319—360. In der Einleitung zu seiner Abhandlung hat *Rosenhain* einige Resultate aus der Theorie der Theta-Functionen nach *Jacobi* aufgestellt.

Es muss hier mit Rücksicht auf weitere Ausdehnungen der

in 14) aufgestellten Reihe $S$ und ihre Anwendungen in der allgemeinen Theorie der *Abelschen* Functionen bei diesen Andeutungen bleiben. Die allgemeine Theorie, das Werk der bedeutendsten neueren Mathematiker, wie *Weierstrass*, *Riemann*, *Hermite* u. A. erfordert weitere Untersuchungen, welche ausserhalb des Gebiets dieser Vorträge liegen.

---

# Fünfter Abschnitt.

## § 16. Die Theta-Functionen. Beziehungen zwischen denselben.

Im Folgenden werde unter $q$ ein positiver, ächter Bruch verstanden, oder allgemeiner, eine Exponentialgrösse von der Form:

$$e^{a+bi},$$

wo $a$ und $b$ wesentlich reelle, positive Quantitäten sind. Die Variabele $x$ kann jeden beliebigen, reellen, imaginären oder complexen Werth annehmen. Dieses vorausgesetzt, werden die vier Reihen, welche unter 13) in § 15 aufgestellt sind, „*Theta-Functionen*“ genannt und nach *Jacobi* auf folgende Art bezeichnet:

$$1)\quad \vartheta(x,q) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mxi} = 1 + 2\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^r q^{r^2} \cos 2rx$$

$$= 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x + 2q^{16}\cos 8x \ldots.$$

$$2)\quad \vartheta_1(x,q) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi}$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^r q^{(r-\frac{1}{2})^2}\sin(2r-1)x$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}}\sin x - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5x \ldots.$$

$$3)\quad \vartheta_2(x,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi} = 2\sum_{1}^{\infty} q^{(r-\frac{1}{2})^2}\cos(2r-1)x$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}}\cos x + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + 2x^{\frac{25}{4}}\cos 5x + \ldots.$$

$$4)\quad \vartheta_3(x,q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{r^2} \cos 2rx$$

$$= 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + 2q^{25} \cos 10x + \ldots.$$

Diese vier $\vartheta$-Functionen sind von den beiden Argumenten $x$ und $q$ abhängig, behält $q$ im Laufe einer Rechnung denselben Werth, so soll $q$ unter dem Functionszeichen nicht mit angemerkt werden, also einfach $\vartheta(x)$ statt $\vartheta(x,q)$ gesetzt werden. Es werde vorläufig $x$ reell genommen.

Die Functionen $\vartheta$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ sind grade Functionen von $x$, die Function $\vartheta_1$ ändert mit $x$ ihr Zeichen.

Aus den Gleichungen 1) bis 4) ergeben sich unmittelbar die folgenden Gleichungen, in denen $n$ eine ganze positive Zahl bezeichnet:

$$\vartheta\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3(x), \quad \vartheta_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_2(x),$$

$$\vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta(x), \quad \vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\vartheta_1(x).$$

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta(x+n\pi) = \vartheta(x), & \vartheta\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \vartheta_3(x), \\ \vartheta_3(x+n\pi) = \vartheta_3(x), & \vartheta_3\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \vartheta(x), \\ \vartheta_1(x+n\pi) = (-1)^n\vartheta_1(x), & \vartheta_1\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n\vartheta_2(x), \\ \vartheta_2(x+n\pi) = (-1)^n\vartheta_2(x), & \vartheta_2\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}\vartheta_1(x). \end{cases}$$

Die Gleichungen 5) zeigen, was auch unmittelbar aus der Definition der Theta-Functionen hervorgeht, dass dieselben periodisch sind.

Setzt man in der Gleichung 1) $x + \frac{i}{2}\log q$ statt $x$, so folgt:

$$\vartheta\left(x+\frac{i}{2}\log q\right) = \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2} e^{2m(x+\frac{i}{2}\log q)i} =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2-m} e^{2mxi} = q^{-\frac{1}{4}} e^{xi} \sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{(m-\frac{1}{2})^2} e^{(2m-1)xi}.$$

Da $m$ alle reellen ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt, so kann man in der letzten Summe rechts $m+1$ statt $m$ setzen, dann folgt:

$$\vartheta(x+\frac{i}{2}\log q) = -q^{\frac{1}{4}}e^{xi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2m+1)xi},$$

d. i. in Folge der Gleichung 2):

$$\vartheta(x+\frac{i}{2}\log q) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\vartheta_1(x).$$

Nimmt man hierin $-i$ statt $i$, so ist:

$$\vartheta(x-\frac{i}{2}\log q) = iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta_1(x).$$

Ganz auf dieselbe Art folgt:

$$\vartheta_3(x\pm\frac{i}{2}\log q) = q^{-\frac{1}{4}}e^{\pm xi}\vartheta_2(x).$$

Die Gleichung 2) giebt $x+\frac{i}{2}\log q$ statt $x$ gesetzt:

$$\vartheta_1(x+\frac{i}{2}\log q) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2m+1)(x+\frac{i}{2}\log q)i}$$

$$= -iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{m^2}e^{2mxi},$$

d. i. nach 1):

$$\vartheta_1(x+\frac{i}{2}\log q) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta(x).$$

Ebenso ist:

$$\vartheta_2(x)+\frac{i}{2}\log q) = q^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta_3(x).$$

Die Zusammenstellung der vorhergehenden Resultate giebt:

6)
$$\begin{cases} \vartheta(x+\frac{i}{2}\log q) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta_1(x), \\ \vartheta_1(x+\frac{i}{2}\log q) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta(x), \\ \vartheta_2(x+\frac{i}{2}\log q) = q^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta_3(x), \\ \vartheta_3(x+\frac{i}{2}\log q) = q^{-\frac{1}{4}}e^{xi}\vartheta_2(x). \end{cases}$$

Vertauscht man in den vorstehenden Gleichungen $x$ mit $x+\frac{i}{2}\log q$, so folgt:

$$\vartheta(x+i\log q) = -q^{-1}e^{2xi}\vartheta(x),\quad \vartheta_2(x+i\log q) = q^{-1}e^{2xi}\vartheta_2(x),$$
$$\vartheta_1(x+i\log q) = -q^{-1}e^{2xi}\vartheta_1(x),\quad \vartheta_3(x+i\log q) = q^{-1}e^{2xi}\vartheta_3(x).$$

Aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 6) leitet man die folgenden ab, in welchen $m$ eine ganze Zahl bezeichnet:

$$7)\quad \begin{cases} \vartheta(x+mi\log q) = (-1)^m q^{-m^2}e^{2mxi}\vartheta(x), \\ \vartheta_1(x+mi\log q) = (-1)^m q^{-m^2}e^{2mxi}\vartheta_1(x), \\ \vartheta_2(x+mi\log q) = \quad q^{-m^2}e^{2mxi}\vartheta_2(x), \\ \vartheta_3(x+mi\log q) = \quad q^{-m^2}e^{2mxi}\vartheta_3(x). \end{cases}$$

$$8)\quad \begin{cases} \vartheta(x+\frac{2m+1}{2}i\log q) = (-i)^{2m+1}q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}\cdot\vartheta_1(x), \\ \vartheta_1(x+\frac{2m+1}{2}i\log q) = (-i)^{2m+1}q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}\cdot\vartheta(x), \\ \vartheta_2(x+\frac{2m+1}{2}i\log q) = \quad q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}\cdot\vartheta_3(x), \\ \vartheta_3(x+\frac{2m+1}{2}i\log q) = \quad q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}\ \vartheta_2(x). \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen 5), 7) und 8) lassen sich drei der Theta-Functionen immer durch die vierte ausdrücken. Wegen der Complication der Argumente ist es indessen vortheilhafter, sich verschiedener Bezeichnungen zu bedienen.

Es ist $\vartheta_1(x+n\pi) = (-1)^n\vartheta_1(x)$. Nimmt man $-x$ statt $x$, so folgt wegen $\vartheta_1(-x+n\pi) = -\vartheta_1(x-n\pi)$:

$$\vartheta_1(x-n\pi) = (-1)^n\vartheta_1(x).$$

Bedeutet also $n$ eine beliebige ganze Zahl, so ist allgemein:

$$\vartheta_1(x+n\pi) = (-1)^n\vartheta_1(x).$$

Vertauscht man in der ersten Gleichung 8) $x$ mit $x+n\pi$, so folgt, da $e^{n\pi i} = (-1)^n$,:

$$\vartheta(x+n\pi+\frac{2m+1}{2}i\log q) = (-i)^{2m+1}q^{-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}e^{(2m+1)xi}\vartheta_1(x).$$

Nimmt man hierin $x=0$, so verschwindet die rechte Seite, man erhält:

$$8) \quad \vartheta(n\pi + \frac{2m+1}{2} i \log q) = 0.$$

Analog lassen sich die Werthe des Arguments finden, für welche die drei anderen Theta-Functionen verschwinden. Man findet ohne Schwierigkeit mittelst der Gleichungen 5), 7) und 8):

$$10) \quad \begin{cases} \vartheta_1(n\pi + mi \log q) = 0, \\ \vartheta_2(\frac{2n+1}{2}\pi + mi \log q) = 0, \\ \vartheta_3(\frac{2n+1}{2}\pi + \frac{2m+1}{2} i \log q) = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen 7) zeigen, dass die vier Theta-Functionen durch Zunahme des Arguments um ein ganzzahliges Multiplum von $i \log q$ in sich zurückkehren, multiplicirt mit einem gewissen Factor. Der Quotient zweier Theta-Functionen behält durch eine solche Aenderung des Arguments, abgesehn vom Zeichen, denselben Werth. Da die Theta-Functionen an sich periodische Functionen sind, so folgt, dass die Quotienten derselben doppelt periodische Functionen sind. Dieses folgt auch durch Vergleichung der Theta-Functionen mit reellen und imaginären Argumenten, ein Verfahren, welches sich leicht auf die Lehre von den allgemeinen Theta-Functionen übertragen lässt.

## § 17. Vergleichung der Theta-Functionen mit reellen und imaginären Argumenten.

Die Theta-Functionen mit imaginärem Argument lassen sich, wie zuerst *Jacobi* (Fund. p. 161) gezeigt hat, wieder auf Theta-Functionen reduciren, in welchen das Argument reell ist, die durch $q$ bezeichnete Quantität ändert hierbei ihren Werth, so dass dieselbe unter dem Functionszeichen mit angemerkt werden muss.

Die einfachste Methode, Theta-Functionen mit imaginärem Argument zu entwickeln, rührt von *Jacobi* her und ist zuerst von *Rosenhain* mitgetheilt worden (Savants étrangers. t. XI p. 396).

Da $\log q = e^{\log q}$, so lässt sich die Gleichung 4) des § 16 auch auf folgende Art schreiben:

$$\vartheta_3(x,\ q) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{m^2 \log q + 2mxi} = e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\left(m + \frac{xi}{\log q}\right)^2 \log q}$$

oder $xi$ statt $x$ gesetzt:

$$\vartheta_3(xi,\ q) = e^{-\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\left(m - \frac{x}{\log q}\right)^2 \log q}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$1)\quad \vartheta_3(xi,\ q).e^{\frac{x^2}{\log q}} = \varphi(x)$$

und zur Abkürzung $\log \frac{1}{q} = a$, wo also $a$ wesentlich positiv ist, so folgt:

$$2)\quad \varphi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(m + \frac{x}{a}\right)^2}.$$

Setzt man rechts $-x$ statt $x$ und $-m$ statt $m$, so bleibt die rechte Seite ungeändert. Es ist also $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Die Gleichung 2) giebt $x + a$ statt $x$ gesetzt:

$$\varphi(x+a) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(m+1+\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Setzt man rechts einfach $m$ statt $m + 1$, so ergiebt sich wieder die rechte Seite der Gleichung 2), d. h. es ist $\varphi(x + a) = \varphi(x)$. Die Function $\varphi(x)$ ist also eine grade und eine periodische Function von $x$ mit der Periode $a$. Nach der Reihe von *Fourier* (Note II) kann man also setzen:

$$3)\quad \varphi(x) = A_0 + 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} A_r \cos\frac{r\pi x}{a}.$$

Setzt man hierin $x + a$ statt $x$, so folgt:

$$\varphi(x+a) = A_0 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^r A_r \cos\frac{r\pi x}{a}.$$

Diese Gleichung von der Gleichung 3) abgezogen, giebt:

$$4\sum_{1}^{\infty} A_{2r-1} \cos\frac{(2r-1)\pi x}{a} = 0.$$

Da $x$ variabel ist, so kann diese Gleichung nur allgemein für $A_{2r-1} = 0$ bestehn. An Stelle der Gleichung 3) tritt die folgende:

$$4) \qquad \varphi(x) = A_0 + 2 \sum_1^\infty A_{2r} \cos \frac{2r\pi x}{a}.$$

In dieser Gleichung ist:

$$aA_{2r} = \int_0^a \varphi(u) \cos \frac{2r\pi u}{a} du.$$

Substituirt man rechts unter dem Integralzeichen für $\varphi(u)$ seinen Werth aus 2), so folgt:

$$aA_{2r} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \int_0^a e^{-a\left(\frac{u}{a}+m\right)^2} \cos \frac{2r\pi u}{a} du,$$

oder $\frac{u}{a} = w$ gesetzt:

$$A_{2r} = \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-a(w+m)^2} \cos 2r\pi w \, dw =$$

d. i.

$$5) \qquad A_{2r} = \int_0^1 e^{-aw^2} \cos 2r\pi w \, dw + \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_0^1 e^{-a(w+m)^2} \cos 2r\pi w \, dw$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=\infty} \int_0^1 e^{-a(m-w)^2} \cos 2r\pi w \, dw.$$

Die Summationen rechts lassen sich leicht auf die Gränzen übertragen. Man setze im ersten Integrale auf der rechten Seite der Gleichung 5) $w = v$. Für $m + w = v$ folgt:

$$\int_0^1 e^{-a(m+w)^2} \cos 2r\pi w \, dw = \int_m^{m+1} e^{-av^2} \cos 2r\pi v \, dv.$$

Nimmt man $m - w = v$, so folgt:

$$\int_0^1 e^{-a(m-w)^2} \cos 2r\pi w \, dw = \int_{m-1}^m e^{-av^2} \cos 2r\pi v \, dv.$$

Durch diese Transformationen nimmt die Gleichung 5) folgende Form an:

$$A_{2r} = \int_0^1 e^{-av^2} \cos 2r\pi v \, dv + \sum_1^\infty \int_m^{m+1} e^{-av^2} \cos 2r\pi v \, dv$$

$$+ \sum_1^\infty \int_{m-1}^m e^{-av^2} \cos 2r\pi v \, dv.$$

$$= \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \ldots.$$
$$+ \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^3 + \ldots.$$

Durch Zusammenziehnng der Gränzen folgt:

$$A_{2r} = 2\int_0^\infty e^{-av^2}\cos 2r\pi v\, dv = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{r^2\pi^2}{a}}.$$

Die Gleichung 4) wird hierdurch:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\left(1 + 2\sum_1^\infty e^{-\frac{r^2\pi x}{a}}\cos\frac{2r\pi x}{a}\right).$$

Setzt man:

$$\varphi(x) = \vartheta_3(xi, q)e^{\frac{x^2}{\log q}}$$

und $a = \log\frac{1}{q}$, so wird:

$$6)\quad \vartheta_3(xi, q)e^{\frac{x^2}{\log q}} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\left(1 + 2\sum_1^\infty e^{-\frac{r^2\pi^2}{\log\frac{1}{q}}}\cos\frac{2r\pi x}{\log\frac{1}{q}}\right)$$

Der Einfachheit halber führe man folgende Bezeichnung ein:

$$7)\quad \log q \log q' = \pi^2.$$

Die Gleichung 6) wird dann einfacher:

$$\vartheta_3(xi, q).e^{\frac{x^2}{\log q}} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\left(1 + 2\sum_1^\infty q'^{r^2}\cos\frac{2r\pi x}{\log\frac{1}{q}}\right),$$

da nun:

$$1 + 2\sum_1^\infty q'^{r^2}\cos\frac{2r\pi x}{\log\frac{1}{q}} = \vartheta_3\left(\frac{\pi x}{\log\frac{1}{q}}, q'\right),$$

so ergiebt sich schliesslich die Fundamentalgleichung in der Theorie der Theta-Functionen:

$$8)\quad \vartheta_3(xi, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}.e^{\frac{x^2}{\log\frac{1}{q}}}\vartheta_3\left(\frac{\pi x}{\log\frac{1}{q}}, q'\right),$$

wo $q$ und $q'$ durch die Gleichung 7) verbunden sind. Vertauscht man in dieser Gleichung $x$ mit $xi$, so folgt:

$$9)\quad \vartheta_3(x,q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{-\frac{x^2}{\log\frac{1}{q}}}\, \vartheta_3\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right).$$

Eine andere Methode, welche sich mit Hülfe der vielfachen Integrale verallgemeinern lässt, besteht darin, die Function $\vartheta_3(x,q)$ durch ein bestimmtes Integral darzustellen und auf dieses Integral ein Theorem von *Lejeune-Dirichlet* anzuwenden. Der zu befolgende Weg ist der umgekehrte, welchen *Jacobi* eingeschlagen hat.

In der Gleichung:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\left(\frac{rb}{a}\right)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2} \cos 2vbu\, du$$

setze man successive $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots v$, multiplicire die erhaltenen Gleichungen respective mit $1, 2\cos 2x, 2\cos 4x, \ldots. 2\cos 2vx$ und bilde die Summe sämmtlicher Producte. Man erhält so:

$$10)\quad \frac{\sqrt{\pi}}{a}\left[1 + 2e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 2x + 2e^{-4\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 4x + \ldots + 2e^{-v^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 2vx\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2}[1 + 2\cos 2bu \,.\, \cos 2x + \ldots + 2\cos 2vbu \cos 2vx]du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2}\left[\frac{1}{2} + \cos 2(bu+x) + \ldots. + \cos 2v(bu+x)\right]du$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2}\left[\frac{1}{2} + \cos 2(bu-x) + \ldots. + \cos 2v(bu-x)\right]du$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2}\frac{\sin(2v+1)(bu+x)}{\sin(bu+x)}du$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2u^2}\frac{\sin(2v+1)(bu-x)}{\sin(bu-x)}du.$$

Im ersten Integrale rechts setze man $bu + x = v$, im zweiten $bu - x = v$, die rechte Seite von 10) geht dann über in:

$$\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{v-x}{b}\right)^2}\frac{\sin(2v+1)v}{\sin v}dv + \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{v+x}{b}\right)^2}\frac{\sin(2v+1)v}{\sin v}dv$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-a^2\left(\frac{v-x}{b}\right)^2} + e^{-a^2\left(\frac{v+x}{b}\right)^2}\right]\frac{\sin(2v+1)v}{\sin v}dv.$$

Bringt man das rechts stehende Integral auf die Gränzen 0 und $\infty$, so wird die Gleichung 10):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left[1+2\sum_{r=1}^{r=\nu} e^{-r^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 2rx\right]$$

$$= \frac{1}{b}\int_{\vartheta}^{\infty}\left[e^{-a^2\left(\frac{v-x}{b}\right)^2}+e^{-a^2\left(\frac{v+x}{b}\right)^2}\right]\frac{\sin(2\nu+1)v}{\sin v}\,dv.$$

Lässt man in dieser Gleichung $\nu$ unbegränzt zunehmen, so folgt nach dem Theorem von *Lejeune-Dirichlet:*

$$\frac{\sqrt{\pi}}{a}\left[1+2\sum_{1}^{\infty} e^{-r^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 2rx\right]$$

$$= \frac{\pi}{b}\left[e^{-x^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}+\sum_{1}^{\infty}\left(e^{-a^2\left(\frac{r\pi-x}{b}\right)^2}+e^{-a^2\left(\frac{r\pi+x}{b}\right)^2}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{b}\,e^{-x^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}\left[1+\sum_{1}^{\infty}e^{-r^2\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}\left(e^{\frac{2r\pi x a^2}{b^2}}-\frac{2r\pi x a^2}{b^2}\right)\right].$$

Man dividire durch $\sqrt{\pi}$, multiplicire mit $a$ und setze rechts

$$e^{wi}+e^{-wi}=2\cos wi,$$

dann folgt:

$$1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-r^2\left(\frac{b}{a}\right)^2}\cos 2\nu x$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\pi a^2}{b^2}\right)}e^{-x^2\frac{b^2}{a^2}}\left[1+2\sum_{1}^{\infty}e^{-r^2\left(\frac{\pi a}{b}\right)^2}\cos 2r\frac{\pi x a^2 i}{b^2}\right].$$

Für $e^{-\frac{b^2}{a^2}}=q$ und $e^{-\pi^2\frac{a^2}{b^2}}=q'$ erhält man wieder die Gleichungen 7) und 9).

Für $x=0$ giebt die Gleichung 9):

$$\vartheta_3(0,q)=\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,\vartheta_3(0,q').$$

Da nun $\log q\,\log q'=\pi^2$, so ist $\sqrt{\pi}=\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}\log\frac{1}{q'}}$, setzt man statt der Theta-Functionen die entsprechenden Reihen, so folgt:

$$\sqrt[4]{\log\frac{1}{q}}\,.\,[1+2q+2q^4+2q^9+\ldots.]$$

$$= \sqrt[4]{\log\frac{1}{q'}}\,.\,[1+2q'+2q'^4+2q'^9+\ldots.].$$

Von dieser Gleichung behauptet *Abel* (Crelle Journ. t. 4 p. 93), dass *Cauchy* dieselbe zuerst in seinen „Exercices de mathématiques“ aufgestellt habe. Man findet dieselbe auch in der Abhandlung von *Poisson:* Sur les intégrales définies auf p. 420 des Cah. XIX (Tome XII, Paris 1823) des „Journ. de l'École Polyt.“. Die von *Poisson* befolgte Methode ist indess später als nicht ganz einwurfsfrei gefunden worden.*)

Die Gleichung 9) lässt sich auf folgende Weise schreiben:

$$11) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} q'^{m^2} e^{\frac{2m\pi x}{\log\frac{1}{q}}}.$$

Man setze hierin $\frac{\pi}{2} + x$ statt $x$, es folgt dann:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mxi} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q} + \frac{\pi^2}{4\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} q'^{m^2} e^{\frac{(2m-1)\pi x + m\pi^2}{\log\frac{1}{q}}}$$

oder rechts nach 7) $\frac{\pi^2}{\log q} = \log q'$ gesetzt:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mxi} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} q'^{(m-\frac{1}{2})^2} e^{\frac{(2m-1)\pi x}{\log\frac{1}{q}}}.$$

Vertauscht man in der Summe rechts $m$ mit $m+1$, so folgt:

$$12) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} e^{2mxi} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} q'^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{\frac{(2m+1)\pi x}{\log\frac{1}{q}}},$$

d. i.

$$13) \qquad \vartheta(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta_2\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right).$$

---

*) In der Abhandlung: „Sur les fonctions réciproques“ (Exercices de mathém. Seconde année. p. 156. Paris 1825) bemerkt *Cauchy*, dass er die Gleichung

$\sqrt{a}(1+2e^{-a^2}+2e^{-4a^2}+\ldots) = \sqrt{b}(1+2e^{-b^2}+2e^{-4b^2}+\ldots)$, wo $ab=\pi$, zuerst im Jahre 1817 im „Bulletin de la Société philomatique“ mitgetheilt habe. Die allgemeinere Gleichung:

$$\sqrt{a}(1+2e^{-a^2}\cos 2a\tau + 2e^{-4a^2}\cos 4a\tau + \ldots)$$
$$= \sqrt{b}(e^{-\tau^2} + e^{-(b-\tau)^2} + e^{-(b+\tau)^2} + \ldots)$$

findet sich bei *Poisson.*

In der Gleichung 11) setze man $x - \frac{i}{2}\log q$ statt $x$, hierdurch wird:

$$q^{-\frac{1}{4}}e^{-xi}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2m+1)xi}$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}-ix-\frac{1}{4}\log q}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q'^{m^2}e^{\frac{2m\pi x}{\log\frac{1}{q}}}$$

oder einfacher:

14) $$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2m+1)xi} = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q'^{m^2}e^{\frac{2m\pi x}{\log\frac{1}{q}}}.$$

Durch Einführung der Bezeichnung der Theta-Functionen lässt sich die vorstehende Gleichung schreiben:

15) $$\vartheta_3(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}}\,\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right).$$

In der Gleichung 14) vertausche man $x$ mit $\frac{\pi}{2}+x$. Die linke Seite geht dann über in $-\vartheta_1(x, q)$, es folgt:

$$-\vartheta_1(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}+\frac{\pi^2}{4\log q}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q'^{m^2}e^{\frac{(2m-1)\pi x+m\pi^2}{\log\frac{1}{q}}},$$

oder rechts nach 7) $\frac{\pi^2}{\log q} = \log q'$ gesetzt:

16) $$-\vartheta_1(y, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m q'^{(m-\frac{1}{2})^2}e^{\frac{(2m-1)\pi x}{\log\frac{1}{q}}}$$

Es ist nun:

$$\vartheta_1(z, p) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m p^{(m+\frac{1}{2})^2}e^{(2m+1)zi}.$$

Setzt man $zi$ statt $z$, in der Summe rechts $-m$ statt $m$, so wird:

$$\vartheta_1(zi, p) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^m p^{(m-\frac{1}{2})^2}e^{(2m-1)z}.$$

Die Gleichung 16) lässt sich also schreiben:

$$17) \qquad \vartheta_1(x, q) = -i \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right).$$

Die Zusammenstellung der Gleichungen 9), 13), 15) und 17) giebt:

$$18) \quad \begin{cases} \vartheta_3(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta_3\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right), \\ \vartheta(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta_2\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right), \\ \vartheta_2(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right), \\ \vartheta_1(x, q) = -i \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta_1\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right). \end{cases}$$

Für $x = 0$ reduciren sich die ersten drei Gleichungen auf:

$$19) \quad \begin{cases} \vartheta_3(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, \vartheta_3(0, q'), \\ \vartheta(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, \vartheta_2(0, q'), \\ \vartheta_2(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, \vartheta(0, q'), \end{cases}$$

wo $q$ und $q'$ durch die Gleichung $\log q . \log q' = \pi^2$ verbunden sind Die Gleichungen 18) und 19) finden sich, ihrem wesentlichen Inhalt. nach, in den Werken von *Gauss*, Band III, p. 436 angeführt. Es scheint, dass *Gauss* schon sehr lange, höchst wahrscheinlich schon gegen Ende des vorigen Jahrhunderts, die allgemeinen Gleichungen gekannt hat, wenn auch nach einer Notiz auf p. 294 der Herausgeber erst das Jahr 1808 glaubt annehmen zu dürfen. Auf alle

Fälle zeigt der Nachlass von *Gauss* über die elliptischen Functionen einen grossen und reichen Schatz von Entdekungen, der weit über ein halbes Jahrhundert hinaus der wissenschaftlichen Welt nur vom Hörensagen bekannt war.

Untersuchungen über allgemeinere Theta-Functionen mit Rücksicht auf reelle und imaginäre Argumente findet man bei *Meissel* (Crelle. Journ. t. 48 p. 324—331), *Thomae* (Die allgemeine Transformation der $\vartheta$-Functionen. Göttingen 1864), *Enneper* (Zeitschrift für Mathematik t. 12, p. 79—85).

## § 18. Das Multiplicationstheorem der Theta-Functionen.

In seinen Vorträgen über die Theorie der elliptischen Functionen hat *Jacobi* eine bemerkenswerthe Beziehung zwischen den Summen zweier Producte von je vier Theta-Functionen derselben Art, aber mit verschiedenen Argumenten, aufgestellt, welche als ein Fundamentaltheorem in der Lehre von den Reihen mit Exponenten zweiten Grades angesehen werden muss. Auf dieses Fundamentaltheorem hat *Jacobi* sowohl die Lehre von den elliptischen Functionen basirt, wie die Additionstheoreme der elliptischen Integrale von *Euler* und *Legendre*. In einem Briefe an *Hermite*, welcher in Crelle. Journ. t. 32, p. 176—181 (*Jacobi*. Werke I. p. 357) abgedruckt ist, hat *Jacobi* sein Theorem erwähnt. In einer Einleitung zu seiner grossen Abhandlung (Savants étr. t. XI. p. 371) hat *Rosenhain* den von *Jacobi* gegebenen Beweis mitgetheilt. Zu bemerken ist nur, dass dort die Bezeichnung $\vartheta$ in einer etwas verschiedenen Bedeutung von der hier gebrauchten auftritt.

Der Beweis von *Jacobi* beruht auf dem folgenden sehr einfachen algebraischen Satze:

„Sind die Quantitäten:

$$a,\ b,\ c,\ d;$$
$$a',\ b',\ c',\ d';$$

durch eins der Systeme von Gleichungen verbunden:

1)
$$\begin{aligned} a' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c+d), & a &= \tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+d'),\\ b' &= \tfrac{1}{2}(a+b-c-d), & b &= \tfrac{1}{2}(a'+b'-c'-d'),\\ c' &= \tfrac{1}{2}(a+b+c-d), & c &= \tfrac{1}{2}(a'-b'+c'-d'),\\ d' &= \tfrac{1}{2}(a-b-c+d). & d &= \tfrac{1}{2}(a'-b'-c'+d'), \end{aligned}$$

so ist:

$$2) \quad a^2+b^2+c^2+d^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2.$$

Bilden $a$, $b$, $c$, $d$ ein System von vier gleichzeitig graden oder ungraden Zahlen, so ist dieses auch mit $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ der Fall. Durchlaufen $a$, $b$, $c$, $d$ alle Systeme von vier gleichzeitig graden oder ungraden Zahlen, so durchlaufen $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ dieselben Zahlensysteme, nur in anderer Ordnung."

Die Gleichung 2) ist offenbar eine unmittelbare Folge der Gleichungen 1).

Was die Zahlensysteme betrifft, so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der obigen Behauptung durch die folgende Tabelle. Da alle Zahlen, positiv oder negativ, von einer der Formen $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$ sind, so lassen sich folgende Annahmen machen, in denen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ beliebige Zahlen sind.

| $a =$ | $b =$ | $c =$ | $d =$ |
|---|---|---|---|
| $4\alpha,$ | $4\beta,$ | $4\gamma,$ | $4\delta,$ |
| $4\alpha,$ | $4\beta,$ | $4\gamma,$ | $4\delta+2,$ |
| $4\alpha,$ | $4\beta,$ | $4\gamma+2,$ | $4\delta+2,$ |
| $4\alpha,$ | $4\beta+2,$ | $4\gamma+2,$ | $4\delta+2,$ |
| $4\alpha+2,$ | $4\beta+2,$ | $4\gamma+2,$ | $4\delta+2.$ |

Im Vorstehenden sind Systeme von vier graden Zahlen zusammengestellt, es ist selbstverständlich, dass $a$, $b$, $c$, $d$ unter einander permutirt werden können. Zur Abkürzung setze man:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha', \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta = \beta',$$
$$\alpha-\beta+\gamma-\delta = \gamma', \quad \alpha-\beta-\gamma+\delta = \delta'.$$

Mittelst der Gleichungen 1) findet man dann:

| $a' =$ | $b' =$ | $c' =$ | $d' =$ |
|---|---|---|---|
| $2\alpha',$ | $2\beta',$ | $2\gamma',$ | $2\delta',$ |
| $2\alpha'+1,$ | $2\beta'-1,$ | $2\gamma'-1,$ | $2\delta'+1,$ |
| $2\alpha'+2,$ | $2\beta'-2,$ | $2\gamma',$ | $2\delta',$ |
| $2\alpha'+3,$ | $2\beta'-1,$ | $2\gamma'-1,$ | $2\delta'-1,$ |
| $2\alpha'+4,$ | $2\beta',$ | $2\gamma',$ | $2\delta'.$ |

Sind $a$, $b$, $c$, $d$ gleichzeitig ungrade Zahlen, so kann man setzen:

| $a =$ | $b =$ | $c =$ | $d =$ |
|---|---|---|---|
| $4\alpha+1,$ | $4\beta+1,$ | $4\gamma+1,$ | $4\delta+1,$ |
| $4\alpha+1,$ | $4\beta+1,$ | $4\gamma+1,$ | $4\delta+3,$ |
| $4\alpha+1,$ | $4\beta+1,$ | $4\gamma+3,$ | $4\delta+3,$ |
| $4\alpha+1,$ | $4\beta+3,$ | $4\gamma+3,$ | $4\delta+3,$ |
| $4\alpha+3,$ | $4\beta+3,$ | $4\gamma+3,$ | $4\delta+3.$ |

Diesen Werthen entsprechen nach 1) folgende Werthe von $a'$, $b'$, $c'$, $d'$:

| $a' =$ | $b' =$ | $c' =$ | $d' =$ |
|---|---|---|---|
| $2\alpha'+2,$ | $2\beta',$ | $2\gamma',$ | $2\delta',$ |
| $2\alpha'+3,$ | $2\beta'-1,$ | $2\gamma'-1,$ | $2\delta'+1,$ |
| $2\alpha'+4,$ | $2\beta'-2,$ | $2\gamma',$ | $2\delta',$ |
| $2\alpha'+5,$ | $2\beta'-1,$ | $2\gamma'-1,$ | $2\delta'-1,$ |
| $2\alpha'+6,$ | $2\beta',$ | $2\gamma',$ | $2\delta'.$ |

Nimmt man z. B.: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 7$, so ist: $a' = 8$, $b' = -4$, $c' = -2$, $d' = 0$; umgekehrt folgt für $a = 8$, $b = -4$, $c = -2$, $d = 0$; $a' = 1$, $b' = 3$, $c' = 5$, $d' = 7$.

Durch eine leichte Transformation folgt:

$$\vartheta_3(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{m^2 \log q + 2mxi}$$

$$= e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(m\log q + xi)^2}{\log q}} = e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\left(\frac{2m}{2}\log q + xi\right)^2}{\log q}}.$$

Ebenso ist:

$$\vartheta_2(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi} = e^{\frac{x^2}{\log q}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{2m+1}{2}\log q + xi\right)^2}.$$

Nehmen $m$, $m'$, $m''$ und $m'''$ unabhängig von einander alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so ist:

3)
$$\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) = e^{\frac{w^2+x^2+y^2+z^2}{\log q}} \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma e^{\sigma},$$
$$\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) = e^{\frac{w^2+x^2+y^2+z^2}{\log q}} \Sigma\Sigma\Sigma\Sigma e^{\tau},$$

wo:

$$\sigma = \left(\frac{2m}{2}\log q + wi\right)^2 + \left(\frac{2m'}{2}\log q + xi\right)^2 + \left(\frac{2m''}{2}\log q + yi\right)^2 + \left(\frac{2m'''}{2}\log q + zi\right)^2,$$

$$\tau = \left(\frac{2m+1}{2}\log q + wi\right)^2 + \left(\frac{2m'+1}{2}\log q + xi\right)^2 + \left(\frac{2m''+1}{2}\log q + yi\right)^2 + \left(\frac{2m'''+1}{2}\log q + zi\right)^2.$$

In dem Exponenten $\sigma$ sind in den Quadraten die Factoren von $\frac{1}{2}\log q$ vier beliebige grade Zahlen, nämlich $2m$, $2m'$, $2m''$ und $2m'''$, in dem Exponenten $\tau$ sind die betreffenden Factoren vier gleichzeitig ungrade Zahlen.

Bildet man die Summe der Gleichungen 3), so kann man setzen:

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) =$$

$$4) \qquad e^{\frac{w^2+x^2+y^2+z^2}{\log q}} \Sigma' e^H,$$

wo:

$$5) \quad H = \left(\frac{a}{2}\log q + wi\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\log q + xi\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\log q + yi\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\log q + zi\right)^2,$$

und das Zeichen $\Sigma'$ sich auf alle Systeme von vier gleichzeitig graden oder ungraden Zahlen bezieht.

Mittelst der Gleichungen 1) und 2) lässt sich $H$ auf folgende Weise darstellen:

$$6) \quad H = \left[\frac{a+b+c+d}{2}\frac{\log q}{2} + \frac{w+x+y+z}{2}i\right]^2 + \left[\frac{a+b-c-d}{2}\frac{\log q}{2} + \frac{w+x-y-z}{2}i\right]^2 + \left[\frac{a-b+c-d}{2}\frac{\log q}{2} + \frac{w-x+y-z}{2}i\right]^2 + \left[\frac{a-b-c+d}{2}\frac{\log q}{2} + \frac{w-x-y+z}{2}i\right]^2$$

Man führe nun aus 1) die Quantitäten $a'$, $b'$, $c'$ und $d'$ ein, setze ferner zur Vereinfachung:

7) $$w' = \tfrac{1}{2}(w+x+y+z), \quad x' = \tfrac{1}{2}(w+x-y-z),$$
$$y' = \tfrac{1}{2}(w-x+y-z), \quad z' = \tfrac{1}{2}(w-x-y+z).$$

Der in 6) aufgestellte Ausdruck von $H$ nimmt dann folgende Form an:

8) $$H = \left(\frac{a'}{2}\log q + w'i\right)^2 + \left(\frac{b'}{2}\log q + x'i\right)^2$$
$$+ \left(\frac{c'}{2}\log q + yi\right)^2 + \left(\frac{d'}{2}\log q + z'i\right)^2.$$

Da $a'$, $b'$, $c'$ und $d'$ ebenfalls alle möglichen Systeme von vier graden oder ungraden Zahlen durchlaufen, und nach 7)

$$w^2+x^2+y^2+z^2 = w'^2+x'^2+y'^2+z'^2,$$

so lässt sich die rechte Seite der Gleichung 4) auch schreiben:

9) $$e^{w'^2+x'^2+y'^2+z'^2}\,\Sigma' e^H,$$

wo nun $H$ durch die Gleichung 8) bestimmt ist und sich wieder $\Sigma'$ auf alle Systeme von vier graden oder ungraden Zahlen $a'$, $b'$, $c'$ und $d'$ bezieht. In Folge der Gleichungen 1) und 2) ist aber der in 9) aufgestellte Ausdruck, unter Zuziehung von 8) gleich:

$$\vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z').$$

Man gelangt hierdurch zu dem folgenden:

Fundamental-Theorem:

*Sind die Argumente $w$, $x$, $y$, $z$ und $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ durch die Gleichungen verbunden:*

$$w' = \tfrac{1}{2}(w+x+y+z), \quad w = \tfrac{1}{2}(w'+x'+y'+z'),$$
$$x' = \tfrac{1}{2}(w+x-y-z), \quad x = \tfrac{1}{2}(w'+x'-y'-z'),$$
$$y' = \tfrac{1}{2}(w-x+y-z), \quad y = \tfrac{1}{2}(w'-x'+y'-z'),$$
$$z' = \tfrac{1}{2}(w-x-y+z), \quad z = \tfrac{1}{2}(w'-x'-y'+z'),$$

*so ist:*

$$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)$$
$$= \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z').$$

In dem oben erwähnten Briefe *Jacobi's* finden sich die Worte: „Dans un des premiers volumes du Journal de *M. Crelle*, j'ai donné des formules d'addition et de transformations conjointes, ressortantes de la multiplication seulement de deux $\Theta$. Ces formules font voir que l'on peut arriver par deux transformations

successives, non-seulement à la multiplication, mais encore aux formules de l'addition."

Man kann das von *Jacobi* bemerkte Verfahren der Multiplication zweier $\vartheta$-Functionen anwenden, um zu dem obigen Fundamentaltheorem zu gelangen. Da die sich ergebenden Gleichungen auch für andere Untersuchungen von Interesse sind, so möge bei der Wichtigkeit des Theorems noch eine zweite Ableitung desselben angemerkt werden. Bei diesem Verfahren ändert das zweite Argument $q$ seinen Werth, dasselbe muss also unter dem Functionszeichen mit angemerkt werden.

Aus den Definitionen:

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2} e^{2mxi}, \quad \vartheta_2(x, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(m+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi}$$

folgt:

$$10) \quad \begin{cases} \vartheta_3(x,q)\,\vartheta_3(y,q) = \sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2+n^2} e^{2mxi+2nyi} \\ \vartheta_2(x,q)\,\vartheta_2(y,q) = \sum\sum q^{(m+\frac{1}{2})^2+(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2m+1)xi+(2n+1)yi} \end{cases}$$

Durch andere Anordnung der Summation auf den rechten Seiten lassen sich wieder Producte von $\vartheta$-Functionen herstellen, in welchen $q$ durch $q^2$ ersetzt ist. Man setze:

$$11) \quad m' = \frac{m+n}{2}, \quad n' = \frac{m-n}{2}.$$

Die erste Gleichung 10) wird dann:

$$12) \quad \vartheta_3(x, q)\vartheta_3(y, q) = \sum\sum q^{2(m'^2+n'^2)} e^{2m'(x+y)i+2n'(x+y)i}$$

In Folge der Gleichungen 11) sind $m'$ und $n'$ ganze Zahlen, wenn $m$ und $n$ gleichzeitig grade oder ungrade sind, man hat dann $m' = r$, $n' = s$, wo $r$ und $s$ ganze Zahlen sind. Ist eine der Zahlen $m$ und $n$ grade, die andere ungrade, so haben $m'$ und $n'$ die Formen $r + \frac{1}{2}$, $s + \frac{1}{2}$. Unterscheidet man diese Fälle auf der rechten Seite der Gleichung 12), so folgt:

$$\vartheta_3(x, q)\,\vartheta_3(y, q) = \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \cdot \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} q^{2(r^2+s^2)} e^{2r(x+y)i+2s(x-y)i}$$

$$+ \sum_{r=-\infty}^{r=\infty} \sum_{s=-\infty}^{s=\infty} q^{2[(r+\frac{1}{2})^2+(s+\frac{1}{2})^2]} e^{(2r+1)(x+y)i+(2s+1)(x-y)i}$$

Die Doppelsummen rechts repräsentiren wieder Producte von Theta-Functionen, in welchen $q$ durch $q^2$ ersetzt ist, die vorstehende Gleichung lässt sich also auch auf folgende Art darstellen:

13) $$\vartheta_3(x, q)\vartheta_3(y, q) = \vartheta_3(x+y, q^2)\vartheta_3(x-y, q^2) + \vartheta_2(x+y, q^2)\vartheta_2(x-y, q^2).$$

Setzt man $x+y=u$, $x-y=v$, so giebt diese Gleichung:

14) $$\vartheta_3\left(\frac{u+v}{2}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{u-v}{2}, q\right) = \vartheta_3(u, q^2)\vartheta_3(v, q^2) + \vartheta_2(u, q^2)\vartheta_2(v, q^2).$$

Wendet man auf die zweite Gleichung 10) ähnliche Betrachtungen wie auf die erste an, so erhält man mittelst der Substitution 11):

$$\vartheta_2(x, q)\vartheta_2(y, q) = \sum q^{2[(m'+\frac{1}{2})^2+n'^2]} e^{(2m'+1)(x+y)i+2n'(x-y)i}$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{[(r+\frac{1}{2})^2+s^2]} e^{(2r+1)(x+y)i+2s(x-y)i}$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} q^{[r^2+(s+\frac{1}{2})^2]} e^{2r(x+y)i+(2s+1)(x-y)i}$$

d. h. es ist:

15) $$\vartheta_2(x, q)\vartheta_2(y, q) = \vartheta_2(x+y, q^2)\vartheta_3(x-y, q^2) + \vartheta_3(x+y, q^2)\vartheta_2(x-y, q^2).$$

Für $x+y=u$ und $x-y=v$ giebt die vorstehende Gleichung:

16) $$\vartheta_2\left(\frac{u+v}{2}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{u-v}{2}, q\right) = \vartheta_2(u, q^2)\vartheta_3(v, q^2) + \vartheta_3(u, q^2)\vartheta_2(v, q^2).$$

Mittelst der Gleichungen 14) und 16) beruht der Beweis des Fundamentaltheorems auf einer einfachen algebraischen Identität. Setzt man zur Abkürzung:

17) $$\begin{cases} a = \vartheta_3(x+y, q^2), & \alpha = \vartheta_2(x+y, q^2), \\ a' = \vartheta_3(x-y, q^2), & \alpha' = \vartheta_2(x-y, q^2), \\ b = \vartheta_3(w+z, q^2), & \beta = \vartheta_2(w+z, q^2), \\ b' = \vartheta_3(w-z, q^2), & \beta' = \vartheta_2(w-z, q^2), \end{cases}$$

so ist nach 13) und 15):

18) $$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = (a\alpha' + \alpha a')(bb' + \beta\beta') + (a\alpha' + a'\alpha)(b\beta' + b'\beta).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist auch gleich:

19) $$(ab + \alpha\beta)(a'b' + \alpha'\beta') + (a\beta + b\alpha)(a'\beta' + b'\alpha').$$

Nun ist nach 17):

20) $$ab + \alpha\beta = \vartheta_3(x+y, q^2)\vartheta_3(w+z, q^2) + \vartheta_2(x+y, q^2)\vartheta_2(w+z, q^2).$$

Unter Anwendung der Gleichung 14) folgt hieraus, $u = w + z$, $v = x + y$ gesetzt:

21) $$ab + \alpha\beta = \vartheta_3\left(\frac{w+x+y+z}{2}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{w-x-y+z}{2}, q\right).$$

Vertauscht man $y$ und $z$ respective mit $-y$ und $-z$, so ist analog:

22) $$a'b' + \alpha'\beta' = \vartheta_3\left(\frac{w+x-y-z}{2}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{w-x+y-z}{2}, q\right).$$

Nach 17) ist ferner:

$$a\beta + b\alpha = \vartheta_3(w+z, q^2)\vartheta_2(x+y, q^2) + \vartheta_2(w+z, q^2)\vartheta_3(x+y, q^2).$$

Unter Zuziehung der Gleichung 16) folgt hieraus:

23) $$a\beta + b\alpha = \vartheta_2\left(\frac{w+x+y+z}{2}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{w-x-y+z}{2}, q\right).$$

Vertauscht man hierin $y$ und $z$ mit $-y$ und $-z$, so folgt:

24) $$a'\beta' + b'\alpha' = \vartheta_2\left(\frac{w+x-y-z}{2}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{w-x+y-z}{2}, q\right).$$

Mittelst der Gleichungen 21) bis 24) lässt sich der in 19) aufgestellte Ausdruck durch $\vartheta$-Functionen mit dem zweiten Argument $q$ darstellen. Da dieser Ausdruck gleich ist der rechten Seite der Gleichung 18), so ergiebt sich durch Substitution unmittelbar das Fundamentaltheorem. Auf Gleichungen von der Form der Gleichungen 13) und 15) hat *Krusemark* nach einer Methode von *Eisenstein* einen Abriss der Theorie der elliptischen Functionen im Journal v. Crelle, t. 46, p. 189—236 basirt. Das Verfahren ist dem von *Jacobi* ganz ähnlich, nur weniger einfach.

Die Gleichungen 13) und 15) bilden einen sehr speciellen Fall eines allgemeinen Satzes von *Schröter*, von welchem bei Gelegenheit der Modulargleichungen die Rede sein wird.

## § 19. Anwendungen des Fundamental-Theorems. Die Theta-Functionen mit zusammengesetzten Argumenten.

Nach § 18) ist:

$$1) \quad \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z'),$$

$$2) \quad \begin{cases} w' = \frac{1}{2}(w+x+y+z), & y' = \frac{1}{2}(w-x+y-z), \\ x' = \frac{1}{2}(w+x-y-z), & z' = \frac{1}{2}(w-x-y+z). \end{cases}$$

Lässt man die Argumente $w$, $x$, $y$, $z$ um grade oder ungrade Multipla von $\frac{\pi}{2}$, $\frac{i}{2}\log q$, $\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$ zunehmen, so giebt die Gleichung 1) zu einer grossen Menge interessanter Relationen zwischen $\vartheta$-Functionen Veranlassung. Von diesen Relationen sollen nur die erwähnt werden, welche für die Theorie der elliptischen Functionen wesentlich sind. Die Zunahmen der Argumente $w$, $x$, $y$, $z$ sollen so gewählt werden, dass $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ um positive oder negative Multipla einer der drei Quantitäten $\frac{\pi}{2}$, $\frac{i}{2}\log q$, $\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$ zunehmen, also wieder auf Theta-Functionen mit dem zweiten Argument $q$ reductibel sind. Dieses ist natürlich nicht für alle Zunahmen der Fall, lässt man z. B. $w$ um $\frac{\pi}{2}$ zunehmen, so nehmen $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ sämmtlich um $\frac{\pi}{4}$ zu, Functionen von der Art wie:

$$\vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{4}\right), \quad \vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

lassen sich nicht durch die Functionen $\vartheta(x)$, $\vartheta_1(x)$, $\vartheta_2(x)$ und $\vartheta_3(x)$ ausdrücken, in welchen das zweite Argument $q$ unverändert geblieben ist. In dem folgenden System von Gleichungen ist die Herleitung jeder Gleichung angegeben. Zur Abkürzung ist gesetzt „in 1) $w+\pi$“, statt in der Gleichung 1) $w$ mit $w+\pi$ zu vertauschen, ebenso beziehen sich rechts $w'+\frac{\pi}{2}$, $x'+\frac{\pi}{2}$, $y'+\frac{\pi}{2}$, $z'+\frac{\pi}{2}$ auf die gleichzeitigen entsprechenden Zunahmen von $w'$, $x'$, $y'$ $z'$ um $\frac{\pi}{2}$ in Folge der Gleichungen 2). Aehnliches gilt für die übrigen Gleichungen.

## I.

1) $$\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) + \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) = \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x'\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z') + \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

In 1) $w+\pi$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}, y'+\frac{\pi}{2}, z'+\frac{\pi}{2}$.

2) $$\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) - \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) = \vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z') + \vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z').$$

In 1) $w+\frac{\pi}{2}, x+\frac{\pi}{2}, y+\frac{\pi}{2}, z+\frac{\pi}{2}$. $\quad w'+\pi$.

3) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z) + \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z) = \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z') - \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

In 3) $w+\pi$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}, y'+\frac{\pi}{2}, z'+\frac{\pi}{2}$.

4) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z) - \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z) = \vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z') - \vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z').$$

In 1) $w+\frac{\pi}{2}, x+\frac{\pi}{2}$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}$.

5) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) + \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) = \vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z') + \vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

In 5) $w+\pi$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}, y'+\frac{\pi}{2}, z'+\frac{\pi}{2}$.

6) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) - \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) - \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z') + \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z').$$

In 5) $y+\frac{i}{2}\log q, \quad z+\frac{i}{2}\log q, \qquad w'+\frac{i}{2}\log q, \quad x'-\frac{i}{2}\log q$.

7) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) + \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) = \vartheta_1(w')\,\vartheta_1(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z') + \vartheta(w')\,\vartheta(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

In 7) $w+\pi$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}, y'+\frac{\pi}{2}, z'+\frac{\pi}{2}$.

8) $$\vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) - \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) = \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta(y')\,\vartheta(z') + \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_1(y')\,\vartheta_1(z').$$

In 7) und 8) $w+\frac{\pi}{2}, x+\frac{\pi}{2}$. $\quad w'+\frac{\pi}{2}, x'+\frac{\pi}{2}$.

9) $$\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) + \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) = \vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z') + \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z').$$

10) $$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = \vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta(y')\vartheta(z') + \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z'),$$

In 7) und 8) $y+\frac{\pi}{2}$, $z+\frac{\pi}{2}$ $w'+\frac{\pi}{2}$, $x'-\frac{\pi}{2}$.

11) $$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z) = -\vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_2(y')\vartheta_2(z').$$

12) $$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) - \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z) = -\vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta(y')\vartheta(z') + \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z').$$

Die Summe der Gleichungen 9), 10), 11) und 12) giebt:

13) $$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) + \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_3(w')\vartheta_3(x')\vartheta_2(z')\vartheta_2(z') + \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z').$$

Die Summe der Gleichungen 11) und 12) von der Summe der Gleichungen 9) und 10) abgezogen giebt:

14) $$\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta_2(w')\vartheta_2(x')\vartheta_3(y')\vartheta_3(z') + \vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta(y')\vartheta(z').$$

In 1) $x+\frac{i}{2}\log q$, $y+\frac{\pi}{2}$, $z+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$.

$w'+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$, $x'-\frac{\pi}{2}$, $y'-\frac{i}{2}\log q$.

15) $$\vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z) = \vartheta_1(w')\vartheta(x')\vartheta_2(y')\vartheta_3(z') - \vartheta(w')\vartheta_1(x')\vartheta_3(y')\vartheta_2(z').$$

In 15) $w+\pi$.

16) $$\vartheta_3(w)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_1(z) - \vartheta_2(w)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta(z) = -\vartheta_2(w')\vartheta_3(x')\vartheta_1(y')\vartheta(z') + \vartheta_3(w')\vartheta_2(x')\vartheta(y')\vartheta_1(z').$$

Aus den Gleichungen 1) bis 4) von I. lassen sich vier Gleichungen herstellen, welche den Relationen zwischen den Argumenten $w$, $w'$ etc. analog sind. Man setze zur Abkürzung:

$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) = h, \quad \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = h_1,$$
$$\vartheta_2(w)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = h_2, \quad \vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) = h_3.$$

Für die Argumente $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ werden die entsprechenden Producte durch $h'$, $h'_1$, $h'_2$, $h'_3$ bezeichnet. Durch Verbindungen durch Addition und Subtraction geben die bemerkten Gleichungen:

$$h'_3 = \tfrac{1}{2}(h_3 + h_2 + h + h_1),$$
$$h'_2 = \tfrac{1}{2}(h_3 + h_2 - h - h_1),$$
$$h'_1 = \tfrac{1}{2}(h_3 - h_2 - h + h_1),$$
$$h' = \tfrac{1}{2}(h_3 - h_2 + h - h_1).$$

Legt man dem Argumente $w$ besondere Werthe bei, so lassen sich aus dem System I. Gleichungen herstellen zwischen Theta-Functionen mit zusammengesetzten Argumenten. Nimmt man z. B. $w = -(x+y+z)$, so ist $w' = 0$, $x' = -(y+z)$, $y' = -(x+z)$, $z' = -(x+y)$. Die Gleichung 2) von I. giebt dann:

$$\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) = \vartheta(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x+z)\vartheta(y+z).$$

Die rechte Seite bleibt ungeändert, wenn $x$, $y$, $z$ vertauscht werden mit $x+\frac{\pi}{2}$, $y+\frac{\pi}{2}$, $z+\frac{\pi}{2}$. Man gelangt so zu der folgenden Doppelgleichung:

II.

1) $$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\ &= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\ &= \vartheta(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x+z)\vartheta(y+z).\end{aligned}$$

In 1) $x+\frac{\pi}{2}$ statt $x$.

2) $$\begin{aligned}&\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z)\\ &= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z)\\ &= \vartheta(0)\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x+z)\vartheta(y+z).\end{aligned}$$

In 2) $y+\frac{i}{2}\log q$, $z-\frac{i}{2}\log q$ statt $y$, $z$.

3) $$\begin{aligned}&\vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\ &= \vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\ &= \vartheta(0)\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x+z)\vartheta(y+z).\end{aligned}$$

In 3) $x+\frac{\pi}{2}$ statt $x$.

4) $$\begin{aligned}&\vartheta_3(x+y+z)\vartheta_3(x)\vartheta_2(y)\vartheta_2(z) - \vartheta_2(x+y+z)\vartheta_2(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)\\ &= \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\\ &= \vartheta(0)\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x+z)\vartheta(y+z).\end{aligned}$$

Für $w = -(x+y+z)$ giebt die Gleichung 15) von I. analog der Gleichung 1) von II. zu folgender Doppelgleichung Veranlassung:

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(x+y+z)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_1(z) + \vartheta_2(x+y+z)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta(z) \\ 5)\quad &= -\vartheta(x+y+z)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_2(z) + \vartheta_1(x+y+z)\,\vartheta(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(z) \\ &= \vartheta(0)\,\vartheta_2(x+y)\,\vartheta_3(x+z)\,\vartheta_1(y+z). \end{aligned}$$

Die in II. aufgestellten Gleichungen lassen sich leicht vermehren, indem man z. B. Gleichungen aufstellt, bei denen die Constante $\vartheta(0)$ durch $\vartheta_2(0)$ oder $\vartheta_3(0)$ ersetzt ist. Da die betreffenden Gleichungen im Folgenden nicht zur Verwendung kommen, so sollen dieselben nicht weiter ausgeführt werden. Von grösserer Bedeutung wie die in II. enthaltenen Gleichungen, sind die Relationen zwischen Theta-Functionen mit den Argumenten $x+y$ und $x-y$.

In den Gleichungen 2) und 4) von I. setze man $w = -x$, $z = -y$, also $w' = 0$, $x' = 0$, $y' = -(x-y)$, $z' = -(x+y)$. Es folgt:

$$\vartheta_3(x)^2\,\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_2(x)^2\,\vartheta_2(y)^2 = \vartheta(0)^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y),$$
$$\vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(0)^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y).$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar:

$$6)\quad \vartheta_3(x)^2\,\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2 + \vartheta_2(x)^2\,\vartheta_2(y)^2.$$

Addirt man die Gleichungen 1) und 3) von I., so folgt:

$$\begin{aligned} &\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z) + \vartheta(w)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(z) + \vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z). \\ &+ \vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z) = 2\vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z'). \end{aligned}$$

Setzt man hierin $w = -x$, $z = -y$, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung 6):

## III.

$$\begin{aligned} 1)\quad &\vartheta_3(x)^2\,\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2 + \vartheta_2(x)^2\,\vartheta_2(y)^2 \\ &\vartheta_3(0)^2\,\vartheta_3(x+y)\,\vartheta_3(x-y). \end{aligned}$$

In 1) $x+\frac{\pi}{2}$ statt $x$.

$$\begin{aligned} 2)\quad &\vartheta(x)^2\,\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_2(x)^2\,\vartheta_1(y)^2 = \vartheta_3(x)^2\,\vartheta(y)^2 + \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_2(y)^2 \\ &\vartheta_3(0)^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y). \end{aligned}$$

In 1) und 2) $x + \frac{i}{2}\log q$ statt $x$.

3) $$\vartheta_2(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta(x)^2\vartheta_1(y)^2 = -\vartheta_1(x)^2\vartheta(y)^2 + \vartheta_3(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta_3(0)^2\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x-y).$$

4) $$\vartheta_1(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_3(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(x)^2\vartheta_2(y)^2 - \vartheta_2(x)^2\vartheta(y)^2 = \vartheta_3(0)^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

Aehnlich wie die Gleichungen 2), 3), 4) aus 1) folgen, ergeben sich im Nachstehenden immer aus der zuerst entwickelten Gleichung die drei folgenden. In der Gleichung 5) von I. setze man $w = -x$, $z = -y$, dann folgt:

$$\vartheta(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y).$$

Vertauscht man $x$ und $y$, so ergiebt sich folgende Doppelgleichung:

5) $$\vartheta(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta_3(x)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta_2(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y).$$

6) $$\vartheta_3(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_2(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta(x)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta(x+y)\vartheta(x-y).$$

7) $$-\vartheta_1(x)^2\vartheta_3(y)^2 + \vartheta(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta_2(x)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta_3(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x-y).$$

8) $$-\vartheta_2(x)^2\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_3(x)^2\vartheta_2(y)^2 = \vartheta_1(x)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

In der Gleichung 14) von I, setze man $w = -x$, $z = -y$, vertausche nachher $x$ mit $y$, wodurch die rechte Seite unverändert bleibt. Man findet dann:

9) $$\vartheta_3(x)^2\vartheta_2(y)^2 + \vartheta(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta_2(x)\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_1(x)^2\vartheta(y)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y).$$

10) $$\vartheta(x)^2\vartheta_2(y)^2 + \vartheta_3(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta_1(x)^2\vartheta_3(y)^2 + \vartheta_2(x)^2\vartheta(y)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta(x+y)\vartheta(x-y).$$

11) $$\vartheta_2(x)^2\vartheta_2(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta_3(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta(x)^2\vartheta(y)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta_2(x+y)\vartheta_2(x-y).$$

12) $$\vartheta_1(x)^2\vartheta_2(y)^2 - \vartheta_2(x)^2\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_3(x)^2\vartheta(y)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta_1(x+y)\vartheta_1(x-y).$$

Die vorstehenden zwölf Gleichungen gehören zu den Fundamentalgleichungen, durch welche die Theorie der Theta-Functionen mit der Lehre von den elliptischen Functionen in Zusammenhang gebracht werden kann.

Setzt man in den Gleichungen 1), 2) und 11) von III. $y = x$, so folgt:

IV.

1) $\vartheta_3(0)^3\vartheta_3(2x) = \vartheta_2(x)^4 + \vartheta_1(x)^4 = \vartheta(x)^4 + \vartheta_2(x)^4$,
2) $\vartheta_3(0)^2\vartheta(0)\,\vartheta(2x) = \vartheta_3(x)^2\vartheta(x)^2 + \vartheta_2(x)^2\vartheta_1(x)^2$,
3) $\vartheta_2(0)^3\vartheta_2(2x) = \vartheta_2(x)^4 - \vartheta_1(x)^4 = \vartheta_3(x)^4 - \vartheta(x)^4$.

Die Functionen $\vartheta$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ mit dem doppelten Argument lassen sich durch Functionen mit den einfachen Argumenten ausdrücken. Dieser Satz lässt sich noch erweitern, wenn man die Gleichungen IV. mit den Gleichungen II. combinirt.

Die Constanten $\vartheta(0)$ und $\vartheta_3(0)$ sind positiv, die rechten Seiten der Gleichungen 1) und 2) von IV. sind Summen von Quadraten. Hieraus folgt, dass $\vartheta_3(2x)$ und $\vartheta(2x)$, also auch $\vartheta_3(x)$ und $\vartheta(x)$ für reelle Werthe des Arguments $x$ immer positiv sind.

Nimmt man in den Gleichungen 1) bis 4) von III. $y = 0$, so erhält man lineare Gleichungen zwischen den Quadraten der vier Theta-Functionen, nämlich die folgenden:

V.

1) $\vartheta_3(0)^2\vartheta_3(x)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta(x)^2 + \vartheta_2(0)^2\vartheta_2(x)^2$,
2) $\vartheta_3(0)^2\vartheta(x)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta_3(x)^2 + \vartheta_2(0)^2\vartheta_1(x)^2$,
3) $\vartheta_3(0)^2\vartheta_2(x)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta_3(x)^2 - \vartheta(0)^2\vartheta_1(x)^2$,
4) $\vartheta_3(0)^2\vartheta_1(x)^2 = \vartheta_2(0)^2\vartheta(x)^2 - \vartheta(0)^2\vartheta_2(x)^2$.

Die vorstehenden Gleichungen repräsentiren zwei Gleichungen, da aus zwei derselben die beiden andern folgen. Mittelst der Gleichungen 2) und 4) lassen sich die Quadrate von $\vartheta_3(x)$ und $\vartheta_2(x)$ linear durch die Quadrate von $\vartheta(x)$ und $\vartheta_1(x)$ ausdrücken. Dividirt man die Gleichungen 2) und 4) durch $\vartheta(x)^2$, so erhält man leicht:

VI.

$$\left(\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\right)^2\left[1-\left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\right)^2\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2\right],$$

$$\left(\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\right)^2 = \left(\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\right)^2\left[1-\left(\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right)^2\right].$$

## § 20. Die Quotienten der Theta-Functionen, das Additionstheorem derselben. Die Constante $\vartheta_1'(0)$.

Für $x = 0$ reducirt sich die Gleichung V, 1) des vorhergehenden § auf:

1) $$\vartheta_3(0)^4 = \vartheta(0)^4 + \vartheta_2(0)^4$$

d. i.:

$$(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4 = (1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)^4 + 16\,(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{9}{4}}+q^{\frac{25}{4}}+\ldots)^4,$$

$$\left[1+2\sum_1^\infty q^{4m^2}+2\sum q^{(2m-1)^2}\right]^4 =$$

$$\left[1+2\sum_1^\infty q^{4m^2}-2\sum q^{(2m-1)^2}\right]^4 + 16\left[\sum q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\right]^4.$$

Man setze zur Abkürzung:

2) $$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k}, \qquad \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'}.$$

Die Gleichung 1) giebt dann:

3) $$k^2 + k'^2 = 1.$$

Führt man die Werthe von $k$ und $k'$, definirt durch die Gleichungen 2), in die Gleichungen VI von § 19 ein, so werden dieselben:

4) $$\frac{\vartheta_3(x)^2}{\vartheta(x)^2} = \frac{1}{k'}\left[1-k\frac{\vartheta_1(x)^2}{\vartheta(x)^2}\right], \qquad \frac{\vartheta_2(x)^2}{\vartheta(x)^2} = \frac{k}{k'}\left[1-\frac{1}{k}\,\frac{\vartheta_1(x)^2}{\vartheta(x)^2}\right].$$

In Folge der Gleichungen 4) lässt sich ein beliebiger Quotient zweier Theta-Functionen durch einen bestimmten Quotienten zweier derartiger Functionen ausdrücken. Da in Folge der zweiten Gleichung 4)

$$k > \frac{\vartheta_1(x)^2}{\vartheta(x)^2},$$

so kann man

5) $$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi$$

setzen. Die Gleichungen 4) werden dann einfacher:

6) $$\frac{\vartheta_3(x)^2}{\vartheta(x)^2} = \frac{1}{k'}(1-k^2\sin^2\varphi), \quad \frac{\vartheta_2(x)^2}{\vartheta(x)^2} = \frac{k}{k'}\cos^2\varphi.$$

Die Quadratwurzeln nehme man positiv; wird zur Abkürzung, wie schon bei früheren Gelegenheiten:

7) $$\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} = \Delta(\varphi)$$

gesetzt, so geben die Gleichungen 5) und 6):

8) $$\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi, \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cdot\cos\varphi, \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\Delta(\varphi)}{\sqrt{k'}},$$

wodurch die algebraischen Relationen zwischen den Theta-Functionen bestimmt sind. Für die Quotienten der Theta-Functionen lässt sich auf folgende Art ein Additionstheorem herstellen unter Zuziehung der Gleichungen von § 19.

In der Gleichung I, 15 setze man $w = x$, $z = y$, also $w' = x+y$, $x' = x-y$, $y' = 0$, $z' = 0$. Man erhält dann:

$$2\vartheta_2(x)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_1(y) =$$
$$\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)[\vartheta_1(x+y)\vartheta(x-y) - \vartheta(x+y)\vartheta_1(x-y)].$$

Hierin $x$ und $y$ vertauscht:

$$2\vartheta(x)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y) =$$
$$\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)[\vartheta_1(x+y)\vartheta(x-y) + \vartheta(x+y)\vartheta_1(x-y)].$$

Aus der Summe dieser beiden Gleichungen findet man leicht:

9) $$\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)\vartheta_1(x+y)\vartheta(x-y) =$$
$$\vartheta(x)\vartheta_1(x)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y) + \vartheta(y)\vartheta_1(y)\vartheta_2(x)\vartheta_3(x).$$

Nimmt man $w = y$, $z = x$, also $w' = x+y$, $x' = 0$, $y' = -(x-y)$, $z' = 0$ in den Gleichungen I, 6) und I, 8), so geben dieselben:

10) $$\vartheta(0)\vartheta_3(0)\vartheta_3(x+y)\vartheta(x-y) =$$
$$\vartheta(x)\vartheta_3(x)\vartheta(y)\vartheta_3(y) - \vartheta_1(x)\vartheta_2(x)\vartheta_1(y)\vartheta_2(y),$$

11) $$\vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_2(x+y)\vartheta(x-y) =$$
$$\vartheta(x)\vartheta_2(x)\vartheta(y)\vartheta_2(y) - \vartheta_1(x)\vartheta_3(x)\vartheta_1(y)\vartheta_3(y).$$

Die Gleichung I, 6) giebt für $w = x$, $z = y$:

$$\vartheta(0)^2\vartheta_3(x+y)\vartheta_3(x-y) = \vartheta(x)^2\vartheta_3(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_2(y)^2$$

oder $y$ mit $y+\frac{\pi}{2}$ vertauscht:

12) $$\vartheta(0)^2\vartheta(x+y)\vartheta(x-y) = \vartheta(x)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2.$$

Dividirt man die Gleichungen 9), 10) und 11) durch die Gleichung 12), so folgt, dass die Quotienten zweier Theta-Functionen mit der Summe (oder Differenz) zweier Argumente sich ausdrücken lassen durch die Quotienten mit den einfachen Argumenten, und zwar auf algebraische Weise. Die entsprechenden Gleichungen sind die folgenden:

$$\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)^2}\cdot\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \frac{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_3(y)+\vartheta(y)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)^2\vartheta(y)^2-\vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2}$$

13) $$= \frac{\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}+\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}}{1-\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\right)^2}.$$

$$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \frac{\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)-\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)}{\vartheta(x)^2\vartheta(y)^2-\vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2}$$

14) $$= \frac{\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}-\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}}{1-\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\right)^2}.$$

$$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)}\frac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \frac{\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)-\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)}{\vartheta(x)^2\vartheta(y)^2-\vartheta_1(x)^2\vartheta_1(y)^2}$$

15) $$= \frac{\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)}-\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)}}{1-\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\right)^2}.$$

In den vorstehenden drei Doppelgleichungen sind Zähler und Nenner des letzten Bruchs rechts jedes Mal durch $\vartheta(x)^2\vartheta(y)^2$ dividirt. Die Gleichungen 13), 14) und 15) lassen sich einfacher schreiben, wenn man $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ mittelst der Gleichungen 3) einführt und drei Winkel $\varphi$, $\psi$ und $\sigma$ durch folgende Gleichungen definirt:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\,.\sin\varphi, & \dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)} = \sqrt{k}\,.\sin\psi, & \dfrac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \sqrt{k}\,.\sin\sigma, \\ \dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\varphi, & \dfrac{\vartheta_2(y)}{\vartheta(y)} = \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\psi, & \dfrac{\vartheta_2(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \sqrt{\dfrac{k}{k'}}\cos\sigma, \\ \dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{\Delta(\varphi)}{\sqrt{k'}}, & \dfrac{\vartheta_3(y)}{\vartheta(y)} = \dfrac{\Delta(\psi)}{\sqrt{k'}}, & \dfrac{\vartheta_3(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \dfrac{\Delta(\sigma)}{\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Die obigen Gleichungen nehmen hierdurch die folgenden einfacheren Formen an:

$$17)\quad \begin{cases} \sin\sigma = \dfrac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \\ \cos\sigma = \dfrac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}, \\ \Delta(\sigma) = \dfrac{\Delta(\varphi)\Delta(\psi) - k^2\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}. \end{cases}$$

Ueber die Intervalle, innerhalb deren sich die Winkel $x$ und $\varphi$ bewegen, lässt sich leicht eine Bestimmung treffen durch den Nachweis, dass:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin x}, \qquad \frac{\cos\varphi}{\cos x}$$

gleichzeitig positiv sind. Setzt man in den Gleichungen:

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}\cos 2mx, \quad \vartheta_2(x, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2}\cos(2m-1)x,$$

$q^4$ statt $q$ und $2x$ statt $x$, so folgt durch Addition und Subtraction:

$$\vartheta_3(2x, q^4) + \vartheta_2(2x, q^4) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{(2m)^2}\cos 4mx + \sum_{-\infty}^{\infty} q^{(2m-1)^2}\cos 2(2m-1)x = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{m^2}\cos 2mx,$$

$$\vartheta_3(2x, q^4) - \vartheta_2(2x, q^4) = \sum (-1)^m q^{m^2}\cos 2mx,$$

d. i.

$$18)\quad \begin{aligned} \vartheta_3(2x, q^4) + \vartheta_2(2x, q^4) &= \vartheta_3(x, q), \\ \vartheta_3(2x, q^4) - \vartheta_2(2x, q^4) &= \vartheta(x, q). \end{aligned}$$

Man setze hieraus die Werthe von $\vartheta_3(x, q)$ und $\vartheta(x, q)$ in die Gleichung IV, 3) des § 19, nämlich in:

$$\vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2x, q) = \vartheta_3(x, q)^4 - \vartheta(x, q)^4.$$

Die Gleichung wird dann in folgende transformirt:

$$\vartheta_2(0, q)^3\,\vartheta_2(2x, q) = 8\,\vartheta_2(2x, q^4)\,\vartheta_3(2x, q^4)\left[\vartheta_2(2x, q^4)^2 + \vartheta_3(2x, q^4)^2\right],$$

oder einfach $x$ statt $2x$ gesetzt:

19) $$\vartheta_2(0, q)^3 \vartheta_2(x, q) = 8\vartheta_2(x, q^4)\vartheta_3(x, q^4)[\vartheta_2(x, q^4)^2 + \vartheta_3(x, q^4)^2].$$

Vertauscht man $x$ mit $x + \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

20) $$\vartheta_2(0, q)^3 \vartheta_1(x, q) = 8\vartheta_1(x, q^4)\vartheta(x, q^4)[\vartheta_1(x, q^4)^2 + \vartheta(x, q^4)^2].$$

Für $x = 0$ giebt die Gleichung 19):

21) $$\vartheta_2(0, q)^4 = 8\vartheta_2(0, q^4)\vartheta_3(0, q^4)[\vartheta_2(0, q^4)^2 + \vartheta_3(0, q^4)^2].$$

Die Gleichungen 19) und 20) dividire man durch die Gleichung 21). Zur Abkürzung setze man:

$$\frac{\vartheta_3(x, q^4)}{\vartheta_3(0, q^4)} \cdot \frac{\vartheta_2(x, q^4)^2 + \vartheta_3(x, q^4)^2}{\vartheta_2(0, q^4)^2 + \vartheta_3(0, q^4)^2} = F(x, q^4),$$

$$\frac{\vartheta(x, q^4)}{\vartheta_3(0, q^4)} \cdot \frac{\vartheta_1(x, q)^2 + \vartheta(x, q^4)^2}{\vartheta_2(0, q^4)^2 + \vartheta_3(0, q^4)^2} = F_1(x, q^4).$$

Da die Functionen $\vartheta$ und $\vartheta_3$ immer positiv sind für reelle Werthe des Arguments, so sind $F$ und $F_1$ wesentlich positive Quantitäten für ein reelles $x$. Die vorhin bemerkte Division giebt nun:

$$\frac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta_2(0, q)} = \frac{\vartheta_2(x, q^4)}{\vartheta_2(0, q^4)} F(x, q^4), \quad \frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta_2(0, q)} = \frac{\vartheta_1(x, q^4)}{\vartheta_2(0, q^4)} F_1(x, q^4).$$

In jeder dieser Gleichungen setze man $q^4$, $q^{16}$, $q^{64}$... statt $q$, multiplicire die so erhaltenen Resultate mit einander. Geht man zur Gränze über, so folgt:

22) $$\begin{cases} \dfrac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta_2(0, q)} = \lim\left[\dfrac{\vartheta_2(x, q^\varrho)}{\vartheta_2(0, q^\varrho)}\right] \times F(x, q^4) F(x, q^{16}) \ldots, \\ \dfrac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta_2(0, q)} = \lim\left[\dfrac{\vartheta_1(x, q^\varrho)}{\vartheta_2(0, q^\varrho)}\right] \times F_1(x, q^4) F_1(x, q^{16}) \ldots, \end{cases}$$

für ein unbegränzt zunehmendes $\varrho$. Es ist:

$$\frac{\vartheta_2(x, q^\varrho)}{\vartheta_2(0, q^\varrho)} = \frac{q^{\frac{1}{4}\varrho}\cos x + q^{\frac{9}{4}\varrho}\cos 3x + \ldots}{q^{\frac{1}{4}\varrho} + q^{\frac{9}{4}\varrho} + \ldots} = \frac{\cos x + q^{2\varrho}\cos 3x + \ldots}{1 + q^{2\varrho} + \ldots}.$$

Da nun $q < 1$, also $\lim q^\varrho = 0$ für $\varrho = \infty$, so ist:

$$\lim \frac{\vartheta_2(x, q^\varrho)}{\vartheta_2(0, q^\varrho)} = \cos x.$$

Durch Vertauschung von $x$ mit $\frac{\pi}{2} + x$ folgt

$$\lim \frac{\vartheta_1(x, q^\varrho)}{\vartheta_2(0, q^\varrho)} = \sin x.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\vartheta_2(0, q)$ wesentlich positiv, ebenso $\vartheta(x, q)$, geben die Gleichungen 22):

$$\frac{\vartheta_2(x, q)}{\vartheta(x, q)} = \cos x \,.\, C^2, \quad \frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} = \sin x \,.\, S^2,$$

wo $C$ und $S$ reelle Grössen sind. Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen 8) zeigen, dass $\sin\varphi$ mit $\sin x$ und $\cos\varphi$ mit $\cos x$ immer dasselbe Zeichen hat, die Winkel $\varphi$ und $x$ liegen also in demselben Quadranten. Bestimmt man also, dass $\varphi = 0$ für $x = 0$, so ist auch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ für $x = \frac{\pi}{2}$.

Die vorhin entwickelten Gleichungen geben den Werth einer Constanten, welche im nächsten § neben den Constanten $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$ und $\vartheta_3(0)$ auftritt, es ist dieses die Constante:

$$\left(\frac{d\vartheta_1(x)}{dx}\right)_{x=0} = \vartheta_1'(0) = 2\sum_{r=1}^{r=\infty}(-1)^{r-1}(2r-1)\, q^{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2} =$$

$$2(q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - 7q^{\frac{49}{4}} \ldots).$$

Um Wiederholungen zu vermeiden, soll der Werth der betreffenden Constanten mittelst der Gleichungen 1), 18), 20) und 21) kurz hergeleitet werden. Die Gleichung 1) giebt, wenn $q$ mit $q^4$ vertauscht wird:

$$\vartheta_3(0, q^4)^4 - \vartheta_2(0, q^4)^4 = \vartheta(0, q^4)^4.$$

Dividirt man auf beiden Seiten durch $\vartheta_3(0, q^4)^2 - \vartheta_2(0, q^4)^2$, so folgt:

$$23) \quad \vartheta_3(0, q^4)^2 + \vartheta_2(0, q^4)^2 = \frac{\vartheta(0, q^4)^4}{\vartheta_3(0, q^4)^2 - \vartheta_2(0, q^4)^2}.$$

In dem Product der Gleichungen 18) $x = 0$ gesetzt, giebt:

$$\vartheta_3(0, q^4)^2 - \vartheta_2(0, q^4)^2 = \vartheta(0, q)\,\vartheta_3(0, q).$$

Wendet man dieses auf die rechte Seite der Gleichung 23) an, so ist einfacher:

$$\vartheta_3(0, q^4)^2 + \vartheta_2(0, q^4)^2 = \frac{\vartheta(0, q^4)^4}{\vartheta(0, q)\,\vartheta_3(0, q)}.$$

Den Werth der linken Seite substituire man auf der rechten Seite der Gleichung 21), die sich hierdurch wie folgt vereinfacht:

$$24) \quad \vartheta_2(0, q)^4\,\vartheta(0, q)\,\vartheta_3(0, q) = 8\vartheta(0, q^4)^4\,\vartheta_2(0, q^4)\,\vartheta_3(0, q^4).$$

Die Gleichung 20) werde nach $x$ differentiirt und darauf $x = 0$ gesetzt, da die Differentialquotienten der drei graden Functionen mit dem Argumente $x$ verschwinden, so bleibt einfach:

$$\vartheta_2(0, q)^3 \vartheta_1'(0, q) = 8\vartheta(0, q^4)^3 \vartheta_1'(0, q^4).$$

Dividirt man diese Gleichung durch die Gleichung 24), so nimmt dieselbe folgende symmetrische Formen an:

$$25) \quad \frac{\vartheta_1'(0, q)}{\vartheta(0, q)\vartheta_2(0, q)\vartheta_3(0, q)} = \frac{\vartheta_1'(0, q^4)}{\vartheta(0, q^4)\vartheta_2(0, q^4)\vartheta_3(0, q^4)}.$$

Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung durch $f(q)$, so ist $f(q) = f(q^4)$. Wird hierin $q$ durch $q^4$, $q^{16}$,.... ersetzt, so folgt $f(q) = \lim f(q^\varrho)$ für $\varrho = \infty$, oder da $q^\varrho = 0$, so ist $f(q) = f(0)$. Nun ist:

$$f(q) = \frac{1 - 3q^2 + 5q^6 \ldots}{(1+q^2+\ldots)(1+2q\ldots)(1-2q\ldots)},$$

also für $q = 0$ ist $f(0) = 1$. Jeder der Brüche in der Gleichung 25) ist folglich gleich der Einheit, woraus sich die bemerkenswerthe Gleichung ergiebt:

$$\vartheta_1'(0, q) = \vartheta(0, q)\vartheta_2(0, q)\vartheta_3(0, q),$$

oder, indem man das Argument $q$ einfach weglässt:

$$26) \quad \vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0).$$

---

# Sechster Abschnitt.

---

## § 16. Uebergang von den Theta-Functionen zu den elliptischen Functionen.

Die Gleichung 13) von § 20 differentiire man nach $y$ und setze nach der Differentiation $y = 0$. Mit Rücksicht auf $\vartheta'(0) = 0$, $\vartheta_2'(0) = 0$, $\vartheta_3'(0) = 0$, folgt:

$$\frac{\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\right) = \frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)},$$

oder, da nach 26) $\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0)$, ferner nach 8):

$$1) \quad \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\sin\varphi, \quad \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\varphi, \quad \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\Delta(\varphi)}{\sqrt{k'}},$$

so wird die obige Gleichung einfacher:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\vartheta(0)^2}{k'} \Delta(\varphi).$$

Setzt man noch $k' \vartheta_3(0)^2 = \vartheta(0)^2$ und $\Delta(\varphi) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, so findet zwischen $\varphi$ und $x$ die folgende Differentialgleichung statt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \frac{d\varphi}{dx} = \vartheta_3(0)^2.$$

Verschwindet $\varphi$ mit $x$, so ist:

$$2) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = x . \vartheta_3(0)^2.$$

Nach dem vorhergehenden § sind $x$ und $\varphi$ gleichzeitig $\frac{\pi}{2}$. Bezeichnet man wieder durch $K$ das in 2) vorkommende Integral für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$3) \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2} \vartheta_3(0)^2.$$

Durch Elimination von $\vartheta_3(0)^2$ zwischen den Gleichungen 2) und 3) folgt:

$$4) \quad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2Kx}{\pi}.$$

Die Gleichung 3) in Verbindung mit den Gleichungen 2) des vorigen § giebt:

$$5) \quad \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0) = \sqrt{\frac{2k\,K}{\pi}}, \quad \vartheta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.$$

Die Gleichung 4) giebt $x$ explicite in Function von $\varphi$. Führt man wieder die Bezeichnungen der elliptischen Functionen ein, so ist $\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$. Die Gleichungen 1) geben dann:

$$6) \quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k} \sin \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi}, & \dfrac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\dfrac{k'}{k}} \cos \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi}, \\ \dfrac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \dfrac{\Delta \operatorname{am} \dfrac{2Kx}{\pi}}{\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Geht man von der Theorie der Theta-Functionen aus, so sind mittelst der vorstehenden Gleichungen die Quotienten zweier Theta-Functionen durch die elliptischen Functionen definirt. Nimmt man $k$, also auch $k'$, $K$ und $K'$ als gegeben an, so geben die Entwickelungen des § 17 mit der grössten Leichtigkeit $q$ in Function von $k$. Geht $q$ über in $q'$, so möge $k$ in $l$ übergehen. Es sei $l'$ der Complementärmodul von $l$, durch $L$ und $L'$ sind die elliptischen Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-l^2\sin^2\Theta}} = L, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-l'^2\sin^2\Theta}} = L'$$

bezeichnet. Den Gleichungen 5) entsprechen dann die Gleichungen:

$$\vartheta_3(0, q') = \sqrt{\frac{2L}{\pi}}, \quad \vartheta_2(0, q') = \sqrt{\frac{2lL}{\pi}}, \quad \vartheta(0, q') = \sqrt{\frac{2l'L}{\pi}}.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der Gleichung 5) nehmen die Relationen 19) des § 17 nämlich:

$$\vartheta_3(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,\vartheta_3(0, q'), \quad \vartheta_2(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,\vartheta(0, q'),$$

$$\vartheta(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,\vartheta_2(0, q'),$$

folgende Formen an:

$$7) \quad K = \frac{\pi L}{\log\frac{1}{q}}, \quad kK = \frac{\pi L}{\log\frac{1}{q}}\,l', \quad k'K = \frac{\pi L}{\log\frac{1}{q}}\,l.$$

Durch Division der zweiten und der dritten vorstehenden Gleichungen durch die erste folgt $k = l'$, $k' = l$, es sind also $k$ und $l$ Complementärmoduli, mithin ist $L = K'$. Die erste Gleichung 7) giebt dann:

$$8) \quad \log\frac{1}{q} = \pi\frac{K'}{K}, \quad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

wodurch $q$ in Function von $k$ bestimmt ist.

Definirt man die elliptischen Functionen allgemein durch die Gleichungen 6), so geben die Gleichungen 18) von § 17 unmittel-

bar den Zusammenhang der Functionen mit reellem und imaginärem Argument. Durch Division folgt:

$$9)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(x,q)}{\vartheta(x,q)} = -i\,\dfrac{\vartheta_1\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}{\vartheta_2\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}, & \dfrac{\vartheta_2(x,q)}{\vartheta(x,q)} = \dfrac{\vartheta\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}{\vartheta_2\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}, \\ \dfrac{\vartheta_3(x,q)}{\vartheta(x,q)} = \dfrac{\vartheta_3\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}{\vartheta_2\left(\dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)}. \end{cases}$$

Geht nun $q$ in $q'$ über, so geht $k$ in $k'$ und $K$ in $K'$ über. Den Gleichungen 6) entsprechen dann die folgenden:

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(y,q')}{\vartheta(y,q')} = \sqrt{k'}\,\sin\operatorname{am}\left(\dfrac{2K'y}{\pi}, k'\right), \\ \dfrac{\vartheta_2(y,q')}{\vartheta(y,q')} = \sqrt{\dfrac{k'}{k}}\,\cos\operatorname{am}\left(\dfrac{2K'y}{\pi}, k'\right), \\ \dfrac{\vartheta_3(y,q')}{\vartheta(y,q')} = \dfrac{\Delta\operatorname{am}\left(\dfrac{2K'y}{\pi}, k'\right)}{\sqrt{k}}. \end{cases}$$

Nimmt man in den Gleichungen 10) $y = \dfrac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}$, also, mit Rücksicht auf 8):

$$\frac{2K'y}{\pi} = \frac{2K'xi}{\log\frac{1}{q}} = \frac{2Kxi}{\pi},$$

und führt in 9) mittelst der Gleichungen 6) und 10) die elliptischen Functionen ein, so sind die Argumente der Functionen links $\dfrac{2Kx}{\pi}$ und $k$, die Functionen rechts haben die Argumente $\dfrac{2Kxi}{\pi}$ und $k'$. Nimmt man einfach $\dfrac{2Kx}{\pi} = u$, so führen die Gleichungen 9) auf die folgenden, welche identisch sind mit den in § 8 gefundenen Relationen 8):

$$\sin\operatorname{am}(u,k) = -i\operatorname{tang}\operatorname{am}(ui,k'),\quad \cos\operatorname{am}(u,k) = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(ui,k')},$$

$$\Delta\operatorname{am}(u,k) = \frac{\Delta\operatorname{am}(ui,k')}{\cos\operatorname{am}(ui,k')},$$

oder $u$ mit $ui$ vertauscht:

$$\sin\operatorname{am}(ui,k) = i\operatorname{tang}\operatorname{am}(u,k'),\quad \cos\operatorname{am}(ui,k) = \frac{1}{\cos\operatorname{am}(u,k')},$$

$$\Delta\operatorname{am}(ui,k) = \frac{\Delta\operatorname{am}(u,k')}{\cos\operatorname{am}(u,k')}.$$

## § 22. Zusammenstellung der wichtigsten Reihen und Producte in der Theorie der elliptischen Functionen.

Da bei den Anwendungen der elliptischen Functionen die bisher aufgestellten Reihen und Producte häufig zur Anwendung kommen, so erscheint es zweckmässig, eine Zusammenstellung dieser Resultate zu geben, um bei den folgenden Entwickelungen einfach auf diese Zusammenstellung verweisen zu können. Sowohl in den Producten wie in den Summen nimmt $r$ alle ganzzahligen positiven Werthe von 1 bis $\infty$ an. Nach § 10 ist:

1) $$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sin x \prod\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod\frac{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

2) $$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \cos x \prod\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\right)^2 \prod\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

3) $$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \prod\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2 \prod\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

4) $$\sqrt{k} = 2q^{\frac{1}{4}} \prod\left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\right)^2,\quad \sqrt{k'} = \prod\left(\frac{1-q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\right)^2.$$

Da:

$$\left(\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin x}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx}}{\frac{d\sin x}{dx}}\right) = \frac{2K}{\pi},$$

so folgt aus 1):

5) $$\frac{2K}{\pi} = \prod\left(\frac{1+q^{2r-1}}{1+q^{2r}}\cdot\frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}}\right)^2.$$

Aus den Gleichungen 4) und 5) leitet man leicht die folgenden ab:

$$6)\quad \begin{cases} \frac{2kK}{\pi} = 4\sqrt{q}\,\Pi\left(\frac{1-q^{4r}}{1-q^{4r-2}}\right)^2, & \frac{2k'K}{\pi} = \Pi\left(\frac{1-q^{r}}{1+q^{r}}\right)^2, \\ \frac{2\sqrt{k}\,K}{\pi} = 2q^{\frac{1}{4}}\,\Pi\left(\frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}}\right)^2, & \frac{2\sqrt{k'}K}{\pi} = \Pi\left(\frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}}\right)^2. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen 4) lassen sich die Gleichungen 1), 2), 3) auf folgende Art schreiben:

$$7)\quad \sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}}\sin x\,\Pi\,\frac{1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}},$$

$$8)\quad \cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = 2q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{k'}{k}}\cos x\,\Pi\,\frac{1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}},$$

$$9)\quad \Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\Pi\,\frac{1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}{1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}}.$$

Nach § 15 ist:

$$10)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = \Pi(1-q^{2r})\;\Pi(1-2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}), \\ \vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin x\;\Pi(1-q^{2r})\;\Pi(1-2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}), \\ \vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos x\;\Pi(1-q^{2r})\;\Pi(1+2q^{2r}\cos 2x+q^{4r}), \\ \vartheta_3(x) = \Pi(1-q^{2r})\;\Pi(1+2q^{2r-1}\cos 2x+q^{4r-2}). \end{cases}$$

Die Gleichungen 7), 8), 9) lassen sich also auch wie folgt darstellen:

$$11)\quad \begin{cases} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k}\,\sin\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}, & \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\cos\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} \\ \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Führt man die Definitionen der Theta-Functionen in Form unendlicher Reihen ein, so ist:

$$12)\quad \begin{cases} \vartheta(x) = 1+2\Sigma(-1)^r q^{r^2}\cos 2rx,\ \vartheta_3(x) = 1+2\Sigma q^{r^2}\cos 2rx, \\ \vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\Sigma(-1)^{r-1}q^{(r-\frac{1}{2})^2}\sin(2r-1)x, \\ \vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\Sigma q^{(r-\frac{1}{2})^2}\cos(2r-1)x. \end{cases}$$

$$13)\quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0) = 1+2\Sigma q^{r^2},\ \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)},\ \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)}$$

Nach § 12 ist:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cdot\sqrt{q}\;\Pi\left(\frac{1-q^{4r}}{1-q^{4r-2}}\right)^2=\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x,$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cdot\sqrt{q}\;\Pi\left(\frac{1-q^{4r}}{1-q^{2r-2}}\right)^2=\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\cos(2r-1)x,$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cdot\Pi\left(\frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}\cdot\frac{1-q^{2r-1}}{1-q^{2r}}\right)^2=1+4\sum\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx.$$

Wegen der Gleichungen 5) und 6) lassen sich die vorstehenden Gleichungen einfacher schreiben:

14) $$\frac{2kK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=4\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x,$$

15) $$\frac{2kK}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=4\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\cos(2r-1)x,$$

16) $$\frac{2K}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=1+4\sum\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx.$$

Aus den Gleichungen 7), 8) und 9) erhält man:

17) $$\log\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\left(\frac{2q^{\frac14}\sin x}{\sqrt{k}}\right)+2\sum\frac1r\,\frac{q^r}{1+q^r}\cos 2rx,$$

18) $$\log\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\left(2q^{\frac14}\sqrt{\frac{k'}{k}}.\cos x\right)+2\sum\frac1r\,\frac{q^r}{1+(-q)^r}\cos 2rx,$$

19) $$\log\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=\log\sqrt{k'}+4\sum\frac{1}{2r-1}\,\frac{q^{2r-1}}{1-q^{4r-2}}\cos(4r-2)x.$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich unmittelbar die folgenden:

20) $$\begin{cases}\left(\log\dfrac{\sin\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}}{\sin x}\right)_{x=0}=\log\dfrac{2K}{\pi}=\log\dfrac{2q^{\frac14}}{\sqrt{k}}+2\sum\dfrac1r\,\dfrac{q^r}{1+q^r},\\[2ex]\log\left(\dfrac{\cos\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}}{\cos x}\right)_{x=\frac{\pi}{2}}=\log\dfrac{2k'K}{\pi}=\\[2ex]\qquad\log\left(2q^{\frac14}\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\right)+2\sum\dfrac1r\,\dfrac{(-q)^r}{1+(-q)^r}.\end{cases}$$

In der Gleichung 17) nehme man $x = \frac{\pi}{2}$, in den Gleichungen 18) und 19) $x = 0$, dann folgt:

$$21)\quad \begin{cases} \log \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{k}} + 2\sum \frac{(-1)^r}{r}\,\frac{q^r}{1+q^r} = 0, \\ \log\left(2q^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{k'}{k}}\right) + 2\sum \frac{1}{r}\,\frac{q^r}{1+(-q)^r} = 0, \\ \log\sqrt{k'} + 4\sum \frac{1}{2r-1}\,\frac{q^{2r-1}}{1-q^{4r-2}} = 0. \end{cases}$$

Mittelst der Gleichungen 5) und 6) erhält man aus § 13:

$$22)\quad \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2} - 8\sum \frac{rq^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx,$$

$$23)\quad \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \cos^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2} + 8\sum \frac{rq^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx,$$

$$24)\quad \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = 1 + 8\sum \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2} + 8\sum \frac{rq^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx.$$

Die Gleichungen 10) geben:

$$25)\quad \begin{cases} \log \vartheta(x) = -\sum \frac{1}{r}\,\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum \frac{1}{r}\,\frac{q^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx, \\ \log \vartheta_3(x) = -\sum \frac{1}{r}\,\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum \frac{(-1)^r}{r}\,\frac{q^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx, \\ \log \vartheta_1(x) = \\ \log(2q^{\frac{1}{4}}\sin x) - \sum \frac{1}{r}\,\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}} - 2\sum \frac{1}{r}\,\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\cos 2rx, \\ \log \vartheta_2(x) = \\ \log(2q^{\frac{1}{4}}\cos x) - \sum \frac{1}{r}\,\frac{q^{2n}}{1-q^{2r}} - 2\sum \frac{(-1)^r}{r}\,\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}\cos 2rx. \end{cases}$$

Die Gleichungen 22) bis 25) sind für die Erforschung der elliptischen Integrale von der grössten Bedeutung, mit ihrer Hülfe gelang es zuerst *Jacobi* die wahre Natur dieser Transcendenten zu enthüllen. Aus den obigen Gleichungen hat *Jacobi* (Fund. p. 100 u. f.) durch Differentiation eine grosse Menge neuer Entwicklungen hergeleitet, von denen nur die wesentlichsten hier angemerkt werden mögen Die Gleichungen 17), 18) und 19) geben:

$$26)\quad \frac{d\log\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 4\sum\frac{q^r}{1+q^r}\sin 2rx.$$

$$27)\quad -\frac{d\log\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + 4\sum\frac{q^r}{1+(-q)^r}\sin 2rx.$$

$$28)\quad -\frac{d\log\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx} = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{k^2\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$8\sum\frac{q^{2r-1}}{1-q^{4r-2}}\sin(4r-2)x.$$

Vertauscht man in den Gleichungen 14), 15), 16), 26) und 27) $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$ (die Gleichung 28) bleibt dadurch unverändert), so führen dieselben auf folgende Gleichungen:

$$29)\quad \frac{2kK}{\pi}\cdot\frac{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = 4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\cos(2r-1)x,$$

$$30)\quad \frac{2kk'K}{\pi}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = 4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}\sin(2r-1)x,$$

$$31)\quad \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{1}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = 1+4\sum(-1)^r\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx,$$

$$32)\quad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{k'^2\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{\sin x}{\cos x} - 4\sum\frac{(-1)^{r-1}q^r}{1+q^r}\sin 2rx,$$

33) $$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{\cos x}{\sin x}+4\sum\frac{(-1)^{r-1}q^r}{1+(-q)^r}\sin 2rx,$$

Die Gleichungen 32) und 33) ergeben sich auch durch Addition aus den Gleichungen 26), 27) und 28). Mit Rücksicht auf die Gleichung 5) ist nach § 12:

34) $$\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{1}{\sin x}+4\sum\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x.$$

Wird hierin $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$ vertauscht, so folgt:

35) $$\frac{2K}{\pi}\,\frac{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{1}{\cos x}+4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\cos(2r-1)x.$$

Vertauscht man $q$ mit $-q$, so geht nach 5) und 6) $\frac{2K}{\pi}$ über in $\frac{2k'K}{\pi}$. Vertauscht man in der Gleichung 34) gleichzeitig $q$ mit $-q$ und $x$ mit $\frac{\pi}{2}-x$, so folgt:

36) $$\frac{2k'K}{\pi}\,\frac{1}{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{1}{\cos x}+4\sum(-1)^r\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\cos(2r-1)x.$$

Hierin $\frac{\pi}{2}-x$ statt $x$ gesetzt:

37) $$\frac{2K}{\pi}\,\frac{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{1}{\sin x}-4\sum\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}}\sin(2r-1)x.$$

Es ist $\frac{d\operatorname{am}u}{du}=\Delta\operatorname{am}u$. Setzt man $u=\frac{2Kx}{\pi}$, so folgt nach 16):

$$\frac{d\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{dx}=1+4\sum\frac{q^r}{1+q^{2r}}\cos 2rx.$$

Diese Gleichung zwischen den Gränzen 0 und $x$ integrirt giebt

38) $$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}=x+2\sum\frac{1}{r}\,\frac{q^r}{1+q^{2r}}\sin 2rx.$$

Es ist:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{1+\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{2K}{\pi}\frac{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}=\frac{2Kk}{\pi}\frac{\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}.$$

Substituirt man hierin rechts aus 29) und 35) die entsprechenden Reihenentwicklungen, integrirt nach $x$ zwischen den Gränzen 0 und $x$, so folgt:

39)
$$\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+4\sum\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+4\sum\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}\frac{\cos(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2r-1},$$

40)
$$\frac{1}{2}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}=4\sum\frac{(-1)^{r-1}}{2r-1}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin(2r-1)x$$

$$=4\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\frac{\cos(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2r-1}.$$

Die beiden rechts stehenden Summen lassen sich als Logarithmen darstellen, mittelst der Gleichung:

$$\log\frac{1+2p\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+p^2}{1-2p\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+p^2}=\log\frac{1+2p\sin x+p^2}{1-2p\sin x+p^2}$$

$$=4\sum p^{2r-1}\frac{\cos(2r-1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2r-1}.$$

Man setze zuerst $p=q,\ q^2,\ q^3\ldots$, wodurch sich die Summe

auf der rechten Seite der Gleichung 39) ergiebt. Für $p = q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{3}{2}}, q^{\frac{5}{2}} \ldots$ ergiebt sich die rechte Seite der Gleichung 40). Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so geben die Gleichungen 39) und 40):

$$41) \quad \sqrt{\frac{1+\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \, /\!/ \, \frac{1+2q^r\sin x+q^{2r}}{1-2q^r\sin x+q^{2r}}.$$

$$42) \quad \sqrt{\frac{1+k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}} = /\!/ \, \frac{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\sin x+q^{2r-1}}{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\sin x+q^{2r-1}}.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ giebt die Gleichung 42):

$$\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} = /\!/ \left(\frac{1+q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{\frac{2r-1}{2}}}\right)^2.$$

Es lassen sich noch analoge Gleichungen wie die Gleichungen 41) und 45) aufstellen, was der Kürze halber übergangen werden möge.

Die in den Gleichungen 13) vorkommenden Constanten lassen sich noch auf folgende Art darstellen:

In der Gleichung 16) nehme man $x = 0$, in 34) $x = \frac{\pi}{2}$, dann folgt:

$$43) \quad \vartheta_3(0)^2 = \frac{2K}{\pi} = 1+4\sum\frac{q^r}{1+q^{2r}} = 1+4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{2r-1}}{1-q^{2r-1}}.$$

In 14) $x = \frac{\pi}{2}$ und in 15) $x = 0$ gesetzt, führt auf:

$$44) \quad \vartheta_2(0)^2 = \frac{2kK}{\pi} = 4\sum(-1)^{r-1}\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}} = 4\sum\frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}}.$$

Nimmt man in den Gleichungen 31) und 36) $x = 0$, so folgt:

$$45) \quad \vartheta(0)^2 = \frac{2k'K}{\pi} = 1+4\sum(-1)^r\frac{q^{2r-1}}{1+q^{2r-1}} = 1+4\sum\frac{(-1)^r q^r}{1+q^{2r}}.$$

Die Gleichung 33) nach $x$ differentiirt, darauf $x = \frac{\pi}{2}$ gesetzt, giebt:

46) $$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = \vartheta_3(0)^4 = 1 + 8\sum \frac{rq^r}{1+(-q)^r}.$$

Analog giebt die Gleichung 32) nach $x$ differentiirt und darauf $x = 0$ gesetzt:

47) $$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 = \vartheta(0)^4 = 1 + 8\sum \frac{(-1)^r rq^r}{1+q^r}.$$

Zieht man diese Gleichung von der Gleichung 46) ab, so folgt:

48) $$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = \vartheta_2(0)^4 = 16\sum \frac{(2r-1)\,q^{2r-1}}{1-q^{4r-2}}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 46), 47) und 48) lassen sich noch auf folgende Art darstellen. Die Summe der Gleichungen 22) uud 23) giebt:

49) $$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 = 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2} + 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}$$
$$= 16\sum q^{2r-1}\frac{1+q^{4r-2}}{(1-q^{4r-2})^2}.$$

Man addire die Gleichungen 22) und 24) und setze darauf $x = 0$. Es folgt dann:

50) $$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2} + 8\sum \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2}.$$

Von dieser Gleichung die Gleichung 49) subtrahirt, giebt:

51) $$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^2 = 1 + 8\sum \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2} + 8\sum \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}$$
$$= 1 + 8\sum \frac{(-1)^r q^r}{(1+q^r)^2}.$$

In Folge der Gleichungen 6) geht $kK$ durch Vertauschung von $q$ mit $\sqrt{q}$ über in $2\sqrt{k}K$, analog folgt $\sqrt{k'}K$ aus $k'K$ durch Vertauschung von $q$ mit $q^2$. Wendet man dieses auf die Gleichungen 44), 45), 47) bis 51) an, so erhält man:

$$\frac{4\sqrt{kK}}{\pi} = 4\sum (-1)^{r-1}\frac{q^{\frac{2r-1}{4}}}{1-q^{\frac{2r-1}{2}}} = 4\sum \frac{q^{\frac{2r-1}{4}}}{1+q^{\frac{2r-1}{2}}},$$

$$\frac{2\sqrt{k'}K}{\pi} = 1 + 4\sum (-1)^r \frac{q^{4r-2}}{1+q^{4r-2}} = 1 + 4\sum (-1)^r \frac{q^{2r}}{1+q^{4r}}.$$

$$\frac{4k'K^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum (-1)^r \frac{rq^{2r}}{1+q^{2r}} = 1 + 8\sum (-1)^r \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2},$$

$$\frac{4kK^2}{\pi^2} = 4\sum q^{\frac{2r-1}{2}} \frac{1+q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2} = 4\sum \frac{(2r-1)q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}.$$

In der letzten der vorstehenden Gleichungen vertausche man $q$ mit $-q$. In Folge der Gleichungen 6) geht dann $kK^2$ über in $ikk'K^2$. Man erhält so:

$$\frac{4kk'K^2}{\pi^2} = 4\sum(-1)^{r-1}\frac{(2r-1)q^{\frac{2r-1}{2}}}{1+q^{2r-1}} = 4\sum(-1)^{r-1}q^{\frac{2r-1}{2}}\frac{1-q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}.$$

Es lassen sich auch höhere Potenzen von $\frac{2K}{\pi}$, multiplicirt mit Functionen von $k$ und $k'$, durch $q$ ausdrücken. Differentiirt man z. B. die Gleichung 15) zwei Mal nach $x$ und setzt darauf $x = 0$, so ergiebt sich eine einfache Reihe für $k\left(\frac{2K}{\pi}\right)^3$. Dasselbe Verfahren auf die Gleichung 23) angewandt giebt $k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^4$. Man kann mittelst Differentiation der im vorstehenden § gegebenen Entwicklungen Gleichungen von der bemerkten Art leicht herstellen und aus denselben durch Vertauschung von $q$ mit $\sqrt{q}$, $q^2$ und $-q$ neue Resultate herleiten. Da dieselben keine grosse Bedeutung zu haben scheinen, so sollen dieselben hier nicht weiter ausgeführt werden.

---

# Siebenter Abschnitt.

## § 23. Das Additionstheorem der elliptischen Functionen und Integrale erster Gattung.

Die Gleichungen 17) von § 20 gestatten die elliptischen Functionen mit zusammengesetzten Argumenten durch die Functionen der einzelnen Argumente auszudrücken.*) Bringt man die Gleichungen 6) von § 21 zur Anwendung, so geben die Gleichungen 16) in § 20:

*) Ueber die Gleichungen 13), 14) und 15) vergleiche man *Richelot* in Crelle Journ. t. 50 p. 41—51.

$$\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}, \quad \psi = \operatorname{am} \frac{2Ky}{\pi}, \quad \sigma = \operatorname{am} \frac{2K(x+y)}{\pi}.$$

Man setze einfacher:

$$\frac{2Kx}{\pi} = u, \quad \frac{2Ky}{\pi} = v,$$

also:

1) $\varphi = \operatorname{am} u, \quad \psi = \operatorname{am} v, \quad \sigma = \operatorname{am}(u+v).$

Die Gleichungen 17) von § 20 nehmen dann folgende Formen an:

2)
$$\begin{cases} \sin\operatorname{am}(u+v) = \\ \dfrac{\sin\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} v\, \Delta\operatorname{am} v + \sin\operatorname{am} v \cos\operatorname{am} u\, \Delta\operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am} v}, \\ \cos\operatorname{am}(u+v) = \\ \dfrac{\cos\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} v - \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} v\, \Delta\operatorname{am} u\, \Delta\operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am} v} \\ \Delta\operatorname{am}(u+v) = \\ \dfrac{\Delta\operatorname{am} u\, \Delta\operatorname{am} v - k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} v \cos\operatorname{am} u \cos\operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} u, \sin^2\operatorname{am} v}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 1) lassen sich ersetzen durch:

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} = u, \quad \int_0^{\psi} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} = v, \quad \int_0^{\sigma} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} = u+v$$

oder:

3) $$\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} + \int_0^{\psi} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} = \int_0^{\sigma} \frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)}.$$

Die Gleichungen 2) bilden die Additionsgleichungen der elliptischen Functionen, mit ihrer Hülfe lassen sich Functionen mit complexen Argumenten — wenn $vi$ statt $v$ gesetzt wird — durch Functionen mit reellen Argumenten ausdrücken. Die Gleichung 3) enthält das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung, darin bestehend, dass die Summe zweier elliptischen Integrale erster Gattung mit demselben Modul $k$, sich durch *ein* Integral, ebenfalls mit dem Modul $k$, ausdrücken lässt. Zwischen den oberen Gränzen der drei Integrale findet eine algebraische Relation statt. Setzt man in den Gleichungen 3) $\sin\Theta = t$ und weiter $\sin\varphi = x$, $\sin\psi = y$, $\sin\sigma = z$, so erhält man:

4) $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Die Gleichungen 3) nehmen folgende Formen an:

5) $$\begin{cases} z = \dfrac{x\sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-k^2y^2} + y\ \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}, \\ \sqrt{1-z^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2} - xy\ \sqrt{1-k^2x^2}\ \sqrt{1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2}, \\ \sqrt{1-k^2z^2} = \dfrac{\sqrt{1-k^2x^2}\ \sqrt{1-k^2y^2} - k^2xy\ \sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-y^2}}{1-k^2x^2y^2}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 4) und 5) in etwas veränderter Schreibweise hat zuerst *Euler* gefunden. *Legendre* (Fonct. ell. I. p. 2) bemerkt zu der im vorigen Jahrhundert einzig dastehenden Entdeckung von *Euler*:

„Euler, par une combinaison qu'on peut regarder comme fort heureuse, quoique ces hazards n'arrivent qu'à ceux qui savent les faire naître, trouva l'intégrale algébrique complète d'une équation différentielle composée de deux termes séparés, mais semblable, dont chacun n'est intégrable que par des arcs de sections coniques.

Cette découverte importante donna lieu à son auteur de comparer d'une manière plus générale qu'on ne l'avait fait avant lui, non seulement les arcs d'une même ellipse, d'une même hyperbole, ou d'une même lemniscate, mais en général toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{Pdx}{R}$ ou $P$ est une fonction rationelle de $x$, et $R$ la racine quarrée d'un polynom en $x$ du quatrième degré.

Die ersten Untersuchungen *Euler's* sind enthalten in: Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae. T. VI. p. 37 (MDCCLXI), wo sich folgende Abhandlung befindet:

Euler: De integratione aequationis differentialis:

$$\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}.$$

In dem Vorbericht (Summarium Dissertationum) p. 8—9 wird bemerkt:

Neque vero talis admiranda integratio in ipsa tantum aequatione differentiali locum habet: sed simili omnio modo Cel. Auctor ostendit hanc aequationem differentialem multo latius patentem:

$$\frac{mdx}{\sqrt{A+2Bx^2+Cx^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{A+2By^2+Cy^4}}$$

per aequationem algebraicam complete integrari posse, si modo numeri $m$ et $n$ sint rationales, quin etiam eandem integrandi methodum ad hanc aequationem multo generaliorem extendit:

$$\frac{mdx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}.$$

Am Schluss wird bemerkt: „unde patet hanc dissertationem multo plures investigationes continere, quam titulus quidem prae se ferre videtur." Die Integrationsmethode für:

$$\frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}}$$

findet sich auf pag. 50 und etwas erweitert p. 54 und 55. Als Fortsetzung dieser Abhandlung enthalten die „Novi Commentarii" (MDCCLXI) t. VII p. 3:

*Euler*: Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi de computatione arcuum Ellipsis.

Die wesentlichsten Untersuchungen dieser Art finden sich vereinigt in: *Euler*: Institutiones Calc. Int. Vol. I. Sectio secunda, Caput VI, wo namentlich Problema 81 zu vergleichen ist.

Der von *Euler* eingeschlagene Weg ist im Wesentlichen folgender. Zwischen $x$ und $y$ bestehe die Gleichung:

6) $(ax^2+2a'x+a'')y^2+2(bx^2+2b'x+b'')y+cx^2+2c'x+c'' = Ly^2+2My+N = 0,$

oder:

7) $(ay^2+2by+c)x^2+2(a'y^2+2b'y+c')x+a''y^2+2b''y+c'' = Px^2+2Qx+R = 0.$

Differentiirt man eine der Gleichungen 6) oder 7), so folgt:

8) $(Px+Q)dx+(Ly+M)dy = 0.$

Es ist ferner aus 6) und 7):

$$(Px+Q)^2 = Q^2 - PR,\ (Ly+M)^2 = M^2 - LN.$$

Nimmt man:

$$9)\quad Px+Q = \sqrt{Q^2-PR},\ Ly+M = \sqrt{M^2-LN},$$

so wird die Gleichung 8):

$$dx.\sqrt{Q^2-PR} + dy\ \sqrt{M^2-LN} = 0$$

oder:

$$\frac{dx}{\sqrt{M^2-LN}} + \frac{dy}{\sqrt{Q^2-PR}} = 0.$$

Substituirt man für $L$, $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ ihre Werthe aus 6) und 7), so wird die vorstehende Differentialgleichung:

$$10)\quad \frac{dx}{\sqrt{(bx^2+2b'x+b'')^2-(ax^2+2a'x+a'')(cx^2+2c'x+c'')}} + \frac{dy}{\sqrt{(a'y^2+2b'y+c')^2-(ay^2+2by+c)(a''y^2+2b''y+c'')}} = 0.$$

Sollen die Polynome unter den Wurzelzeichen respective dieselben Functionen von $x$ und $y$ sein, so ergeben sich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} b^2-ac &= a'^2-aa'',\\ 2bb'-ac'-a'c &= 2a'b'-ab''-a''b,\\ bb'' &= a'c',\\ 2b'b''-a'c''-a''c' &= 2b'c'-bc''-b''c,\\ b''^2-a''c'' &= c'^2-cc''. \end{aligned}$$

Substituirt man die Werthe von $c$ und $c'$ aus der ersten und dritten in die zweite Gleichung, so folgt $a' = b$. Die erste und dritte Gleichung geben dann $a'' = c$ und $b'' = c'$. Hierdurch werden die beiden übrigen Gleichungen identisch. Für $a' = b$, $a'' = c$ und $b'' = c'$ wird die Gleichung 6):

$$11)\quad ax^2y^2+2bxy(x+y)+c(x^2+y^2)+4b'xy+2c'(x+y)+c''=0.$$

Die Gleichung 10) nimmt die Form an:

$$12)\quad \frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2+2Dx^3+Ex^4}} + \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2+2Dy^3+Ey^4}} = 0,$$

oder kürzer:

$$13)\quad \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0,$$

wo:

$$14)\quad \begin{cases} A = c'^2 - cc'', & B = 2b'c' - bc'' - cc', \\ C = 4b'^2 - ac'' - c^2 - 2bc', \\ D = 2bb' - ac' - bc, & E = b^2 - ac. \end{cases}$$

Setzt man in 9) für $P, Q, R, L, M, N$ ihre Werthe aus 6) und 7), ferner $a' = b$, $a'' = c$, $b'' = c'$, $Q^2 - PR = Y$, $M^2 - LN = X$, so nehmen die Gleichungen 9) die Formen an:

$$\sqrt{Y} = (ay^2 + 2by + c)x + by^2 + 2b'y + c',$$
$$\sqrt{X} = (ax^2 + 2bx + c)y + bx^2 + 2b'x + c'.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y} = axy + b(x + y) + 2b' - c.$$

Man bilde das Quadrat dieser Gleichung und setze rechts nach 11):

$$ax^2y^2 + 2bxy(x+y) + 4b'xy = -[c(x^2 + y^2) + 2c'(x + y) + c''],$$

ferner für $D$ und $E$ ihre Werthe aus 14), es folgt so:

$$15)\quad \left(\frac{\sqrt{X} - \sqrt{Y}}{x - y}\right)^2 = E(x + y)^2 + 2D(x + y) + (2b' - c)^2 - ac''.$$

Sind $A, B, C, D$ und $E$ gegeben, so bleibt in Folge der Gleichungen 14) eine der sechs Quantitäten $a, b, c, b', c'$ und $c''$ willkührlich. Ist die Differentialgleichung 12) oder 13) gegeben, so findet zwischen $x$ und $y$ die endliche Relation 15) statt, in welcher der Ausdruck $(2b' - c)^2 - ac''$ eine beliebige Constante enthält, also selbst als die willkührliche Constante angesehn werden kann, welche die Integration der bemerkten Differentialgleichung involvirt.

Will man die in den Gleichungen 4) und 5) enthaltenen Resultate ableiten, so kann man auf folgende Art verfahren. Man setze in 12):

$$A = 1,\ B = 0,\ C = -(1 + k^2),\ D = 0,\ E = k^2.$$

Die Gleichungen 14) gehn hierdurch über in:

$$16)\quad \begin{cases} c'^2 - cc'' = 1, & (2b' - c)c' - bc'' = 0, \\ 4b'^2 - ac'' - c^2 - 2bc' = -(1 + k^2), \\ (2b' - c)b - ac' = 0, & b^2 - ac = k^2. \end{cases}$$

Um weitläufiger Rechnungen überhoben zu sein genügt es zu bemerken, dass $X$ und $Y$ nur grade Potenzen von $x$ und $y$ enthalten, die Differentialgleichung 12) also durch gleichzeitige Vertauschung von $x$, $y$ mit $-x$, $-y$ unverändert bleibt. Da dieses auch mit der Gleichung 11) der Fall sein muss, so erhält man unmittelbar $b = 0$ und $c' = 0$. Die Gleichungen 16) reduciren sich hierdurch auf:

$$-cc'' = 1, \quad 4b'^2 - ac'' - c^2 + 1 + k^2 = 0, \quad -ac = k^2$$

oder:

$$17) \quad c'' = -\frac{1}{c}, \quad a = -\frac{k^2}{c}, \quad 4b'^2 = \frac{(1-c^2)(k^2-c^2)}{c^2}.$$

Die Gleichung 11) giebt für $b = 0$, $c' = 0$:

$$c'' + ax^2y^2 + c(x^2+y^2) = -4b'xy,$$

oder quadrirt mit Rücksicht auf 17):

$$[1 + k^2x^2y^2 - c^2(x^2+y^2)]^2 = 4[k^2 - (1+k^2)c^2 + c^4]x^2y^2.$$

Diese Gleichung nach $\frac{1}{c^2}$ geordnet giebt:

$$\frac{(1-k^2x^2y^2)^2}{c^4} - 2\frac{(1+k^2x^2y^2)(x^2+y^2) - 2(1+k^2)x^2y^2}{c^2} + (x^2-y^2)^2 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{(1-k^2x^2y^2)^2}{c^4} = x^2(1-y^2)(1-k^2y^2) + y^2(1-x^2)(1-k^2x^2)$$
$$+ 2xy\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\ \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

oder:

$$18) \quad \frac{1}{c} = \frac{x\sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-k^2y^2} + y\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Es bedeutet in der vorstehenden Gleichung $c$ eine beliebige Constante. Integrirt man die Gleichung 13) und zwar von $x = 0$ an, so giebt die Gleichung 18) für $x = 0$, $y = \frac{1}{c}$, wodurch die untere Gränze des Integrals in Beziehung auf $y$ bestimmt ist. Die Ausführung der Integration giebt:

$$19) \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} + \int_{\frac{1}{c}}^{y} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = 0.$$

Die Gleichungen 18) und 19) sind mit den Gleichungen 4) und 5) identisch, wenn $\frac{1}{c} = z$ und:

$$\int_z^y = \int_0^y - \int_0^z$$

gesetzt wird.

Die von *Euler* angewandte Methode zur Integration der Differentialgleichung 10) ist ungemein einfach, wegen der nothwendigen Auflösung einer quadratischen Gleichung ist dieselbe nicht zu einer Verallgemeinerung geeignet, wie ein anderes Verfahren, welches von *Lagrange* herrührt. Unter dem Titel: „Dilucidationes super methodo elegantisima, qua illustris de la Grange usus est, in integranda aequatione $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$" hat *Euler* die Arbeit von *Lagrange* weitläufiger behandelt in den Acta Acad. Imp. Sc. T. II. P. I p. 10—57, oder auch Institut. Calc. Integr. Tomus IV. p. 465—524. (Supplementum VIII ad Tom. I. Sect. II. Cap. VI). Characteristisch für *Euler* ist die grosse Bewunderung, welche derselbe der Arbeit von *Lagrange* zollt, wie dieselbe sich in den Worten zu Anfang vor § 2 kund giebt „Istud autem egregium inventum eo magis sum admiratus etc."

Die Abhandlung von *Lagrange*: „Sur l'intégration de quelques équations différentielles etc." ist enthalten in Miscellanea Taurinensia. Tom. IV. auch unter dem Titel: Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Roy. de Turin. Pour les années 1766—1769. p. 98—125. Republicirt findet man dieselbe in: Oeuvres de Lagrange p. p. Serret. T. II. q. 5—33. Paris 1868.

Auf p. 102 reproducirt *Lagrange* die Methode von *Euler* und bemerkt zu derselben auf p. 103:

„Cette intégration est d'autant plus remarquable qu'elle n'est dûe qu'à une espèce de hazard heureux, et qu'il ne serait pas même possible d'y arriver par les méthodes connues des Géomètres jusqu'à présent."

Die Principien seiner Methode hat *Lagrange* in den folgenden bemerkenswerthen Zeilen niedergelegt:

„Quand on a une équation différentielle du premier dégré dont on ne peut trouver l'integrale, il faut la différentier et examiner si en combinant cette nouvelle équation avec la proposée, on pourrait trouver une équation integrale du premier dégré autre que l'équation proposée; car alors en chassant par le moyen de ces deux équations les premières différences, on aura une équation algébrique qui sera l'intégrale cherchée.

Si l'intégration ne reussit pas de cette manière, il faut passer à la différentielle du troisième dégré, et chercher si l'on pourrait ainsi parvenir à une nouvelle équation du second dégré; en ce cas il n'y aurait plus qu'à eliminer les différences secondes et troisièmes par le moyen de l'équation proposée et de sa différentielle. Et ainsi de suite."

Zur Abkürzung werde gesetzt:

20) $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4 = X,\ A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4 = Y.$

Zwischen $x$ und $y$ finde die Differentialgleichung statt:

$$21)\quad \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

Man sehe $x$ und $y$ als Functionen einer Variabelen $t$ an, und ersetze die Gleichung 21) durch die folgenden:

$$22)\quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{X},\ \frac{dy}{dt} = -\sqrt{Y}.$$

Für:

$$23)\quad x+y = p,\ x-y = q,$$

folgt durch Differentiation nach $t$ mit Rücksicht auf 22):

$$24)\quad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{X}-\sqrt{Y}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} = \sqrt{X}+\sqrt{Y}, \\ \dfrac{d^2p}{dt^2} = \dfrac{X'}{2\sqrt{X}}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{Y'}{2\sqrt{Y}}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{X'+Y'}{2}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung wird nach 20):

$$25)\quad \frac{d^2p}{dt^2} = B + C(x+y) + \frac{3}{2}D(x^2+y^2) + 2E(x^3+y^3).$$

Die beiden ersten Gleichungen 24) multiplicirt geben nach 20):

$$\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = X - Y =$$

$$(x-y)[B + C(x+y) + D(x^2+xy+y^2) + E(x+y)(x^2+y^2)].$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 25) folgt:

$$(x-y)\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = (x-y)^3[\tfrac{1}{2}D + E(x+y)]$$

oder $x-y = q$, $x+y = p$ gesetzt:

$$q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = q^3(\tfrac{1}{2}D + Ep)$$

d. i.

$$\frac{2}{q}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right) = D + 2Ep.$$

Diese Summe mit $\frac{dp}{dt}$ multiplicirt giebt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right)^2 = D\frac{dp}{dt} + E\frac{dp^2}{dt}.$$

Bedeutet $F$ eine Constante, so folgt durch Integration:

$$\left(\frac{1}{q}\frac{dp}{dt}\right)^2 = Dp + Ep^2 + F.$$

Setzt man wieder $p = x+y$, $q = x-y$ und nach 24):

$$\frac{dp}{dt} = \sqrt{X} - \sqrt{Y},$$

so folgt:

$$\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2 = D(x+y) + E(x+y)^2 + F.$$

Setzt man $2B$ und $2D$ statt $B$ und $D$, so wird die vorstehende Gleichung mit der Gleichung 15) identisch, wenn die Integrationsconstante durch $F$ bezeichnet wird.

Die vorstehende Darstellung enthält, mit unwesentlichen Modificationen, die von *Euler* gegebene Vereinfachung der Methode von *Lagrange*. (Institut. Calc. Int. t. IV. p. 466—467.) *Lagrange* (l. c. p. 108) nimmt statt der Gleichungen 22) die folgenden:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dt}{T}, \quad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = -\frac{dt}{T},$$

wo $T$ eine Function von $t$ bezeichnet, die so bestimmt wird, dass sich eine Integration ausführen lässt. Im Verlaufe der Abhandlung

versucht *Lagrange* vergeblich seine Methode auf eine Differentialgleichung von der Form 21) anzuwenden, in welcher $X$ und $Y$ beliebige Polynome respective von $x$ und $y$ sind. Alle Annahmen führen wieder auf die in 20) gegebenen Formen von $X$ und $Y$ zurück. Eine bemerkenswerthe Ausdehnung der Methode von *Lagrange* hat *Richelot* gegeben in der Abhandlung: Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems Differentialgleichungen. (Crelle Journ. t. 23 p. 354—369). Es sind dieses Differentialgleichungen, auf welche *Jacobi* die *Abel'schen Functionen* basirt hat.

In einer grösseren Abhandlung: „Einige Bemerkungen zum Euler'schen Additionstheorem" (Crelle. J. t. 44. p. 277—294) hat *Richelot* an die Methoden von *Euler* und *Lagrange* eine Reihe interessanter Bemerkungen geknüpft und namentlich zuerst die Herleitung der Gleichung 15) aus der Gleichung 6) oder 7) gegeben.

Das Additionstheorem von *Euler* ist, mit mehr oder minder gutem Erfolg, so häufig Gegenstand neuer Herleitungen geworden, dass eine vollständige Erwähnung aller darauf beziehlichen Arbeiten in keinem Verhältniss zu dem relativen Werthe derselben stehn würde. Es sollen daher nur einige Methoden erwähnt werden, die sich durch Einfachheit auszeichnen oder allgemeiner bekannt geworden sind.

Im „Journal de Mathématiques" 2e sér., t. I. p. 231—233 (Année 1856) hat *Despeyrous* ein Verfahren mitgetheilt, welches sich in den hinterlassenen Papieren von *Sturm* vorfand, später aber für *Sturm's* Lehrer *Deflers* reclamirt wurde. Die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0 \text{ oder } \sqrt{Y}\,dx + \sqrt{X}\,dy = 0$$

wird für $X = (1-x^2)(1-k^2x^2)$, $Y = (1-y^2)(1-x^2y^2)$ mit dem Factor $\frac{1}{1-k^2x^2y^2}$ multiplicirt und dann integrirt. Bedeutet $c$ eine Constante, so folgt:

$$\int \frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dx + \int \frac{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}\,dy = c.$$

Sind $P$ und $Q$ Functionen von $x$ und $y$, so folgt durch partielle Integration:

$$\int P dx = Px - \int \left(\frac{dP}{dx} dx + \frac{dP}{dy} dy\right),$$

$$\int P dy = Qy - \int \left(\frac{dQ}{dx} dx + \frac{dQ}{dy} dy\right).$$

Wendet man dieses auf die obige Integralgleichung an, so verschwinden in Folge der Differentialgleichung die Terme unter dem Integralzeichen und man erhält unmittelbar das algebraische Integral der Differentialgleichung. Die auszuführenden Rechnungen sind nicht ohne Weitläufigkeit, sie setzen eigentlich die Kenntniss des Additionstheorems voraus. Uebrigens ist das angewandte Verfahren eine directe Erweiterung der Methode, deren *Lagrange* sich zur Integration der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \text{ oder } \sqrt{1-y^2}\, dx + \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$$

bedient. (Miscellanea Taurinensia. T. IV. p. 100.) Die Bemerkung über Differentialgleichungen, welche oben nach *Lagrange* mitgetheilt ist, in Verbindung mit einer Bemerkung von *Abel* über die Combination der particulären Integrale einer Differentialgleichung*) (Crelle Journ. t. 2. p. 22) finden sich sehr geistreich vereinigt in einer kurzen Note von *Darboux* (Annales scientifiques de l'École normale supérieure. t. IV. p. 85. Paris 1867), welche ihres geringen Umfangs wegen hier erwähnt werden soll. Es sei $z$ Function von $u$ bestimmt durch:

$$26) \quad \frac{dz}{du} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Diese Gleichung nach $u$ differentiirt giebt:

$$27) \quad \frac{d^2z}{du^2} = \frac{-z(1+k^2)+2z^3k^2}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \frac{dz}{du} = -(1+k^2)z + 2k^2z^3.$$

Sind $x$ und $y$ zwei particuläre Werthe von $z$, welche der Gleichung 27) genügen, so ist:

$$\frac{d^2x}{du^2} = -(1+k^2)x + 2k^2x^3, \quad \frac{d^2y}{du^2} = -(1+k^2)y + 2k^2y^3.$$

*) Bei *Abel* werden die particulären Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung combinirt, während im vorliegenden Falle die Differentialgleichung nicht linear ist.

Diese Gleichungen geben:

$$28) \quad y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2} = 2k^2(x^2-y^2)xy.$$

Da nun $x$ und $y$ auch der Gleichung 26) genügen, so ist:

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 1-(1+k^2)x^2+k^2x^4, \quad \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1-(1+k^2)y^2+k^2y^4,$$

folglich:

$$\left(y\frac{dx}{du}\right)^2 - \left(x\frac{dy}{du}\right)^2 = -(x^2-y^2)(1-k^2x^2y^2).$$

Die Gleichung 28) hierdurch dividirt giebt:

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{\left(y\frac{dx}{du}\right)^2 - \left(x\frac{dy}{du}\right)^2} = -\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du}$, so wird:

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}} = -\frac{2k^2xy}{1-k^2x^2y^2}\left(y\frac{dx}{du} + x\frac{dy}{du}\right),$$

d. i.

$$\frac{d\left(y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}\right)}{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}} = -\frac{2k^2xy\frac{dxy}{du}}{1-k^2x^2y^2} = -\frac{k^2\frac{dx^2y^2}{du}}{1-k^2x^2y^2}.$$

Bedeutet $c$ eine Constante, so folgt durch Integration:

$$29) \quad \frac{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}}{1-k^2x^2y^2} = c.$$

Es sei nun $x = \varphi(u)$. Da $y$ ebenfalls der Differentialgleichung 26) genügt, so kann nur $y = \varphi(u+a)$ sein, wo $a$ eine Constante ist. Die Gleichung 29) wird dann.

$$30) \quad \frac{\varphi(u+a)\varphi'(u) - \varphi(u)\varphi'(u+a)}{1-k^2\varphi(u)^2\varphi(u+a)^2} = c.$$

Nimmt man für $u = 0$ $\varphi(0) = 0$, also $\varphi'(0) = 1$, so giebt die Gleichung 30) $c = \varphi(a)$. Die Gleichung 30) giebt unmittelbar

das Additionstheorem der elliptischen Functionen für $u+a=v$ und $\varphi(u) = \sin\mathrm{am}\, u$.

In der Abhandlung: „Neuer Beweis der Summationsformeln“ (Crelle Journ. t. 30 p. 211—214, oder Mathem. Abh. p. 155—158) hat *Eisenstein* eine Anwendung des Theorems von *Taylor* auf die Herstellung des Additionstheorems gemacht.

Eine Untersuchung von *Abel* in Crelle Journ. t. 2 p. 386—394, über die Functionalgleichung $\varphi(x)+\varphi(y) = \psi[xf(y)+yf(y)]$, welche beiläufig bemerkt auf die Additionstheoreme der Logarithmen und Kreisfunctionen führt, hat zu der Abhandlung von *Lottner* (Crelle Journ. t. 46 p. 367—388) Veranlassung gegeben. „Ueber die Functionen, welche der Gleichung:

$$\varphi(x)+\varphi(y) = \psi\left(\frac{fy.Fx+fx.Fy}{Z(xy)}\right)$$

Genüge leisten.“ Diese Gleichung führt auf das Additionstheorem der elliptischen Functionen. (l. c. p. 379.)

Weitere Betrachtungen über das Additionstheorem findet man noch bei *Schellbach* in Crelle Journ. t. 54 p. 59—67 und *Genochi* im Buttetino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pub. d. B. Boncompagni, Tomo III. Roma 1870. Man findet dort auf p. 47 eine Anzahl literarischer Notizen.

## § 24. Zusammenstellung einiger Formeln, welche sich aus dem Additionstheorem ergeben. Anwendungen des Additionstheorems.

Setzt man in den Gleichungen 2) § 23 $-v$ statt $v$, so ergeben sich drei neue Gleichungen, welche in Verbindung mit den bemerkten Gleichungen das folgende Fundamentalsystem für die Addition der elliptischen Functionen bilden:

1)
$$\sin\mathrm{am}(u+v) = \frac{\sin\mathrm{am}\, u\ \cos\mathrm{am}\, v\ \Delta\mathrm{am}\, v + \sin\mathrm{am}\, v\ \cos\mathrm{am}\, u\ \Delta\mathrm{am}\, u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, u\sin^2\mathrm{am}\, v}.$$

2)
$$\cos\mathrm{am}(u+v) = \frac{\cos\mathrm{am}\, u\ \cos\mathrm{am}\, v - \sin\mathrm{am}\, u\ \sin\mathrm{am}\, v\ \Delta\mathrm{am}\, u\ \Delta\mathrm{am}\, v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\, u\sin^2\mathrm{am}\, v}.$$

3) $$\Delta\,\mathrm{am}(u+v) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,v - k^2 \sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\cos\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,v}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

4) $$\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u\;\cos\mathrm{am}\,v\;\Delta\,\mathrm{am}\,v - \sin\mathrm{am}\,v\,\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

5) $$\cos\mathrm{am}(u-v) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\;\cos\mathrm{am}\,v + \sin\mathrm{am}\,u\;\sin\mathrm{am}\,v\;\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,v}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

6) $$\Delta\,\mathrm{am}(u-v) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\;\Delta\,\mathrm{am}\,v + k^2\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\cos\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,v}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

Aus diesen Gleichungen hat *Jacobi* (Fund. p. 32 und 33) 33 Relationen abgeleitet, von denen hier nur die wiederholt werden sollen, welche in den folgenden Untersuchungen von Wichtigkeit sind. Bildet man das Produkt von $\sin\mathrm{am}(u+v)\sin\mathrm{am}(u-v)$ und setzt im Zähler $\cos^2\mathrm{am}\,w = 1-\sin^2\mathrm{am}\,w$, $\Delta^2\mathrm{am}\,w = 1-k^2\times\sin^2\mathrm{am}\,w$, so findet man, dass derselbe durch $1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\times\sin^2\mathrm{am}\,v$ theilbar ist. Verfährt man analog mit $\cos\mathrm{am}(u+v)\times\cos\mathrm{am}(u-v)$ und $\Delta\,\mathrm{am}(u+v)\,\Delta\,\mathrm{am}(u-v)$, so erhält man folgende sehr nützliche Relationen:

7) $$\sin\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u - \sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

8) $$\cos\mathrm{am}(u+v)\,\cos\mathrm{am}(u-v) = \frac{1-\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v + k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

9) $$\Delta\,\mathrm{am}(u+v)\,\Delta\,\mathrm{am}(u-v) = \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u-k^2\sin^2\mathrm{am}\,v+k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\;\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

Mittelst der Gleichungen 1) bis 9) ergeben sich ohne weitere Rechnung Gleichungen für:

$$\sin\mathrm{am}(u+v) \pm \sin\mathrm{am}(u-v),\quad 1 \pm \sin\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}(u-v),$$
$$1 \pm k^2\sin\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}(u-v)\ \text{etc.}$$

Durch Ausführung der Multiplication findet man mittelst der Gleichungen 1) bis 9) unmittelbar die folgenden Functionen mit

zusammengesetzten Argumenten durch die Functionen der einzelnen Argumente ausgedrückt:

$$[1 \pm \operatorname{sin\,am}(u+v)][1 \pm \operatorname{sin\,am}(u-v)] =$$
$$1 \pm \operatorname{sin\,am}(u+v) \pm \operatorname{sin\,am}(u-v) + \operatorname{sin\,am}(u+v)\ \operatorname{sin\,am}(u-v).$$
$$[1 \pm \operatorname{sin\,am}(u+v)][1 \mp \operatorname{sin\,am}(u-v)] =$$
$$1 \pm [\operatorname{sin\,am}(u+v) - \operatorname{sin\,am}(u-v)] - \operatorname{sin\,am}(u+v)\ \operatorname{sin\,am}(u-v),$$

etc.

So ist z. B. nach 1), 4) und 7):

$$[1 \pm k \operatorname{sin\,am}(u+v)][1 \mp k \operatorname{sin\,am}(u-v)] =$$
$$1 \pm k[\operatorname{sin\,am}(u+v) - \operatorname{sin\,am}(u-v)] - k^2 \operatorname{sin\,am}(u+v) \operatorname{sin\,am}(u-v) =$$
$$1 \pm 2k \frac{\operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} u\, \Delta\operatorname{am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v} - k^2 \frac{\operatorname{sin}^2\operatorname{am} u - \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v} =$$
$$\frac{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u + k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v \operatorname{cos}^2\operatorname{am} u \pm 2k \operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} u\, \Delta\operatorname{am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}$$
$$= \frac{(\Delta\operatorname{am} u \pm k \operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} u)^2}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}.$$

Da die Herstellung von Gleichungen von der Art der vorhergehenden von leichter Mühe ist, so soll eine weitere Ausführung derselben unterbleiben.

Bildet man das Product der Gleichungen 1) und 5) nämlich $\operatorname{sin\,am}(u+v) \operatorname{cos\,am}(u-v)$, so hat der Zähler rechts nach Ausführung der Multiplication die Form $P\Delta\operatorname{am} u + Q\Delta\operatorname{am} v$, wo jeder der Factoren $P$ und $Q$ durch $1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u\ \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v$ theilbar ist. Man erhält auf diese Art die folgenden sechs Gleichungen:

10) $$\operatorname{sin\,am}(u+v) \operatorname{cos\,am}(u-v) =$$
$$\frac{\operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} u\, \Delta\operatorname{am} v + \operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} v\, \Delta\operatorname{am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}.$$

11) $$\operatorname{sin\,am}(u-v) \operatorname{cos\,am}(u+v) =$$
$$\frac{\operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} u\, \Delta\operatorname{am} v - \operatorname{sin\,am} v \operatorname{cos\,am} v\, \Delta\operatorname{am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}.$$

12) $$\operatorname{sin\,am}(u+v)\, \Delta\operatorname{am}(u-v) =$$
$$\frac{\operatorname{sin\,am} u\, \Delta\operatorname{am} u \operatorname{cos\,am} v + \operatorname{sin\,am} v\, \Delta\operatorname{am} v \operatorname{cos\,am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}.$$

13) $$\operatorname{sin\,am}(u-v)\, \Delta\operatorname{am}(u+v) =$$
$$\frac{\operatorname{sin\,am} u\, \Delta\operatorname{am} u \operatorname{cos\,am} v - \operatorname{sin\,am} v\, \Delta\operatorname{am} v \operatorname{cos\,am} u}{1-k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} v}.$$

14) $$\cos\mathrm{am}(u+v)\ \Delta\mathrm{am}(u-v) = \frac{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}v - k'^2\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}v}.$$

15) $$\cos\mathrm{am}(u-v)\ \Delta\mathrm{am}(u+v) = \frac{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}v + k'^2\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}v}.$$

Die Gleichungen 11), 13) und 15) ergeben sich unmittelbar aus den Gleichungen 10), 12) und 14) durch Vertauschung von $v$ mit $-v$. Eliminirt man zwischen je zwei der Gleichungen 1), 2) und 3) eine der Functionen $\Delta\mathrm{am}u$ oder $\Delta\mathrm{am}v$, so lassen sich Relationen herstellen, in welchen der Nenner $1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}v$ nicht mehr vorkommt. Auf die angegebene Weise findet man:

16) $$\sin\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}u+\cos\mathrm{am}(u+v)\cos\mathrm{am}v = \cos\mathrm{am}u.$$

17) $$\sin\mathrm{am}(u+v)\,\Delta\mathrm{am}u - \Delta\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}v = \sin\mathrm{am}v\,\cos\mathrm{am}u.$$

18) $$\cos\mathrm{am}(u+v)+\Delta\mathrm{am}(u+v)\,\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}v = \cos\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}v.$$

Um die Bedeutung der Gleichungen 1) bis 6) an einigen Beispielen hervorzuheben, sollen dieselben zur Darstellung einiger bemerkenswerthen Ausdrücke in Form unendlicher Producte dienen.

Die Gleichungen 1) und 4) geben:

19) $$\frac{\sin\mathrm{am}(u+v)+\sin\mathrm{am}(u-v)}{\sin\mathrm{am}(u-v)-\sin\mathrm{am}(u-v)} = \frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}v\,\Delta\mathrm{am}v}{\sin\mathrm{am}v\,\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}.$$

Die Gleichungen 7), 8) und 9) von § 22 geben:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\dfrac{2Kz}{\pi}}{\cos\ \mathrm{am}\dfrac{2Kz}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\dfrac{2Kz}{\pi}} =$$

$$\frac{\sin z}{k'\cos z}\prod_1^\infty \frac{(1-2q^{2r}\cos 2z+q^{4r})(1-2q^{2r-1}\cos 2z+q^{4r-2})}{(1+2q^{2r}\cos 2z+q^{4r})(1+2q^{2r-1}\cos 2z+q^{4r-2})} = \frac{\sin z}{k'\cos z}\prod_1^\infty \frac{1-2q^r\cos 2z+q^{2r}}{1+2q^r\cos 2z+q^{2r}}.$$

Diese Gleichung werde auf die Gleichung 19) angewandt für: $u+v=\dfrac{2Ky}{\pi}$, $u-v=\dfrac{2Kx}{\pi}$, oder für $u=\dfrac{2K}{\pi}\dfrac{y+x}{2}$, $v=\dfrac{2K}{\pi}\dfrac{y-x}{2}$,

indem man also $z = \frac{y+x}{2}$ und $z = \frac{y-x}{2}$ setzt und die erhaltenen Gleichungen dividirt. Da nun:

$$20) \quad \frac{\sin\frac{y+x}{2}\cos\frac{y-x}{2}}{\sin\frac{y-x}{2}\cos\frac{y+x}{2}} = \frac{\sin y+\sin x}{\sin y-\sin x},$$

so führt die Gleichung 19) auf:

$$21) \quad \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{\sin y+\sin x}{\sin y-\sin x}\prod_1^\infty \frac{1-2q^r\cos(y+x)+q^{2r}}{1+2q^r\cos(y+x)+q^{2r}}\frac{1+2q^r\cos(y-x)+q^{2r}}{1-2q^r\cos(y-x)+q^{2r}}.$$

Setzt man $y-\frac{i}{2}\log q$ statt $y$, also $\frac{2Ky}{\pi}+iK'$ statt $\frac{2Ky}{\pi}$, so geht die Gleichung 20) in folgende über:

$$22) \quad \frac{1+k\sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin\operatorname{am}\frac{2Ky}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\prod_1^\infty \frac{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos(y+x)+q^{2r-1}}{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos(y+x)+q^{2r-1}}\frac{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos(y-x)+q^{2r-1}}{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos(y-x)+q^{2r-1}}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(y+x-\frac{i}{2}\log q)}{\sin\frac{1}{2}(y-x-\frac{i}{2}\log q)} = \frac{e^{\frac{x+y}{2}i}q^{\frac{1}{4}}-e^{-\frac{x+y}{2}i}q^{-\frac{1}{4}}}{e^{\frac{y-x}{2}i}q^{\frac{1}{4}}-e^{-\frac{y-x}{2}i}q^{-\frac{1}{4}}} = e^{-xi}\frac{1-q^{\frac{1}{2}}e^{(y+x)i}}{1-q^{\frac{1}{2}}e^{(y-x)i}}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(y-x-\frac{i}{2}\log q)}{\cos\frac{1}{2}(y+x-\frac{i}{2}\log q)} = e^{xi}\frac{1+q^{\frac{1}{2}}e^{(y-x)i}}{1+q^{\frac{1}{2}}e^{(y+x)i}}.$$

Bildet man das Product dieser Gleichungen, so ist nach 20):

$$\frac{\sin(y-\frac{i}{2}\log q)+\sin x}{\sin(y-\frac{i}{2}\log q)-\sin x} = \frac{1-q^{\frac{1}{2}}e^{(y+x)i}}{1-q^{\frac{1}{2}}e^{(y-x)i}}\frac{1+q^{\frac{1}{2}}e^{(y-x)i}}{1+q^{\frac{1}{2}}e^{(y-x)i}}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung leitet man leicht die Gleichung 22) aus 21) ab.

Für $y = x$ geht die Gleichung 22) über in:

23)

$$\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{\frac{2r-1}{2}}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2x+q^{2r-1}}{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2x+q^{2r-1}}.$$

Man kann diese Gleichung auch leicht direct ableiten. Für $u = v$ giebt die Gleichung 1):

$$\sin\mathrm{am}\,2u = \frac{2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,u} = \frac{\frac{d\sin^2\mathrm{am}\,u}{du}}{1-k^2\sin^4\mathrm{am}\,u}.$$

Setzt man $u = \frac{2Kz}{\pi}$, multiplicirt auf beiden Seiten mit $2k\frac{2K}{\pi}$ so findet man leicht:

$$\frac{4kK}{\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{4Kz}{\pi} = \frac{d}{dz}\log\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}.$$

Mittelst der Gleichung 14) von § 22 geht diese Gleichung über in:

$$\frac{d}{dz}\log\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}} = 8\sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\sin 2(2r-1)z =$$

$$-4\frac{d}{dz}\sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}}\frac{\cos 2(2r-1)z}{2r-1} =$$

$$-\frac{d}{dz}\sum\log\frac{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2z+q^{2r-1}}{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2z+q^{2r-1}}.$$

Nach $z$ zwischen den Gränzen 0 und $z$ integrirt führt auf:

24)

$$\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}} = \prod\left(\frac{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}}\right)^2 \prod_1^\infty \frac{1-2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2z+q^{2r-1}}{1+2q^{\frac{2r-1}{2}}\cos 2z+q^{2r-1}}.$$

Die Gleichung 7) giebt:

$$\frac{1+k\,\sin\mathrm{am}\,(u+v)\,\sin\mathrm{am}\,(u-v)}{1-k\,\sin\mathrm{am}\,(u+v)\,\sin\mathrm{am}\,(u-v)} = \frac{1+k\sin^2\mathrm{am}\,u}{1-k\sin^2\mathrm{am}\,u}\cdot\frac{1-k\sin^2\mathrm{am}\,v}{1+k\sin^2\mathrm{am}\,v}.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit 24) lässt sich wieder die Gleichung 22) herleiten.

Aus den Gleichungen 2), 3), 5) und 6) folgt leicht:

$$\frac{\cos\mathrm{am}\,(u-v)+\cos\mathrm{am}\,(u+v)}{\cos\mathrm{am}\,(u-v)-\cos\mathrm{am}\,(u+v)} = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,v}{\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,v},$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-v)+\Delta\,\mathrm{am}\,(u+v)}{\Delta\,\mathrm{am}\,(u-v)-\Delta\,\mathrm{am}\,(u+v)} = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,v}{k^2\sin\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,v\,\cos\mathrm{am}\,v}.$$

Nimmt man $u-v=\frac{2Ky}{\pi}$, $u+v=\frac{2Kx}{\pi}$, legt die Gleichungen 7), 8) und 9) von § 22 zu Grunde, setzt:

$$\frac{\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}} = \frac{\cos y+\cos x}{\cos y-\cos x},$$

so findet man:

$$25)\qquad \frac{\cos\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}+\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}-\cos\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{\cos y+\cos x}{\cos y-\cos x}\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2r}\cos(x+y)+q^{4r}}{1-2q^{2r}\cos(x+y)+q^{4r}}\,\frac{1-2q^{2r-1}\cos(x+y)+q^{4r-2}}{1+2q^{2r-1}\cos(x+y)+q^{4r-2}}$$

$$\times\prod_1^\infty\frac{1+2q^{2r}\cos(x-y)+q^{4r}}{1-2q^{2r}\cos(x-y)+q^{4r}}\,\frac{1-2q^{2r-1}\cos(x-y)+q^{4r-2}}{1+2q^{2r-1}\cos(x-y)+q^{4r-2}}.$$

$$26)\qquad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}+\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}-\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{1}{4q\sin(x+y)\sin(x-y)}\times$$

$$\prod_1^\infty\frac{1-2q^{4r-2}\cos 2(x+y)+q^{8r-4}}{1-2q^{4r}\cos 2(x+y)+q^{8r}}\,\frac{1-2q^{4r-2}\cos 2(x-y)+q^{8r-4}}{1-2q^{4r}\cos 2(x-y)+q^{8r}}.$$

Nimmt man in der vorstehenden Gleichung $\frac{\pi}{2}-x$ statt $x$, so giebt dieselbe:

27)
$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Ky}{\pi}+k'}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Ky}{\pi}-k'}=$$
$$\frac{1}{4q\cos(x+y)\cos(x-y)}\times$$
$$\prod_1^\infty \frac{1+2q^{4r-2}\cos 2(x+y)+q^{8r-4}}{1+2q^{4r}\cos 2(x+y)+q^{8r}}\;\frac{1+2q^{4r-2}\cos 2(x-y)+q^{8r-4}}{1+2q^{4r}\cos 2(x-y)+q^{8r}}.$$

Als besondere Fälle dieser Gleichungen sind die folgenden von Interesse. In 25) und 26) $y=0$ gesetzt und die Quadratwurzel ausgezogen, giebt:

28)
$$\sqrt{\frac{1+\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}}=$$
$$\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}\prod_1^\infty \frac{1+2q^{2r}\cos x+q^{4r}}{1-2q^{2r}\cos x+q^{4r}}\;\frac{1-2q^{2r-1}\cos x+q^{4r-2}}{1+2q^{2r-1}\cos x+q^{4r-2}}.$$

29)
$$\sqrt{\frac{1+\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}}=\frac{1}{2\sqrt{q}\sin x}\prod_1^\infty \frac{1-2q^{4r-2}\cos 2x+q^{8r-4}}{1-2q^{4r}\cos 2x+q^{8r}}.$$

Für $y=x$ wird die Gleichung 27) einfacher:

30)
$$\frac{1+k'}{1-k'}\cdot\frac{1-(1-k')\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-(1+k')\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}=$$
$$\frac{1}{4q\cos 2x}\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{4r-2}}{1+q^{4r}}\right)^2\prod_1^\infty\frac{1+2q^{4r-2}\cos 4x+q^{8r-4}}{1+2q^{4r}\cos 4x+q^{8r}}.$$

Nimmt man hierin $x=0$, so ist:

$$\frac{1+k'}{1-k'}=\frac{1}{4q}\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{4r-2}}{1+q^{4r}}\right)^4.$$

Für $z=\frac{\pi}{2}$ findet man aus 24):

$$\frac{1+k}{1-k}=\prod_1^\infty\left(\frac{1+q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{\frac{2r-1}{2}}}\right)^4.$$

Diese Beispiele mögen genügen um die Anwendbarkeit der Additionsgleichungen zur Herstellung von Gleichungen zu zeigen, deren Ableitungen auf den ersten Augenschein mit Schwierigkeiten verbunden zu sein scheinen.

# Achter Abschnitt.

## § 25. Die elliptischen Integrale und ihre Classification.

Sind $P$ und $Q$ Polynome von $y$, ist $R$ ein Polynom vierten Grades von $y$, so heisst nach *Legendre*, wie schon in § 3 erwähnt wurde, das Integral:

$$1) \qquad H = \int \frac{P}{Q} \frac{dy}{\sqrt{R}}$$

ein elliptisches Integral. Durch äusserst einfache Betrachtungen gelang es *Legendre* (Fonct. ell. t. I Ch. IV u. V) die verschiedenen Transcendenten, zu welchen das Integral $H$ Veranlassung giebt, auf drei Integrale zu reduciren, welche keiner weiteren Vereinfachung fähig sind. Wenn auch die von *Legendre* aufgestellte Eintheilung in mancher Hinsicht unnöthig erscheinen könnte durch die Einführung der Theta-Functionen, so ist dieselbe doch insoweit von Interesse und Nutzen, als sie zu mehreren sehr bemerkenswerthen Theoremen Veranlassung gegeben hat, zu denen *Legendre*, wie zu den meisten Sätzen in diesem Zweige der Analysis, mit einem verhältnissmässig sehr geringen Aufwand von Rechnung gelangt ist.*)

In § 3 ist gezeigt, dass durch eine Substitution von der Form:

$$y = \frac{p+qz}{1+z} = \frac{ph+qx}{h+x},$$

wo $p$, $q$ und $h$ wesentlich reelle Grössen sind, die Gleichung 1) übergeht in:

$$2) \qquad H = \int \frac{X_1}{X_2} \frac{dx}{\sqrt{\pm(1\pm x^2)(1\pm c^2x^2)}},$$

wo $c$ ein positiver, ächter Bruch ist, $X_1$ und $X_2$ sind Polynome von $x$ respective von denselben Graden wie $P$ und $Q$ von $y$. Setzt man:

$$X_1 = Z_1(x^2) + x\,Z_2(x^2), \quad X_2 = \psi_1(x^2) + x\,\psi_2(x^2),$$

*) Ueber die Priorität *Eulers* der *Legendre* zugeschriebenen Sätze sehe man Note VII.

multiplicirt und dividirt mit $\psi_1(x^2) - x\psi_2(x^2)$, so ist:

$$3) \qquad \frac{X_1}{X_2} = \frac{\lambda(x^2)}{\psi(x^2)} + x\frac{\mu(x^2)}{\psi(x^2)},$$

wo zur Abkürzung $\psi(x^2) = \psi_1(x^2)^2 - x^2\psi_2(x)^2$, $\lambda(x^2) = \psi_1(x^2)Z_1(x^2) - x^2\psi_2(x^2)Z_2(x^2)$ und $\mu(x^2) = \psi_1(x^2)Z_2(x^2) - \psi_2(x^2)Z_1(x^2)$ gesetzt ist.

Die Gleichung 2) wird nach 3): $H = H_1 + H_2$, wo:

$$4) \qquad H_1 = \int \frac{\lambda(x^2)}{\psi(x^2)} \frac{dx}{\sqrt{\pm(1\pm x^2)(1\pm c^2x^2)}},$$

$$5) \qquad H_2 = \int \frac{x\,\mu(x^2)}{\psi(x^2)} \frac{dx}{\sqrt{\pm(1\pm x^2)(1\pm c^2x^2)}}.$$

Nimmt man $x^2 = t$, so ist nach 5):

$$2H_2 = \int \frac{\mu(t)}{\psi(t)} \frac{dt}{\sqrt{\pm(1\pm t)(1\pm c^2t)}}.$$

Die Function unter dem Integralzeichen ist der Differentialquotient nach $t$ einer Summe von algebraischen, logarithmischen und trigonometrischen Functionen. Das Integral $H_2$, welches nicht weiter in Betracht gezogen werden soll, führt nur auf Fälle, welche nicht eigentlich in das Gebiet der elliptischen Functionen gehören, indem eine Kenntniss derselben zu ihrer Behandlung nicht erforderlich ist.

Wendet man auf das Integral $H_1$ in 4) die in I—VIII aufgestellten Substitutionen von § 3 an, welche sämmtlich in der Form:

$$x = \frac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}$$

enthalten sind, so nimmt die Gleichung 4) die Form an:

$$H_1 = \int \frac{\Phi_1}{\Phi_2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo $\Phi_1$ und $\Phi_2$ Polynome von $\sin^2\varphi$ sind und $0 < k < 1$ ist. Durch Division und durch Zerlegung in Partialbrüche lässt sich $H_1$ schliesslich auf eine Summe von Integralen reduciren, welche sämmtlich in einem der beiden folgenden Integrale enthalten sind:

$$6) \qquad H_n = \int \frac{(\sin\varphi)^{2n}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi,$$

$$7) \qquad T_m = \int \frac{d\varphi}{(h + g\sin^2\varphi)^m \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Es sind $m$ und $n$ ganze Zahlen, und $h$ und $g$ beliebige Quantitäten. Zur Abkürzung setze man $\Delta = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$. Differentiirt man den Ausdruck $\Delta . \cos\varphi . (\sin\varphi)^{2n-3}$ nach $\varphi$, setzt rechts $\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, bringt alle Terme auf den Nenner $\Delta$, so folgt:

$$d\,\frac{\Delta . \cos\varphi (\sin\varphi)^{2n-3}}{d\varphi}$$

$$= -\frac{k^2(1-\sin^2\varphi)(\sin\varphi)^{2n-2}}{\Delta} - \frac{(1-k^2\sin^2\varphi)(\sin\varphi)^{2n-2}}{\Delta}$$

$$+ (2n-3)\,\frac{(1-\sin^2\varphi)(1-k^2\sin^2\varphi)}{\Delta}(\sin\varphi)^{2n-4}$$

$$= (2n-3)\frac{(\sin\varphi)^{2n-4}}{\Delta} - 2(n-1)(1+k^2)\frac{(\sin\varphi)^{2n-2}}{\Delta} + (2n-1)k^2\frac{(\sin\varphi)^{2n}}{\Delta}.$$

Integrirt man, so folgt mit Rücksicht auf die Gleichung 6):

$$8) \qquad \Delta . \cos\varphi (\sin\varphi)^{2n-3} = (2n-3)H_{n-2} - 2(n-1)(1+k^2)H_{n-1} + (2n-1)k^2 H_n .$$

Nimmt man hierin $n = 2, 3 \ldots$, so bemerkt man leicht, dass von $n = 2$ an sich $H_n$ ausdrücken lässt durch einen algebraischen Theil in Beziehung auf $\sin\varphi$ und die beiden Integrale $H_0$ und $H_1$. Nimmt man $n$ negativ, so sind alle Integrale auf $H_0$ und $H_{-1}$ reductibel, man kann sich auch in diesem Falle des Integrals $T_m$ bedienen.

Um für $T_m$ zu einer Reductionsgleichung zu gelangen, differentiire man den Ausdruck:

$$\frac{g^2\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta}{(h+g\sin^2\varphi)^{m-1}}.$$

Auf der rechten Seite bringe man wieder sämmtliche Terme auf den gemeinschaftlichen Nenner $\Delta$, setze im Zähler $g\sin^2\varphi = h + g\sin^2\varphi - h$, $g^2\sin^4\varphi = (h + g\sin^2\varphi)^2 - 2h(h + g\sin^2\varphi) + h^2$. Integrirt man darauf, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit die Reductionsgleichung:

$$9) \qquad \frac{g^2\sin\varphi\cos\varphi . \Delta}{(h+g\sin^2\varphi)^{m-1}} =$$

$$-(2m-5)k^2 T_{m-3} + 2(m-2)[g(1+k^2) + 3hk^2]T_{m-2}$$
$$-(2m-3)[g^2 + 2hg(1+k^2) + 3h^2k^2]T_{m-1}$$
$$+ 2(m-1)h(g+h)(g+hk^2)T_m.$$

Ist $m$ positiv, setzt man $m = 2, 3, \ldots$ so lässt sich $T_m$ allgemein ausdrücken durch algebraische Functionen in Beziehung auf $\sin\varphi$ und die Integrale:

$$T_1 = \int \frac{1}{h+g\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta}, \quad T_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta},$$

$$T_{-1} = \int \frac{h+g\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi.$$

Aus dem Vorhergehenden folgt, dass das allgemeine elliptische Integral $H$ in 1) sich ausdrücken lässt durch algebraische, logarithmische und trigonometrische Functionen und die drei Integrale:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi, \quad \int \frac{1}{h+g\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Als besondere Fälle sind die folgenden von Interesse. Nimmt man $h = 0$ und $g = 1$, substituirt in 9) für $T_m$ seinen Werth, so folgt:

$$10) \quad \frac{\cos\varphi.\Delta}{(\sin\varphi)^{2m-3}} = -(2m-5)k^2\int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{2m-6}\Delta}$$

$$+(2m-4)(1+k^2)\int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{2m-4}\Delta} - (2m-3)\int \frac{d\varphi}{(\sin\varphi)^{2m-2}\Delta}.$$

Zu dieser Gleichung ist noch die folgende zu bemerken, welche man aus 6) und 8) für $n = 1$ erhält:

$$11) \quad \frac{\Delta.\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\int \frac{1}{\sin^2\varphi\,\Delta}\,d\varphi + k^2\int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi.$$

Für $h = 1$ und $g = -1$ giebt die Gleichung 9), wenn $T_m$ aus 7) substituirt wird:

$$12) \quad \frac{\sin\varphi}{(\cos\varphi)^{2m-3}}\,\Delta = -(2m-5)k^2\int \frac{d\varphi}{(\cos\varphi)^{2m-6}\Delta}$$

$$+(2m-4)(2k^2-1)\int \frac{d\varphi}{(\cos)^{2m-4}\Delta} + (2m-3)(1-k^2)\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^{2m-2}\Delta}.$$

Nimmt man endlich $h = 1$, $g = -k^2$, also

$$T_m = \int \frac{d\varphi}{\Delta^{2m+1}},$$

so giebt die Gleichung 9)

$$13) \qquad \frac{k^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta^{2m-3}} = -(2m-5)\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2m-5}}$$

$$+(2m-4)(2-k^2)\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2m-3}} - (2m-3)(1-k^2)\int \frac{d\varphi}{\Delta^{2m-1}}.$$

Zu etwas anderen Reductionsformeln gelangt man, wenn man sich der von *Richelot* genauer untersuchten Substitution:

$$y = \frac{a+bt}{a'+b't}$$

in das Integral der Gleichung 1) bedient, wo $t$ eine der Functionen $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi$ ist. Es geht dann $\frac{P}{Q}$ über in eine rationale Function von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi$. Ist $n$ eine ganze positive oder negative Zahl, so lässt sich $H$ darstellen als ein Aggregat von Integralen, welche in einer der folgenden Formen enthalten sind:

$$14) \qquad A_n = \int \frac{(\alpha+\sin\varphi)^n}{\Delta} d\varphi, \; B_n = \int \frac{(\beta+\cos\varphi)^n}{\Delta} d\varphi,$$

$$C_n = \int \frac{(\gamma+\operatorname{tang}\varphi)_n}{\Delta} d\varphi.$$

Für diese Integrale hat *Richelot* (Crelle J. t. 34 p. 25) folgende Reductionsgleichungen aufgestellt:

$$15) \qquad (\alpha+\sin\varphi)^n \cos\varphi \Delta =$$

$$n(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2) A_{n-1} + (2n+1)\alpha(1+k^2-2\alpha^2 k^2) A_n$$

$$-(n+1)(1+k^2-6\alpha^2 k^2) A_{n+1} - 2(2n+3)\alpha k^2 A_{n+2} + (n+2) k^2 A_{n+3}.$$

$$16) \qquad k'^2(\beta+\cos\varphi)^n \sin\varphi \Delta = n(1-\beta^2)(k'^2+k^2\beta^2) B_{n-1}$$

$$+(2n+1)\beta(k'^2-k^2+2k^2\beta^2) B_n - (n+1)(k'^2-k^2+6\beta^2 k^2) B_{n+1}$$

$$+2(2n+3)\beta k^2 B_{n+2} - (n+2) k^2 B_{n+3}.$$

$$17) \qquad (\gamma+\operatorname{tang}\varphi)^n \frac{\Delta}{\cos^2\varphi} = n(1+\gamma^2)(1+k'^2\gamma^2) C_{n-1}$$

$$-(2n+1)\gamma(1+k'^2+2\gamma^2 k'^2) C_n + (n+1)(1+k'^2+6\gamma^2 k'^2) C_{n+1}$$

$$-2(2n+3)\gamma k'^2 C_{n+2} + (n+2) k'^2 C_{n+3}.$$

In den Gleichungen 15), 16) und 17) ist wie früher $k'^2 = 1-k^2$. Nimmt man $n = 0, 1, 2, \ldots$, so folgt, dass sich allgemein $A_n$ ausdrücken lässt durch $A_2$, $A_1$, $A_0$ und $A_{-1}$. Ebenso ist ersichtlich,

dass die Integrale, welche sich für $n = -1, -2 \ldots$ ergeben, ebenfalls auf $A_2$, $A_1$, $A_0$ und $A_{-1}$ reductibel sind. Dasselbe gilt natürlich für die Integrale $B_n$ und $C_n$. Es sind also die sämmtlichen elliptischen Integrale auf die zwölf folgenden reductibel, welche sich wirklich auf drei verschiedene zurückführen lassen:

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_{-1};$$
$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_{-1};$$
$$C_0,\ C_1,\ C_2,\ C_{-1}.$$

Es ist:

$$18)\qquad A_0 = B_0 = C_0 = \int \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

$$19)\qquad \begin{cases} A_1 = \alpha \int \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \frac{\sin\varphi}{\Delta}\, d\varphi, \\ B_1 = \beta \int \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \frac{\cos\varphi}{\Delta}\, d\varphi, \\ C_1 = \gamma \int \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}\, d\varphi. \end{cases}$$

$$20)\qquad \begin{cases} \int \frac{\sin\varphi}{\Delta}\, d\varphi = \frac{1}{2k} \log \frac{1 - \frac{k\cos\varphi}{\Delta}}{1 + \frac{k\cos\varphi}{\Delta}}, \\ \int \frac{\cos\varphi}{\Delta}\, d\varphi = \frac{1}{k} \arcsin(k\sin\varphi) = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tang} \frac{k\sin\varphi}{\Delta}, \\ \int \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}\, d\varphi = \frac{1}{2k'} \log \frac{1 + \frac{k'}{\Delta}}{1 - \frac{k'}{\Delta}}. \end{cases}$$

$$21)\qquad \begin{cases} k^2 A_2 = (1 + k^2\alpha^2) \int \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \Delta\, d\varphi + 2\alpha k^2 \int \frac{\sin\varphi}{\Delta}\, d\varphi, \\ k^2 B_2 = (\beta^2 k^2 - k'^2) \int \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \Delta\, d\varphi + 2\beta k^2 \int \frac{\cos\varphi}{\Delta}\, d\varphi. \\ k'^2 C_2 = \gamma^2 k'^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \Delta d\varphi + 2\gamma k'^2 \int \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta} d\varphi + \operatorname{tang}\varphi\, \Delta. \end{cases}$$

In $A_{-1}$ setze man:

$$\frac{1}{\alpha+\sin\varphi}=\frac{\alpha-\sin\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha}\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}.$$

Analog in $B_{-1}$:

$$\frac{1}{\beta+\cos\varphi}=-\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(1+\frac{\sin^2\varphi}{1-\beta^2-\sin^2\varphi}\right)+\frac{\cos\varphi}{1-\beta^2-\sin^2\varphi}.$$

Endlich in $C_{-1}$ setze man:

$$\frac{1}{\gamma+\operatorname{tang}\varphi}=\frac{\gamma-\operatorname{tang}\varphi}{\gamma^2-\operatorname{tang}^2\varphi}=$$
$$\frac{1}{\gamma}\left[1+\frac{\sin^2\varphi}{\gamma^2-(1+\gamma^2)\sin^2\varphi}\right]-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma^2-(1+\gamma^2)\sin^2\varphi}.$$

Man findet dann:

$$22)\quad\begin{cases} A_{-1}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{d\varphi}{\Delta}+\frac{1}{\alpha^3}\int\frac{\sin^2\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\alpha^2}}\frac{d\varphi}{\Delta}-\int\frac{\sin\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}, \\ B_{-1}=-\frac{\beta}{1-\beta^2}\int\frac{d\varphi}{\Delta}-\frac{\beta}{(1-\beta^2)^2}\int\frac{\sin^2\varphi}{1-\frac{\sin^2\varphi}{1-\beta^2}}\frac{d\varphi}{\Delta}+ \\ \qquad\int\frac{\cos\varphi}{1-\beta^2-\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}, \\ C_{-1}=\frac{1}{\gamma}\int\frac{d\varphi}{\Delta}+\frac{1}{\gamma^3}\int\frac{\sin^2\varphi}{1-\frac{1+\gamma^2}{\gamma^2}\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}- \\ \qquad\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma^2-(1+\gamma^2)\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}. \end{cases}$$

Die letzten Integrale auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen reduciren sich auf Logarithmen. Man verificirt leicht durch Differentiation die folgenden Resultate:

$$\int\frac{\sin\varphi}{\alpha^2-\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}=$$
$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-k^2\alpha^2)}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{1-k^2\alpha^2}{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta}}{1-\sqrt{\frac{1-k^2\alpha^2}{1-\alpha^2}}\cdot\frac{\cos\varphi}{\Delta}}.$$

$$\int \frac{\cos\varphi}{1-\beta^2-\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)(k'^2+k^2\beta^2)}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{k'^2+k^2\beta^2}{1-\beta^2}}\,\frac{k\sin\varphi}{\Delta}}{1-\sqrt{\frac{k'^2+k^2\beta^2}{1-\beta^2}}\,\frac{k\sin\varphi}{\Delta}}.$$

$$\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\gamma^2-(\gamma^2+1)\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\Delta} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{(1+\gamma^2)(1+k'^2\gamma^2)}}\log\frac{1+\sqrt{\frac{\gamma^2+1}{1+k'^2\gamma^2}}\cdot\Delta}{1-\sqrt{\frac{\gamma^2+1}{1+k'^2\gamma^2}}\cdot\Delta}.$$

Die beiden ersten Integrale ergeben sich durch die Substitution: $\sin\psi = \frac{\cos\varphi}{\Delta}$, das dritte Integral mittelst der Substitution $\Delta = z$. Führt die Reduction auf Integrale, welche nur grade Potenzen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ oder $\operatorname{tang}\varphi$ enthalten, so lassen sich die Gleichungen 15), 16) und 17) durch einfachere ersetzen. Da die Reductionsgleichungen, welche von *Richelot* herrühren, in vielen Fällen sehr nützlich sind, so sollen dieselben hier angemerkt werden. Man setze:

$$23)\qquad P_n = \int \frac{(\alpha+\sin^2\varphi)^n}{\Delta}\,d\varphi,\quad Q_n = \int \frac{(\beta+\cos^2\varphi)^n}{\Delta}\,d\varphi,$$

$$R_n = \int \frac{(\gamma+\operatorname{tang}^2\varphi)^n}{\Delta}\,d\varphi,$$

dann ist:

$$24)\quad (\alpha+\sin^2\varphi)^n\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta = -2n\alpha(1+\alpha)(1+k^2\alpha)P_{n-1}$$
$$+(2n+1)[1+2\alpha(1+k^2)+3\alpha^2k^2]P_n - (2n+2)(1+k^2+3\alpha k^2)P_{n+1}$$
$$+(2n+3)k^2P_{n+2}.$$

$$25)\quad (\beta+\cos^2\varphi)^n\sin\varphi\cos\varphi\Delta$$
$$= 2n\beta(1-\beta)(k'^2-k^2\beta)Q_{n-1} - (2n+1)[k'^2+2\beta(k'^2-k^2)-3\beta^2k^2]Q_n$$
$$+(2n+2)(k'^2-k^2-3\beta k^2)Q_{n+1} + (2n+3)k^2Q_{n+2}.$$

$$26\quad \frac{(\gamma+\operatorname{tang}^2\varphi)^n\operatorname{tang}\varphi.\Delta}{\cos^2\varphi} = -2n\gamma(1-\gamma)(1-k'^2\gamma)R_{n-1}$$
$$-(2n+1)[1-2\gamma(1+k'^2)+3\gamma^2k'^2]R_n+(2n+2)(1+k'^2-3\gamma k'^2)R_{n+1}$$
$$+(2n+3)k'^2R_{n+2}.$$

Die drei einfachsten Integrale, welche die Untersuchung nach dem Vorgange von *Legendre* ergab, sind die folgenden:

$$\int \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\, d\varphi, \quad \int \frac{1}{h + g\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Diese Integrale gaben *Legendre* Gelegenheit die elliptischen Integrale in drei Gattungen zu theilen und auf folgende Art mit besonderen functionalen Bezeichnungen zu versehn.

Setzt man:

$$27) \qquad F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}},$$

so heisst $F(\varphi)$ *das elliptische Integral erster Gattung* (vergl. § 6). Ist es nöthig den Modul $k$ mit anzumerken, so soll $F(\varphi, k)$ statt $F(\varphi)$ gesetzt werden. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt *Legendre* $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = F^1(k)$. Abgesehn von der Unbequemlichkeit dieser Bezeichnung ist dieselbe durch die von *Jacobi* gebrauchte Bezeichnung der Integrale $K$ und $K'$ (§ 6. Gleichungen 5) fast ganz in Wegfall gekommen.

Die Function $E(\varphi)$ definirt *Legendre* durch folgende Gleichung:

$$28) \qquad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} - k^2 \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}\, d\varphi,$$

und nennt $E(\varphi)$ *das elliptische Integral zweiter Gattung.* Es ist $E(\varphi, k)$ statt $E(\varphi)$ zu setzen, wenn der Modul angemerkt werden muss. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nennt *Legendre* $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ das ganze elliptische Integral zweiter Gattung und setzt $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E^1(k)$. Diese etwas unbequeme Bezeichnung soll durch die folgende ersetzt werden, deren sich auch *Jacobi* bedient hat:

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E, \quad E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = E'.$$

Für:

$$29) \qquad \Pi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1 + n \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ergiebt sich *das Integral dritter Gattung* von *Legendre*. Die durch $\Pi$ bezeichnete Function enthält eigentlich drei Argumente, die obere Gränze $\varphi$ des Integrals, den Modul $k$ und eine beliebige reelle, imaginäre oder complexe Grösse, welche *Legendre* den *Parameter* nennt. Ist der Modul oder der Parameter bei Integralen, welche mit einander verglichen werden, nicht derselbe, so muss, je nach Umständen, eine oder beide der bemerkten Quantitäten unter dem Functionszeichen $\Pi$ mit angemerkt werden.

Die Gleichungen 27) und 28) subtrahirt und durch $k^2$ dividirt geben:

$$\frac{F(\varphi) - E(\varphi)}{k^2} = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi.$$

Man könnte auch das rechts stehende Integral als Typus des elliptischen Integrals zweiter Gattung nehmen. Die Bezeichnung $E(\varphi)$ verdankt nur dem zufälligen Umstande ihre Enstehung, dass das Integral:

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

der allgemeine Ausdruck für den Bogen einer Ellipse ist und den Grund abgegeben hat zu den sehr wenig geeigneten Bezeichnungen: *elliptische Integrale* und *elliptische Functionen.*

## § 26. Die elliptischen Integrale zweiter Gattung.

Das Additionstheorem *Euler's* für die elliptischen Integrale erster Gattung hat *Legendre* veranlasst nach einem ähnlichen Satze für die Function:

$$1) \qquad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

zu suchen, eine Untersuchung, welche insofern Erfolg versprechen musste, als geometrische Betrachtungen schon vor den Arbeiten von *Legendre* zu bemerkenswerthen Sätzen geführt hatten. Diese

Sätze, welche sich auf Addition von Ellipsenbogen beziehen, enthalten besondere Fälle des Additionsthorems. Durch folgende einfache Betrachtungen ist *Legendre* (Fonct. ell. t. I. p. 43) zu seinem Satze gelangt.

Die Winkel $\varphi$, $\psi$ und $\sigma$ seien durch die Gleichung verbunden:

$$2) \quad F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma).$$

Setzt man in der Gleichung 16) von § 24 $\varphi = \operatorname{am} u$, $\psi = \operatorname{am} v$, $\sigma = \operatorname{am}(u+v)$, ferner $\varphi = \operatorname{am} v$, $\psi = \operatorname{am} u$, $\sigma = \operatorname{am}(u+v)$, so folgt:

$$\cos\sigma\cos\psi + \sin\sigma\sin\psi\,\Delta(\varphi) = \cos\varphi,$$
$$\cos\sigma\cos\varphi + \sin\sigma\sin\varphi\,\Delta(\psi) = \cos\psi.$$

oder:

$$3) \quad \Delta(\varphi) = \frac{\cos\varphi - \cos\sigma\cos\psi}{\sin\sigma\sin\psi}, \quad \Delta(\psi) = \frac{\cos\psi - \cos\sigma\cos\varphi}{\sin\sigma\sin\varphi}.$$

Man setze:

$$4) \quad E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = P$$

und sehe $\sigma$ als eine Constante an. Die vorstehende Gleichung giebt dann differentiirt:

$$\Delta(\varphi)\,d\varphi + \Delta(\psi)\,d\psi = dP.$$

Setzt man hierin für $\Delta(\varphi)$ und $\Delta(\psi)$ ihre Werthe aus 2), so lässt sich $dP$ auch auf folgende Art darstellen:

$$5) \quad dP = \frac{\cos\varphi - \cos\sigma\cos\psi}{\sin\sigma\sin\psi}\,d\varphi + \frac{\cos\psi - \cos\sigma\cos\varphi}{\sin\sigma\sin\varphi}\,d\psi =$$

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi + \sin\psi\cos\psi\,d\psi - \cos\sigma\,(\cos\psi\sin\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\sin\psi\,d\psi)}{\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi}$$

$$= \frac{d(\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\sigma\cos\varphi\cos\psi)}{2\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi}.$$

Wegen der Gleichung 1) ist aber:

$$2 - (1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi)\sin^2\sigma = 2 - \frac{[\sin\varphi\cos\psi\Delta(\psi) + \sin\psi\cos\varphi\Delta(\varphi)]^2}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

$$= \sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\,\frac{\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\varphi)\Delta(\psi)}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}\cos\varphi\cos\psi$$

oder einfacher:

$$2 - \sin^2\sigma + k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\sin^2\sigma = \sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\sigma\cos\varphi\cos\psi.$$

Da $\sigma$ constant ist, so folgt durch Differentiation:

$$d\,k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi\sin^2\sigma = d(\sin^2\varphi + \sin^2\psi + 2\cos\sigma\cos\varphi\cos\psi).$$

Die Gleichung 5) wird hierdurch:

$$6) \qquad dP = k^2 d\sin\varphi \sin\psi \sin\sigma.$$

Nach 1) ist $\varphi = \sigma$ für $\psi = 0$, dann verschwindet $P$ nach 3), durch Integration erhält man also aus 6):

$$P = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma,$$

d. i. nach 4):

$$7) \qquad E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma.$$

Diese Gleichung enthält das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung. Für $\varphi = \operatorname{am} u$, $\psi = \operatorname{am} v$, $\sigma = \operatorname{am}(u+v)$ nimmt die Gleichung 7) folgende übersichtlichere Form an:

$$8) \qquad E(\operatorname{am} u) + E(\operatorname{am} v) - E[\operatorname{am}(u+v)] = k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} v \sin\operatorname{am}(u+v).$$

Die eigentliche Bedeutung des elliptischen Integrals zweiter Gattung hat *Jacobi* auf p. 133 der „Fundamenta" gegeben, dieselbe basirt auf Einführung elliptischer Functionen und deren Entwickelungen in Reihen.

In der Gleichung 1) setze man $\varphi = \operatorname{am} u$ und nehme $\operatorname{am} w$ zur Integrationsvariabelen, dieselbe nimmt dann folgende Form an:

$$9) \qquad E(\operatorname{am} u) = \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw.$$

Für $u = \dfrac{2Kx}{\pi}$ und $w = \dfrac{2Kz}{\pi}$ folgt aus 9):

$$E\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2K}{\pi}\int_0^x \Delta^2 \operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\, dz.$$

Setzt man rechts nach Gleichung 24) in § 22:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 \Delta^2 \operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi} = 1 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2} + 8\sum_1^\infty \frac{r\,q^r}{1-q^{2r}}\cos 2rx,$$

und führt die Integration aus, so folgt:

$$10) \qquad \frac{2K}{\pi} E\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \left[1 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2}\right]x + 4\sum_1^\infty \frac{q^r}{1-q^{2r}}\sin 2rx.$$

Unter Zuziehung der Bezeichnungen:

$$11) \qquad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}\, d\Theta, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}\, d\Theta.$$

giebt die Gleichuug 10) $x = \frac{\pi}{2}$ gesetzt und mit $\frac{2}{\pi}$ multiplicirt:

$$12) \qquad \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r}}{(1+q^{2r})^2}.$$

Bei dieser Gelegenheit sei bemerkt, dass die von $x$ unabhängigen Terme der Gleichungen 22) uud 23) in § 22 sich durch $K$, $E$ und $k$ ausdrücken lassen. Die bemerkten Gleichungen geben:

$$13) \begin{cases} \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}dx = \frac{\pi}{2}\cdot 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2}, \\ \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}dx = \frac{\pi}{2}\cdot 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}, \end{cases}$$

Für $\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \Theta$, folgt $\frac{2K}{\pi}dx = \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$ und:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\,dx = \frac{2K}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\sin^2\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\,d\Theta$$

$$= \frac{2K(K-E)}{\pi},$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\,dx = \frac{2K}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2\cos^2\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\,d\Theta$$

$$= \frac{2K(E-k'^2K)}{\pi}.$$

Mittelst dieser Gleichungen lassen sich die Gleichungen 13) wie folgt schreiben:

$$14) \begin{cases} \frac{2K}{\pi}\left(\frac{2K}{\pi} - \frac{2E}{\pi}\right) = 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2}, \\ \frac{2K}{\pi}\left(\frac{2E}{\pi} - k'^2\frac{2K}{\pi}\right) = 8\sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1+q^{2r-1})^2}. \end{cases}$$

Die Gleichung 10) lässt sich nach 12) einfacher schreiben:

$$15) \qquad \frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2E}{\pi}\frac{2Kx}{\pi} + 4\sum_1^\infty \frac{q^r}{1-q^{2r}}\sin 2rx.$$

Die erste Gleichung 25) in § 22 nach $x$ differentiirt giebt:

$$\frac{d\log\vartheta(x)}{dx} = 4\sum_{1}^{\infty}\frac{q^r}{1-q^{2r}}\sin 2rx.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 15) ergiebt sich nun für das elliptische Integral zweiter Gattung folgende Definition:

$$16)\qquad \frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{2E}{\pi}\frac{2Kx}{\pi} + \frac{d\log\vartheta(x)}{dx}.$$

Die Definitionen:

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}},\quad u = \int_0^{\varphi}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

geben $F(\varphi) = u$ und $\varphi = \mathrm{am}u$, folglich $F(\mathrm{am}\,u) = u$. Wendet man dieses auf die Gleichung 16) an, bringt den ersten Term rechts auf die linke Seite, so lässt sich folgende symmetrische Gleichung herstellen:

$$17)\qquad \frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right) - \frac{2E}{\pi}F\left(\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{d\log\vartheta(x)}{dx},$$

Mittelst dieser Gleichung fand *Jacobi*, dass sich umgekehrt $\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)}$ durch ein Integral ausdrücken lässt, welches unter dem Integralzeichen die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung enthält. Integrirt man die Gleichung 17) zwischen den Gränzen 0 und $x$, bezeichnet die Integrationsvariabele durch $z$, so folgt:

$$\int_0^x\left[\frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}\right) - \frac{2E}{\pi}F\left(\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)\right]dz = \log\vartheta(x) - \log\vartheta(0),$$

oder $\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi} = \Theta$ und $\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \varphi$ gesetzt:

$$\int_0^{\varphi}\frac{KE(\Theta) - EF(\Theta)}{K\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}d\Theta = \log\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)}.$$

Diese Gleichung giebt:

$$18)\qquad \frac{\vartheta(x)}{\vartheta(0)} = e^{\int_0^{\varphi}\frac{KE(\Theta) - EF(\Theta)}{K\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}d\Theta},$$

wo also:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}d\Theta = \frac{2Kx}{\pi}$$

ist. Zu der Gleichung 18) ist *Jacobi* auf pag. 146 der „Fundamenta“ durch Untersuchung des elliptischen Integrals dritter Gattung gelangt und bediente sich dort derselben zur Definition der Theta-Function. Umgekehrt giebt die Gleichung 18), wenn

$$\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$$

gesetzt wird, die Function $\vartheta(x)$ ausgedrückt durch $k$ und $\varphi$.

Das von *Legendre* gefundene Additionstheorem ist eine unmittelbare Consequenz des Additionstheorems von *Euler*, sobald man von der Gleichung 9) ausgeht. Die Gleichungen 4) und 7) von § 24 geben:

$$\Delta^2 \operatorname{am}(z-v) - \Delta^2 \operatorname{am}(z+v) =$$
$$4k^2 \frac{\sin \operatorname{am} z \cos \operatorname{am} z \, \Delta \operatorname{am} z \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} v}{(1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} z \sin^2 \operatorname{am} v)^2}.$$

Da nun $2 \sin \operatorname{am} z \cos \operatorname{am} z \, \Delta \operatorname{am} z = \frac{d \sin^2 \operatorname{am} z}{dz}$, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

$$\Delta^2 \operatorname{am}(z-v) - \Delta^2 \operatorname{am}(z+v) =$$
$$2k^2 \frac{d}{dz} \frac{\sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} z}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} z \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Diese Gleichung nach $z$ zwischen den Gränzen 0 und $u$ integrirt giebt:

$$19) \quad \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(z-v)\,dz - \int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(z+v)\,dz =$$
$$2k^2 \frac{\sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v \, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1-k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Nun ist $z-v = w$ gesetzt:

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(z-v)\,dz = \int_{-v}^{u-v} \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw = \int_0^{u-v} + \int_{-v}^{0}$$

oder da allgemein:

$$20) \quad \int_0^{-v} f(w^2)\,dw = -\int_0^{v} f(w^2)\,dw, \text{ so ist}$$
$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(z-v)\,dz = \int_0^{u-v} \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw + \int_0^v \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw.$$

Analog ist $z+v = w$ gesetzt:

$$\int_0^u \Delta^2 \operatorname{am}(z+v)\,dz = \int_v^{u+v} \Delta^2 \operatorname{am} w \, dw = \int_0^{u+v} - \int_0^v.$$

Durch diese Transformationen wird die Gleichung 19):

$$21)\quad \int_0^{u-v} \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw - \int_0^{u+v} \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw + 2\int_0^{v} \Delta^2 \operatorname{am} w\, dw =$$

$$E[\operatorname{am}(u-v)] - E[\operatorname{am}(u+v)] + 2E(\operatorname{am} v) =$$

$$2k^2 \frac{\sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v \sin^2 \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Setzt man in 21) $f(w^2) = \Delta^2 \operatorname{am} w$, so folgt:

$$E(\operatorname{am} -v) = E(-\operatorname{am} v) = -E(\operatorname{am} v).$$

Vertauscht man in der Gleichung 20) $u$ und $v$, so folgt wegen der vorstehenden Gleichung:

$$-E[\operatorname{am}(u-v)] - E[\operatorname{am}(u+v)] + 2E(\operatorname{am} u) =$$

$$2k^2 \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}.$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung 21), dividirt durch 2, so findet man:

$$E(\operatorname{am} u) + E(\operatorname{am} v) - E[\operatorname{am}(u+v)] =$$

$$k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \frac{\sin \operatorname{am} u \cos \operatorname{am} v\, \Delta \operatorname{am} v + \sin \operatorname{am} v \cos \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} v}$$

$$= k^2 \sin \operatorname{am} u \sin \operatorname{am} v \sin \operatorname{am}(u+v),$$

welche Gleichung mit der Gleichung 8) identisch ist. Die vorstehende Herleitung ist derjenigen ähnlich, welche *Jacobi* (Fund. pag. 138) gegeben hat.

Man kann zu den vorhergehenden Resultaten gelangen, indem man von einem besonderen Falle des Multiplicationstheorems der Theta-Functionen ausgeht, welcher besondere Fall gleichzeitig die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung in sich schliesst.

Zu diesem Zwecke setze man in der Gleichung 5) des Systems I von § 19, nämlich in:

$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) - \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) =$$
$$\vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z') - \vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z'),$$

$w = -(x+y+z)$, also $w' = o$, $x' = -(y+z)$, $y' = -(x+z)$,

$$z' = -(x+y).$$

Man erhält dann die folgende Gleichung:

$$22)\quad \vartheta(x+y+z)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) + \vartheta_1(x+y+z)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) =$$
$$\vartheta(0)\vartheta(y+z)\vartheta(x+z)\vartheta(x+y).$$

Diese Gleichung werde nach $z$ differentiirt und dann $z = 0$ gesetzt. Es ergiebt sich dann:

$$\vartheta'(x+y)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(0) + \vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(y)\,\vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta(x+y)\,[\vartheta'(y)\,\vartheta(x) + \vartheta'(x)\,\vartheta(y)].$$

Diese Gleichung dividire man durch $\vartheta(0)\,\vartheta(x)\,\vartheta(y)\,\vartheta(x+y)$ und setze nach Gleichung 26) in § 20 $\vartheta'_1(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)$, sie lässt sich dann auf folgende Form bringen:

$$23)\quad \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} + \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\,\frac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\,\frac{\vartheta_1(x+y)}{\vartheta(x+y)}.$$

Wegen den Gleichungen 11) und 13) von § 22 ergiebt sich,

$$\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0) = \frac{2K}{\pi}\sqrt{k}, \qquad \frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta(z)} = \sqrt{k}\,\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kz}{\pi}$$

gesetzt:

$$24)\quad \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} + \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)} = \frac{2K}{\pi}k^2\,\sin\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}\sin\mathrm{am}\,\frac{2K(x+y)}{\pi}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach $y$, setzt dann $y = 0$, so ist:

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 k^2\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$

oder $k^2\sin^2\mathrm{am}\,u = 1 - \Delta^2\mathrm{am}\,u$ gesetzt:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Delta^2\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} + \frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}.$$

Diese Gleichung nach $x$ zwischen den Gränzen 0 und $x$ integrirt, die Integrationsvariabele durch $z$ bezeichnet, giebt:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\int_0^x \Delta^2\mathrm{am}\,\frac{2Kz}{\pi}\,dz = \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right]x + \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)},$$

oder links $\frac{2Kz}{\pi} = w$ gesetzt:

$$25)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \Delta^2\mathrm{am}\,w\,dw = \frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\right) = \left[\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}\right]x + \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}.$$

Beiläufig bemerkt giebt diese Gleichung in Verbindung mit 16):

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 - \frac{2K}{\pi}\frac{2E}{\pi} = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}$$

d. i. nach 14)

$$8\sum_1^\infty \frac{q^{2r-1}}{(1-q^{2r-1})^2} = \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}.$$

In 25) vertausche man $x$ mit $y$ und $x+y$, die erste so erhaltene Gleichung addire man zu 25), die zweite subtrahire man von dieser Summe, dann ist:

$$\frac{2K}{\pi}\left[E\left(\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\right) + E\left(\mathrm{am}\,\frac{2Ky}{\pi}\right) - E\left(\mathrm{am}\,\frac{2K(x+y)}{\pi}\right)\right] =$$
$$\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} + \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)}.$$

Für die rechte Seite substituire man den Werth aus 24), wird dann einfacher $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\frac{2Ky}{\pi} = v$ gesetzt, so ergiebt sich die Gleichung 8).

Die vorstehende Deduction hat darin vor der ersteren einen Vorzug, als dieselbe die Reihenentwickelungen von $\Delta^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ und $\log \vartheta(x)$ nicht voraussetzt, das erste Verfahren von *Jacobi* erfreut sich dagegen einer grösseren Ursprünglichkeit. Nachdem in das Integral von *Legendre* $\varphi = \mathrm{am}\,u$ gesetzt war, musste sich von selbst der Gedanke aufdrängen die Reihenentwickelung für $\Delta^2 \mathrm{am}\,u$ zur Anwendung zu bringen.

Die Gleichung 23) in etwas verschiedener Schreibart findet sich zuerst in der bemerkenswerthen Abhandlung von *Jacobi*: Formulae novae in theoria transcendentium fundamentales. (Crelle. J. t. 15. p. 204, Formel 13.) Weitere Untersuchungen über die elliptischen Integrale zweiter Gattung von *Jacobi* sind enthalten in: Suite des notices sur les fonctions elliptiques. (Crelle J. t. 3. p. 303, t. 4. p. 185) und: De functionibus ellipticis commentatio. (Crelle. J. t. 4. p. 371.) In dieser letzten Abhandlung bedient sich *Jacobi* der in 11) aufgestellten Bezeichnungen $E$ und $E'$ (vergl. p. 273), zugleich wird die Bezeichnung $E(\varphi)$ von *Legendre* dahin abgeändert, dass $E(u)$ statt $E(\mathrm{am}\,u)$ gesetzt ist. Diese Aenderung

ist in sofern wohl nicht ganz geeignet, als dadurch die Vergleichung der von *Legendre* gefundenen Resultate, mit den Resultaten, welche die Anwendung der elliptischen Functionen ergiebt, nur erschwert wird. Um diesem Uebelstand zu begegnen ist im Vorhergehenden die Characteristik $E$ im Sinne von *Legendre* angewandt, was um so unbedenklicher geschehen konnte, als dieselbe für die Theorie der elliptischen Functionen nur von untergeordneter Bedeutung ist. In den bemerkten Adhandlungen ist der umgekehrte Weg eingeschlagen wie in der Herleitung der elliptischen Integrale zweiter Gattung aus der Gleichung 22). *Jacobi* gelangt dazu mit Hülfe der Integrale Relationen zwischen den Theta-Functionen mit zusammengesetzten Argumenten zu finden, es sind diese Resultate merkwürdig, als sie zeigen, wie der grosse Geometer allmählich zu dem Aufbau jener classischen Theorie kam, welche, nach der von ihm gewählten Characteristik, gegenwärtig unter dem Namen der Theorie der Theta-Functionen bekannt ist.

## § 27. Differentialgleichungen der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Beziehung auf den Modul. Uebergang zu den elliptischen Integralen dritter Gattung.

Im Chapitre VIII des „Traité des fonct. ell." (t. I. p. 62) hat *Legendre* das interessante Resultat gefunden, dass die beiden Integrale $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ in Beziehung auf $k$ zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen und dass die Kenntniss des vollständigen Integrals einer dieser Gleichungen das Integral der andern giebt. Man gelangt hierzu mittelst der leicht zu beweisenden Gleichung:

$$1) \quad \frac{\sin^2\Theta}{(1-k^2\sin^2\Theta)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\frac{-1}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} + \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}{k^2k'^2} - \frac{1}{k'^2}\frac{d}{d\Theta}\frac{\sin\Theta\cos\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}.$$

Man setze nach *Legendre*, wie im Vorhergehenden:

$$2) \quad \begin{cases} \int_0^{\alpha} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} = F(\alpha,k), & \int_0^{\alpha} \sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}\,d\Theta = E(\alpha,k), \\ \int_0^{\beta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}} = F(\beta,k'), & \int_0^{\beta} \sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}\,d\Theta = E(\beta,k'). \end{cases}$$

Für die ganzen elliptischen Integrale finden die Bezeichnungen von *Jacobi* statt:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K,\ F\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = K',\ E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E,\ E\left(\frac{\pi}{2}, k'\right) = E'.$$

Da $k^2 + k'^2 = 1$, so ist, wenn $k'$ als Function von $k$ angesehen wird, $\frac{k}{k'} = -\frac{dk'}{dk}$, folglich $\frac{d\psi(k')}{dk} = -\frac{d\psi(k')}{dk'}\frac{k}{k'}$. Mit Rücksicht auf diese Bemerkung und die Gleichung 1) geben die Gleichungen 2) nach $k$ differentiirt:

3) $$\frac{dF(\alpha, k)}{dk} = -\frac{F(\alpha, k)}{k} + \frac{E(\alpha, k)}{kk'^2} - \frac{k}{k'^2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}.$$

4) $$\frac{dE(\alpha, k)}{dk} = -\frac{F(\alpha, k)}{k} + \frac{E(\alpha, k)}{k}.$$

5) $$\frac{dF(\beta, k')}{dk} = \frac{kF(\beta,k')}{k'^2} - \frac{E(\beta, k')}{kk'^2} + \frac{\sin\beta\cos\beta}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}$$

6) $$\frac{dE(\beta, k')}{dk} = \frac{kF(\beta, k')}{k'^2} - \frac{kE(\beta, k')}{k'^2}.$$

Differentiirt man jede der Gleichungen 3) und 4) nach $k$, so leitet man die folgenden Differentialgleichungen ab:

7) $$d\frac{\left(kk'^2\frac{dF(\alpha, k)}{dk}\right)}{dk} - kF(\alpha, k) + kd\frac{\left(\frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\right)}{dk} = 0.$$

8) $$d\frac{\left(k\frac{dE(\alpha, k)}{dk}\right)}{dk} + \frac{k}{k'^2}E(\alpha, k) - \frac{k}{k'^2}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = 0.$$

Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gehn diese Gleichungen über in:

9) $$d\frac{\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right)}{dk} - kK = 0,\ d\frac{\left(k\frac{dE}{dK}\right)}{dK} + \frac{kE}{k'^2} = 0.$$

Setzt man $y$ statt $K$ und $z$ statt $E$, so ist:

10) $$d\frac{\left(kk'^2\frac{dy}{dk}\right)}{dk} - ky = 0,\ d\frac{\left(k\frac{dz}{dk}\right)}{dk} + \frac{kz}{k'^2} = 0.$$

Führt man in diese Gleichungen $k'$ statt $k$ als unabhängige Variabele ein, so werden dieselben in folgende transformirt:

$$11)\quad d\frac{\left(k'k^2\frac{dy}{dk'}\right)}{dk'} - k'y = 0,\quad d\frac{\left(\frac{k^2}{k'}\frac{dz}{dk'}\right)}{dk'} + \frac{kz}{k'^2} = 0.$$

Die erste der Gleichungen 11) in Verbindung mit der ersten Gleichung 10) zeigt, dass die Differentialgleichung für $y$ durch Vertauschung von $k$ mit $k'$ unverändert bleibt. Da nun nach 9) $y = K$ der ersten Gleichung 10) genügt, so ist $K'$ das zweite particuläre Integral, mithin:

$$12)\quad y = AK + BK',$$

das vollständige Integral, wo $A$ und $B$ Constanten sind. Die Gleichungen 3) — 6) geben $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$ gesetzt:

$$13)\quad \begin{cases} \frac{dK}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{kk'^2}, & \frac{dK'}{dk} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{E'}{kk'^2}, \\ \frac{dE}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{k}, & \frac{dE'}{dk} = \frac{kK'}{k'^2} - \frac{kE'}{k'^2}. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$E = k'^2\left(k\frac{dK}{dk} + K\right) = k'^2\frac{dkK}{dk}.$$

Der allgemeine Werth von $z$ ergiebt sich also aus dem allgemeinen Werth von $y$ in den Gleichungen 10), wenn

$$z = k'^2\frac{dky}{dk}$$

gesetzt wird. Da nun $y$ die Werthe $K$ und $K'$ hat, so folgt:

$$z = Ck'^2\frac{dkK}{dk} + Dk'^2\frac{dkK'}{dk},$$

wo $C$ und $D$ Constanten sind, der Factor von $C$ ist nach 13) gleich $E$, der Factor von $D$ gleich $K' - E'$. Das vollständige Integral der Differentialgleichung für $z$ ist also:

$$14)\quad z = CE + D(K' - E').$$

Setzt man in den Gleichungen 7) und 8) $y_1$ statt $F(\alpha, k)$, $z_1$ statt $E(\alpha, k)$, so erhält man:

$$15)\quad \begin{cases} d\frac{\left(kk'^2\frac{dy_1}{dk}\right)}{dk} - ky_1 + kd\frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}}{dk} = 0, \\ d\frac{\left(k\frac{dz_1}{dk}\right)}{dk} + \frac{kz_1}{k'^2} - \frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{k'^2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = 0. \end{cases}$$

Für $y_1 = y + F(\alpha, k)$, $z_1 = z + E(\alpha, k)$ gehn die Gleichungen 15) in die Gleichungen 10) über, wegen 12) und 14) folgt hieraus unmittelbar, dass:

$$y_1 = F(\alpha, k) + AK + BK',$$
$$z_1 = E(\alpha, k) + CE + D(K' - E'),$$

die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen 15) sind.

Mittelst der Gleichungen 13) hat *Legendre* (F. E. t. 1. p. 60) eine merkwürdige Beziehung zwischen den ganzen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung bewiesen, auf welche ursprünglich der besondere Werth $k = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \sin 15^0$ geführt hatte. Setzt man nämlich:

$$16) \quad P = KE' + K'E - KK',$$

so folgt unter Zuhülfenahme der Gleichungen 13):

$$\frac{dP}{dk} = 0,$$

d. h. $P$ ist von $k$ unabhängig, also constant. Man kann die Constante auf verschiedene Arten bestimmen. Setzt man in der Gleichung 16) rechts die entsprechenden Integrale, nimmt $u$ in $K$ und $E$, ferner $v$ in $K'$ und $E'$ als Integrationsvariabele, so ist:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2 v}}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} + \frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 v}} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,\sqrt{1-k'^2\sin^2 v}} \right] du\, dv$$

oder einfacher:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k'^2\sin^2 v - k^2\sin^2 u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,\sqrt{1-k'^2\sin^2 v}}\, du\, dv.$$

Nimmt man $k = 0$, also $k' = 1$, so folgt:

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos v\, du\, dv = \frac{\pi}{2}.$$

Die Gleichung 16) wird hierdurch:

$$17) \quad \frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK'.$$

Diese berühmte Gleichung, welche eine Relation zwischen bestimmten Integralen darstellt, kann als das erste Beispiel einer Determinante angesehen werden, deren Elemente bestimmte Integrale sind. Von diesem Gesichtspunkte aus ist die Gleichung 17) einer Verallgemeinerung fähig. (Man vergl. hierüber *Haedenkamp* in Crelle J. t. 22 p. 184, *Catalan* in den Mémoires couronnées de l'Ac. de Bruxelles t. 14, *Enneper* in der Zeitschrift für Mathematik t. 6 p. 300 u. t. 11 p. 69). Unter den verschiedenen Beweisen, welche von der Gleichung 17) gegeben sind, basirt die Mehrzahl auf geometrischen Betrachtungen, wie z. B. bei *Moigno.* (Leçons de Calcul différ. et de C. intégr. t. 2 p. 253).

Definirt man $Q$ durch die folgende Gleichung:

18) $$Q = F(\alpha, k)\,E(\beta, k') + E(\alpha, k)\,F(\beta, k') - F(\alpha, k)\,F(\beta, k'),$$

so geht $Q$ in $P$ über, definirt durch die Gleichung 17), für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und $\beta = \frac{\pi}{2}$. Es bietet sich von selbst der Gedanke dar, auf $Q$ den für $P$ befolgten Weg von *Legendre* anzuwenden. Wendet man die Gleichungen 3)—6) auf den Differentialquotienten von $Q$ nach $k$ an, so findet man nach einigen Reductionen:

$$\frac{dQ}{dk} = \frac{\sin\beta\cos\beta}{k\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}\,[E(\alpha, k) - F(\alpha, k)]$$
$$+ \frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{k'^2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\,[F(\beta, k') - E(\beta, k')],$$

oder rechts die Integrale substituirt:

$$\frac{dQ}{dk} = -\frac{k\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\,d\Theta$$
$$+ \frac{k\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\int_0^{\beta}\frac{\sin^2\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}\,d\Theta.$$

Setzt man:

19) $$R = \cos\beta\int_0^{\alpha}\sin\Theta\,\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\Theta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}{\sin\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\,d\Theta$$
$$+ \cos\alpha\int_0^{\beta}\sin\Theta\,\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\Theta\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\sqrt{1-k'^2\sin\Theta}}\,d\Theta,$$

so ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$\frac{dQ}{dk} = -\frac{dR}{dk}.$$

Bezeichnet man durch $Q_0$ und $R_0$ die Werthe von $Q$ und $R$ für $k = 0$, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$Q - Q_0 = -R + R_0.$$

Die Gleichung 18) giebt $Q_0 = \alpha \sin\beta$, mithin ist:

$$20) \quad Q = \alpha \sin\beta - R + R_0.$$

Die beiden Integrale auf der rechten Seite der Gleichung 19) transformire man durch partielle Integration nach der Formel:

$$\int_0^\gamma \sin\Theta \operatorname{arc\,tang} f(\Theta)\, d\Theta = -\int_0^\gamma \operatorname{arc\,tang} f(\Theta) \frac{d\cos\Theta}{d\Theta} d\Theta =$$

$$-\cos\gamma \operatorname{arc\,tang} f(\gamma) + \operatorname{arc\,tang} f(0) + \int_0^\gamma \frac{\cos\Theta f'(\Theta)}{1 + f(\Theta)^2} d\Theta.$$

Wendet man noch die Relation:

$$\operatorname{arc\,tang} w + \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{w} = \frac{\pi}{2}$$

an, so lässt sich der Werth von $R$ auf folgende Form bringen:

$$21) \quad R = -\frac{\pi}{2} \cos\alpha \cos\beta$$

$$+ \sin\beta \cos\beta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2\beta} \int_0^\alpha \frac{\cos^2\Theta}{1 - \cos^2\beta \cos^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\Theta}}$$

$$+ \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2\alpha} \int_0^\beta \frac{\cos^2\Theta}{1 - \cos^2\alpha \cos^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\Theta}}.$$

Für $k = 0$ geht diese Gleichung über in:

$$R_0 = -\frac{\pi}{2} \cos\alpha \cos\beta + \int_0^\alpha \frac{\sin\beta \cos^2\beta \cos^2\Theta}{1 - \cos^2\beta \cos^2\Theta} d\Theta$$

$$+ \int_0^\beta \frac{\sin\alpha \cos\alpha \cos\Theta}{1 - \cos^2\alpha \cos^2\Theta} d\Theta$$

d. i.

$$R_0 = -\frac{\pi}{2} \cos\alpha \cos\beta - \alpha \sin\beta + \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man die Werthe von $R_0$, $R$ und $Q$ aus der vorstehenden Gleichung, aus 21) und 18) in 20), so folgt:

22) $$\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^{\beta}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}=$$

$$\frac{\pi}{2}-[F(\alpha,k)\,E(\beta,k')+E(\alpha,k)\,F(\beta,k')-F(\alpha,k)\,F(\beta,k')].$$

Diese Gleichung enthält auf der linken Seite zwei Integrale, welche sich in ihrer Form nur unwesentlich von der typischen Form unterscheiden, welche *Legendre* für die elliptischen Integrale dritter Gattung angenommen hat. Die Betrachtung dieser Integrale hat *Legendre* auf die Gleichung 22) geführt (Fonct. ell. t. I. p. 133) und zwar auf einem Wege, der von dem obigen gänzlich verschieden ist. Man kann aus der Gleichung 22) durch Substitutionen noch andere Gleichungen herleiten. Man setze z. B. in 22) zuerst $\beta=\frac{\pi}{2}$, ziehe von der so erhaltenen Gleichung die Gleichung 22) ab. Mit der neuen Gleichung operire man ebenso in Beziehung auf $\alpha$, an Stelle der Gleichung 22) tritt dann die folgende:

23) $$\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_{\beta}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}=$$

$$[K-F(\alpha,k)][E'-E(\beta,k')]+[E-E(\alpha,k)][K'-F(\beta,k')]-$$
$$[K-F(\alpha,k)][K'-F(\beta,k')].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich mittelst der Additionstheoreme der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung sehr vereinfachen.

Nimmt man $\operatorname{am}u=\alpha$ und $\operatorname{am}(K-u)=\gamma$, so ist nach § 7 $k'\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\gamma=1$. In der Gleichung 3) von § 23 kann man dann $\varphi=\alpha$, $\psi=\gamma$ und $\sigma=\frac{\pi}{2}$ setzen. Hieraus folgt: $F(\alpha,k)+F(\gamma,k)=K$ oder $F(\gamma,k)=K-F(\alpha,k)$. Die Gleichung 6) des

§ 26 giebt dann: $E(\alpha,k)+E(\gamma,k)-E=k^2\sin\alpha\sin\gamma$, also: $E(\gamma,k)-k^2\sin\alpha\sin\gamma=E-E(\alpha,k)$. Nimmt man ferner $F(\delta,k')=K'-F(\beta,k')$, so giebt das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung: $E(\delta,k')-k'^2\sin\beta\sin\delta=E'-E(\beta,k')$. In dem ersten Integrale links der Gleichung 23) mache man die Substitution $k'\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}w=1$, im zweiten setze man $k\operatorname{tang}\Theta\operatorname{tang}w=1$. Auf diese Art ergiebt sich eine weitere Relation zwischen elliptischen Integralen dritter Gattung, die hier nicht weiter ausgeführt werden soll, da sie sich einfacher mit Hülfe der elliptischen Integrale dritter Gattung ergiebt. Dasselbe gilt von anderen Combinationen der Integrale 2), welche man ähnlich wie den in 18) aufgestellten Ausdruck $Q$ behandeln kann.

Die Integration der Gleichungen 7) und 8) lässt sich auch mittelstder particulären Integrale der Gleichungen 10) nach der Methode von *Lagrange* ausführen. Man gelangt auf diesem Wege zu merkwürdigen Relationen, welche hier der Kürze halber übergangen werden sollen. (*Enneper*: Bemerkungen über eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zeitschrift f. Mathem. t. 15. p. 56—64).

Eine interessante Anwendung der Gleichungen 13) auf die Darstellung von $\frac{1}{K}\frac{dK}{dk}=\frac{1}{kk'^2}\frac{E}{K}-\frac{1}{k}$ in Form eines Kettenbruchs hat *Malmstèn* in der: Note sur les fonctions Elliptiques (Crell. J. t. 39. p. 116—122) gegeben. In Folge eines Versehens, betreffend die Weglassung des constanten Factors 4 in den Nennern der einzelnen Brüche des Kettenbruchs, sind die mitgetheilten Resultate ungenau.

## § 28. Die elliptischen Integrale dritter Gattung. Untersuchungen von Legendre über dieselben, betreffend den Parameter.

Aehnlich wie die elliptischen Integrale zweiter Gattung lassen sich die elliptischen Integrale dritter Gattung, mit Hülfe der elliptischen Functionen, und namentlich der Elemente derselben, der Theta-Functionen, genauer untersuchen. Auch im vorliegenden Falle soll eine gedrängte Uebersicht der Arbeiten von *Legendre*

über den bemerkten Gegenstand vorangehn. Die Methoden, deren sich *Legendre* bedient hat, sind so elementarer Natur, dass eine kurze Erwähnung derselben wohl geboten erscheint.

Nach Formel 29) in § 25 setze man:

$$1) \qquad \Pi(n, k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{1 + n\sin^2\Theta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}}.$$

Behalten die beiden Quantitäten $k$ und $n$ im Laufe einer Rechnung dieselben Werthe, so soll die linke Seite der Gleichung 1) einfach durch $\Pi(\varphi)$ bezeichnet werden.

Im t. I der „Fonct. ellipt." finden sich auf p. 68—74, 143—163 folgende Resultate, betreffend die einfachsten Formen, welche für den *Parameter* $n$ zu Grunde gelegt werden können.

Setzt man:

$$2) \qquad \Delta = \sqrt{1 - k^2\sin\varphi}, \; z = \frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta},$$

so ist:

$$3) \qquad \frac{1}{1 + (1+n)\left(1 + \frac{k^2}{n}\right)z^2} \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1 - k^2\sin^4\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\left(1 + \frac{k^2}{n}\sin^2\varphi\right)}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[-1 + \frac{1}{1 + n\sin^2\varphi} + \frac{1}{1 + \frac{k^2}{n}\sin^2\varphi}\right].$$

Diese Gleichung integrire man zwischen den Gränzen 0 und $\varphi$, bezeichne in den Integralen rechts die Integrationsvariabele durch $\Theta$ und substituire links für $z$ seinen Werth aus 2). Man erhält dann:

$$4) \qquad \frac{\operatorname{arc\,tang}\left\{\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta}\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}\right\}}{\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}} =$$

$$-F(\varphi) + \int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{1 + n\sin^2\Theta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+ \int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{1 + \frac{k^2}{n}\sin^2\Theta} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\Theta}} =$$

$$-F(\varphi) + \Pi(n, \varphi) + \Pi\left(\frac{k^2}{n}, \varphi\right).$$

Diese Gleichung gestattet $n$ zwischen den Gränzen $-1$ und $+1$ anzunehmen. Ist $n$ positiv und grösser wie $k^2$, also $n = k^2(1+g^2)$, so ist $\frac{k^2}{n} = \frac{1}{1+g^2}$, was ein positiver, ächter Bruch ist. Die Function $\Pi$ mit positivem Parameter, welcher grösser wie die Einheit ist, lässt sich auf eine ähnliche Function reduciren, deren Parameter positiv und kleiner wie die Einheit ist. Für $n = \cot^2\alpha$ nimmt die Gleichung 4) folgende Form an:

$$5)\quad \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}\,\text{arc tang}\left(\frac{\tang\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) = -F(\varphi)+\Pi(\cot^2\alpha,\varphi)+\Pi(k^2\tang^2\alpha,\varphi).$$

Für ein negatives $n$ unterscheide man die drei Intervalle $(0,-k^2)$, $(-k^2,-1)$ und $(-1,-\infty)$. Demgemäss setze man: $n = -k^2\sin^2\alpha$, $n = -(1-k'^2\sin^2\alpha)$ und $n = -\frac{1}{\sin^2\alpha}$. Es sei zuerst $n = -(1-k'^2\sin^2\alpha)$. Die Gleichung 4) giebt dann:

$$6)\quad \frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{k'^2\sin\alpha\cos\alpha}\,\text{arc tang}\,\frac{k'^2\sin\alpha\cos\alpha\tang\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}} = -F(\varphi)+\Pi(-1+k'^2\sin^2\alpha,\varphi)+\Pi\left(-\frac{k^2}{1-k'^2\sin^2\alpha},\varphi\right).$$

Die Gleichung 3) geht für $n = -k^2\sin^2\alpha$ über in:

$$7)\quad \frac{1}{1-(1-k^2\sin^2\alpha)\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}z^2}\,\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\left(-1+\frac{1}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}+\frac{1}{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\alpha}}\right).$$

Hier bietet sich bei der Integration insofern eine kleine Schwierigkeit dar, als die Gränzen von $\varphi$ zu beachten sind. Liegt $\varphi$ zwischen den Gränzen 0 und $\alpha$, so giebt die Gleichung 7) integrirt und $z = \frac{\tang\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ gesetzt:

$$8)\quad \frac{\tang\alpha}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\log\frac{\tang\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{\tang\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-\tang\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} = -F(\varphi)+\Pi(-k^2\sin^2\alpha,\varphi)+\Pi\left(-\frac{1}{\sin^2\alpha},\varphi\right).$$

Ist $\varphi > \alpha$, liegt $\varphi$ zwischen den Gränzen $\alpha$ und $\frac{\pi}{2}$, so lässt sich die Definition 1) nicht mehr bei der Integration der Gleichung 7) anwenden, man muss dann die Integrale hinsetzen. Integrirt man zwischen den Gränzen $\varphi$ und $\frac{\pi}{2}$, setzt für $z$ seinen Werth aus 2) ein, so ergiebt sich:

$$9)\quad \frac{\operatorname{tang}\alpha}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}} \log \frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}+\operatorname{tang}\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}-\operatorname{tang}\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= K - F(\varphi) - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+ \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\sin^2\Theta}{\sin^2\alpha}-1} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}.$$

Von dieser Gleichung macht *Legendre* keinen Gebrauch, indem er folgende nicht ganz zulässige Beschränkung (l. c. p. 71) einführt:

„Au reste pour éviter toute anomalie étrangère à l'objet dont nous nous occupons, et pour ne considérer des fonctions $\Pi$ que celles qui sont positives et finies, nous ferons abstraction, dans tout qui suit, du cas où le paramètre $n$ est à la fois negatif et plus grand que l'unité.

Die Gleichungen 5), 6), 8) und 9) gestatten den Parameter zwischen den Gränzen $-1$ und 1 anzunehmen. Es finden hier drei Fälle statt, je nach dem Werthe des Parameters. Dieselben lassen sich auf zwei Fälle reduciren, indem die Function $\Pi$ mit einem positiven Parameter sich auf die analoge Function reduciren lässt, deren Parameter zwischen den Gränzen $-k^2$ und $-1$ liegt.

Ist $g$ eine beliebige Quantität, setzt man:

$$10)\quad y = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta},$$

so folgt:

$$11)\quad \frac{1}{1+gy^2}\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\frac{1-2\sin^2\varphi+k^2\sin^4\varphi}{1+(g-k^2)\sin^2\varphi-g\sin^4\varphi}.$$

Man setze nun:

$$1+(g-k^2)\sin^2\varphi-g\sin^4\varphi = (1+n\sin^2\varphi)(1-m\sin^2\varphi),$$

oder:

$$g-k^2 = n-m,\quad g = mn,$$

also:

$$12)\quad m = \frac{k^2+n}{1+n},\quad g = mn.$$

Die Gleichung 11) wird dann:

$$13)\quad \frac{1}{1+mny^2}\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\frac{1-2\sin^2\varphi+k^2\sin^4\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)(1-m\sin^2\varphi)} = \frac{1}{\Delta}\left(-\frac{k^2}{mn}+\frac{1+n}{n}\frac{1}{1+n\sin^2\varphi}-\frac{1-m}{m}\frac{1}{1-m\sin^2\varphi}\right);$$

wo also nach 12) $(1+n)(1-m) = k'^2$. In der Gleichung 13) nehme man $n = \cot^2\alpha$, nach 12) ist dann $m = 1-k'^2\sin^2\alpha$. Integrirt man nach $\varphi$ zwischen den Gränzen 0 und $\varphi$, setzt für $y$ den Werth aus 10) ein, multiplicirt die erhaltene Gleichung mit $\cos^2\alpha$, so ergiebt sich:

$$14)\quad \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\alpha}}{\tan\alpha}\right) = \frac{-k^2\sin^2\alpha}{1-k'^2\sin^2\alpha}F(\varphi)+\Pi(\cot^2\alpha,\varphi)-\frac{k'^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{1-k'^2\sin^2\alpha}\Pi(-1+k'^2\sin^2\alpha,\varphi)$$

Durch diese Gleichung lässt sich ein positiver Parameter $\cot^2\alpha$ auf den negativen Parameter $-1+k'^2\sin^2\alpha$ reduciren.

Nimmt man in der Gleichung 13) $n = -k^2\sin^2\alpha$, so ist nach 12) $m = \frac{k^2\cos^2\alpha}{1-k^2\sin^2\alpha}$. Integrirt man nach $\varphi$ zwischen den Gränzen 0 und $\varphi$, setzt für $y$ den Werth aus 10) ein, multiplicirt die erhaltene Gleichung mit $\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, so folgt:

15)

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}\log\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-k^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\alpha\cos\alpha} = F(\varphi)-\cos^2\alpha\,\Pi(-k^2\sin^2\alpha,\varphi)-\frac{k'^2\sin^2\alpha}{1-k^2\sin^2\alpha}\Pi\left(\frac{-k^2\sin^2\alpha}{1-k^2\cos^2\alpha},\varphi\right).$$

Setzt man $k'\tan\alpha\tan\beta = 1$, so lässt sich die rechte Seite von 15) einfacher schreiben:

$$F(\varphi)-\cos^2\alpha\,\Pi(-k^2\sin^2\alpha,\varphi)-\cos^2\beta\,\Pi(-k^2\sin^2\beta,\varphi).$$

Der Parameter hat in beiden Functionen $\Pi$ dieselbe Form. Nimmt $\alpha$ zu, so nimmt $\beta$ ab und umgekehrt. Für $\alpha = \beta$ giebt $k' \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta = 1$, $k' \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$, oder $k^2 \sin^2\alpha = 1 - k'$. Liegt der Parameter zwischen den Gränzen 0 und $k^2$, so kann derselbe auf die Gränzen 0 und $1 - k'$ reducirt werden.

Als Gesammtresultat der vorhergehenden Untersuchungen ergiebt sich, dass jeder Parameter auf eine der Formen $-k^2 \sin^2\alpha$ und $-(1-k'^2 \sin^2\alpha)$ reductibel ist.

Als besondere Fälle der Gleichung 4) sind, bemerkenswerth $n = \pm k$. Dann ist:

$$16) \quad 2\int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{(1 \pm k \sin^2\Theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} =$$

$$F(\varphi) + \frac{1}{1 \pm k} \operatorname{arc\,tang} \frac{(1 \pm k)\operatorname{tang}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Für $n = -1$ und $n = -k^2$ führt die Gleichung 4) auf besondere Fälle allgemeinerer Relationen, welche in § 25 aufgestellt sind.

Die Gleichungen 3) und 11) hat *Legendre* (l. c. p. 143) auf folgende Art noch weiter verallgemeinert und dadurch ein Mittel gefunden, die elliptischen Integrale dritter Gattung mit complexen Parametern auf solche mit reellen Parametern zu reduciren.

Es sei:

$$17) \quad t = \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{1 + p \sin^2\varphi} \frac{1}{\Delta},$$

dann ist:

$$18) \quad \frac{1}{1+pt^2}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\frac{1-(2+p)\sin^2\varphi+(1+2p)k^2\sin^4\varphi-pk^2\sin^6\varphi}{(1+p\sin^2\varphi)^2(1-k^2\sin^2\varphi)+q\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}$$

Man setze:

$$19) \quad (1+px)^2(1-k^2x)+qx(1-x) = (1+nx)(1+n'x)(1+mx)$$

also:

$$20) \quad \begin{cases} -p^2k^2 = mnn', \; p^2-q-2pk^2 = m(n+n')+nn', \\ 2p+q-k^2 = m+n+n'. \end{cases}$$

In 19) $x = 1$ und $x = \frac{1}{k^2}$ giebt die Relationen:

$$21) \quad (1+p)^2k'^2 = (1+n)(1+n')(1+m).$$

$$22) \quad -q k^2 k'^2 = (k^2+n)(k^2+n')(k^2+m).$$

Es seien $n$ und $n'$ gegeben. In 21) aus 20) $m = -\frac{p^2 k^2}{nn'}$ substituirt giebt für $p$ die quadratische Gleichung:

$$p^2\left[k'^2 + k^2\frac{(1+n)(1+n')}{nn'}\right] + 2p k'^2 = (1+n)(1+n') - k'^2$$

und hieraus:

$$23) \quad p\left[k'^2 + k^2\frac{(1+n)(1+n')}{nn'}\right] + k'^2 = \pm\sqrt{(1+n)(1+n')\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\left(1+\frac{k^2}{n'}\right)}.$$

Sind $n$ und $n'$ conjugirte complexe Quantitäten, $n = r+si$, $n' = r-si$, so sind die beiden Werthe von $p$ in 23) reelle Grössen. Man bezeichne dieselben durch $p'$ und $p''$. Diesen reellen Werthen von $p$ entsprechen nach 20), oder auch nach 21), je zwei reelle Werthe von $m$ und $q$, welche durch $m'$, $m''$ und $q'$, $q''$ bezeichnet werden sollen. Wegen der Gleichung 19) lässt sich die rechte Seite der Gleichung 18) in Beziehung auf $\sin^2\varphi$ in Partialbrüche zerlegen. Mit Rücksicht auf die Gleichung $-p^2k^2 = mnn'$, folgert man aus 18):

$$24) \quad \frac{1}{1+qt^2}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{1}{\Delta}\frac{1-(2+p)\sin^2\varphi+(1+2p)k^2\sin^4\varphi-pk^2\sin^6\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)(1+n'\sin^2\varphi)(1+m\sin^2\varphi)}$$
$$= \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{p} + \frac{A}{1+n\sin^2\varphi} + \frac{B}{1+n'\sin^2\varphi} + \frac{C}{1+m\sin^2\varphi}\right),$$

wo $A$, $B$ und $C$ die folgenden Bedeutungen haben:

$$25) \quad \begin{cases} A = \dfrac{n^3+(2+p)n^2+(1+2p)k^2n+pk^2}{n(n-n')(n-m)}, \\ B = \dfrac{n'^3+(2+p)n'^2+(1+2p)k^2n'+pk^2}{n'(n'-n)(n'-m)}, \\ C = \dfrac{m^3+(2+p)m^2+(1+2p)k^2m+pk^2}{m(m-n)(m-n')}. \end{cases}$$

Den Werthen $p'$ und $p''$ von $p$ entsprechen nach 25) zwei Werthsysteme $A'$, $B'$, $C'$ und $A''$, $B''$, $C''$ von $A$, $B$, $C$.

Mit Rücksicht auf den Werth von $t$ aus 17) giebt die Gleichung 24) integrirt:

$$26)\quad \frac{1}{\sqrt{q}}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+p\sin^2\varphi}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{p}F(\varphi)+A\Pi(n,\varphi)+B\Pi(n',\varphi)+C\Pi(m,\varphi).$$

Setzt man in dieser Gleichung successive $p'$ und $p''$ statt $p$, diesem entsprechend $q'$, $m'$, $A'$, $B'$, $C'$ und $q''$, $m''$, $A''$, $B''$, $C''$ statt $q$, $m$, $A$, $B$, $C$, so erhält man zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von $\Pi(n,\varphi)$ und $\Pi(n',\varphi)$. Sind $n$ und $n'$ conjugirte complexe Grössen, so sind in Folge der Gleichungen 20)—23) $p$, $q$ und $m$ reelle Grössen, nach 25) ist $C$ ebenfalls reell, während $A$ und $B$ conjugirte complexe Grössen sind. Es lässt sich dann allgemein $\Pi(r\pm si,\varphi)$ ausdrücken durch $F(\varphi)$, $\Pi(m',\varphi)$, $\Pi(m'',\varphi)$ und trigonometrische Functionen.

Uebrigens lassen sich die beiden Gleichungen, welche aus 26) für $p=p'$ und $p=p''$ folgen, allgemein anwenden, gleichviel ob $n$, $n'$ reelle oder conjugirte complexe Grössen sind.

In Folge der Gleichungen 19) giebt Gleichung 24) $\sin^2\varphi = x$ gesetzt:

$$\frac{1-(2+p)x+(1+2p)k^2x^2-pk^2x^3}{(1+nx)(1+n'x)(1+mx)} = \frac{1}{p}+\frac{A}{1+nx}+\frac{B}{1+n'x}+\frac{C}{1+mx}.$$

Durch Wegschaffung der Nenner auf der rechten Seite erhält man leicht:

$$27)\quad \begin{cases} A+B+C = 1-\dfrac{1}{p}, \\ A(m+n')+B(m+n)+C(n+n')+\dfrac{m+n+n'}{p} = -(2+p), \\ Amn'+Bmn+Cnn'+\dfrac{mn+mn'+nn'}{p} = (1+2p)k^2, \\ \dfrac{mnn'}{p} = -pk^2. \end{cases}$$

Man kann sich auch der vorstehenden Gleichungen zur Berechnung von $A$, $B$ und $C$ bedienen. Ist $C$ bekannt, so geben die beiden ersten Gleichungen 27):

$$28)\quad \begin{cases} A+B = 1-\dfrac{1}{p}-C, \\ An+Bn' = 2+p+m+n+n'-Cm. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gewähren in manchen Fällen für $A$ und $B$ leichtere Berechnungen wie die Gleichungen 25).

Mittelst der vorstehenden Entwickelungen hat *Legendre* die Beispiele $n = ke^{\alpha i}$, $n' = ke^{-\alpha i}$ (l. c. p. 149) und $n = -1 + k'e^{\alpha i}$, $n' = -1 + k'e^{-\alpha i}$ (l. c. p. 151) weitläufiger behandelt.

Die Gleichungen 20) sind auf p. 157 unter dem Gesichtspunkt betrachtet, dass $m$ eine gegebene complexe Quantität ist, dagegen $n$ und $n'$ reell sein sollen. Diese zweite Methode unmittelbar $\Pi(r+si, \varphi)$ zu berechnen ist etwas weitläufiger wie die erste darzustellen und scheint, wie *Legendre* selbst auf p. 160 glaubt, der ersten Methode an Einfachheit nachzustehn, welche den Vortheil grösserer Symmetrie darbietet. Aus diesem Umstande soll die zweite Methode von *Legendre* hier nicht weiter ausgeführt werden.

## § 29. Die elliptischen Integrale dritter Gattung als Functionen des Parameters. Die ganzen Integrale.

Im Chapitre XXIII seiner „Fonct. ellipt" (t. 1 p. 132—140) hat *Legendre* das elliptische Integral dritter Gattung in Beziehung auf den Parameter differentiirt und gelangte nach einigen Transformationen zu einem sehr einfachen Ausdruck für den Differentialquotienten, einem Ausdruck, mit dessen Hülfe sich sowohl Relationen zwischen Integralen ergeben, als auch ein Mittel die ganzen Integrale auf bemerkenswerthe Art darzustellen. Setzt man:

$$1) \quad P = \int_0^\alpha \frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}},$$

so ist:

$$2) \quad n\frac{dP}{dn} + P = \int_0^\alpha \frac{1}{(1+n\sin^2\Theta)^2}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}.$$

Die Formel 9) des § 25 giebt:

$$2(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\int_0^\alpha \frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)^2\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} =$$

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+n\sin^2\alpha} - \frac{k^2+n}{n^2}\int_0^\alpha \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}} +$$

$$\frac{1}{n}\int_0^\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}\,d\Theta +$$

$$\left(1+2\frac{1+k^2}{n}+\frac{3k^2}{n^2}\right)\int_0^\alpha \frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}.$$

Führt man die Bezeichnungen $F(\alpha,k)$, $E(\alpha,k)$ und $P$ aus 1) ein, so lässt sich die Gleichung 2) mittelst der vorstehenden Gleichung auf folgende Art darstellen:

$$(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\frac{dP}{dn} + \frac{P}{2}\,d\frac{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}{dn} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+n\sin^2\alpha} - \frac{k^2}{2n^2}F(\alpha,k) - \frac{1}{2n}[F(\alpha,k)-E(\alpha,k)].$$

Dividirt man durch $\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}$, so ist:

$$3)\quad d\frac{P\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}{dn} =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}\,\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}{1+n\sin^2\alpha} -$$

$$\frac{k^2F(\alpha,k)}{2n^2\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}} - \frac{F(\alpha,k)-E(\alpha,k)}{2n\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}.$$

Der Einfachheit halber unterscheide man für $n$ drei Fälle.

Erster Fall. $n = \cot^2\beta$.

Substituirt man in 3) für $P$ seinen Werth aus 1), so folgt:

$$\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\sin\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}{\cos\beta}\int_0^\alpha \frac{1}{\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\Theta}\,\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\right] =$$

$$-\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\beta}}{\sin^2\beta+\cos^2\beta\sin^2\alpha}\,\frac{\cos^2\beta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}} + \frac{k^2\sin^2\beta\,F(\alpha,k)}{\cos^2\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}} +$$

$$\frac{F(\alpha,k)-E(\alpha,k)}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}$$

Man subtrahire auf beiden Seiten:

$$\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}{\cos\beta}F(\alpha,k)$$

und setze auf der linken Seite:

$$F(\alpha,k) = \int_0^{\alpha}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}.$$

Die obige Gleichung geht hierdurch über in:

$$\frac{d}{d\beta}\left[\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\right]$$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos^2\beta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}} =$$

$$-F(\alpha,k).\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}+\frac{F(\alpha,k)-E(\alpha,k)}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}}.$$

Diese Gleichung integrire man nach $\beta$ zwischen den Gränzen 0 und $\beta$, bezeichne die Integrationsvariabele durch $\Theta$. Es folgt dann:

$$4)\quad \sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^{\beta}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}$$

$$= C-F(\alpha,k)\int_0^{\beta}\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}\,d\Theta$$

$$+[F(\alpha,k)-E(\alpha,k)]\int_0^{\beta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}$$

$$= C-[F(\alpha,k)\,E(\beta,k')+E(\alpha,k)\,F(\beta,k')-F(\alpha,k)\,F(\beta,k')].$$

Es bedeutet $C$ eine Constante in Beziehung auf $\beta$. Da nun die vorstehende Gleichung durch Vertauschung von $\beta$ mit $\alpha$ und $k$ mit $k'$ ungeändert bleibt, so ist $C$ eine absolute Constante. Nimmt man in 4) $k = 0$, so folgt:

$$\sin\beta\cos^2\beta\int_0^{\alpha}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}d\Theta+\sin\alpha\cos\alpha\int_0^{\beta}\frac{\cos\Theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\Theta}d\Theta$$

$$= C-\alpha\int_0^{\beta}\cos\Theta\,d\Theta = C-\alpha\sin\beta.$$

Eine leichte Rechnung giebt $C = \frac{\pi}{2}$. Die Gleichung 4) wird dann:

$$5)\quad \sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^{\alpha}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^{\beta}\frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}$$

$$=\frac{\pi}{2}-[F(\alpha,k)E(\beta,k')+E(\alpha,k)F(\beta,k')-F(\alpha,k)F(\beta,k')].$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Gleichung 22) von § 27, welche dort auf einem von dem obigen sehr verschiedenen Wege abgeleitet ist.

Um Wiederholungen zu vermeiden soll für die beiden folgenden Fälle die Gleichung 3) etwas transformirt werden. Man subtrahire auf beiden Seiten

$$\frac{d\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}{dn}F(\alpha,k),$$

setze links $P$ und $F(\alpha,k)$ in Form von Integralen. Es ist dann:

$$6)\quad -\frac{d}{dn}\left[n\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2\Theta\,d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}\frac{\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin\alpha}}{1+n\sin^2\alpha}$$

$$-\frac{F(\alpha,k)}{2\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}-\frac{F(\alpha,k)-E(\alpha,k)}{2n\sqrt{(1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)}}.$$

Zweiter Fall. $n = -1+k'^2\sin^2\beta$.

In diesem Falle giebt die Gleichung 6) nach $\beta$ innerhalb der Gränzen 0 und $\beta$ integrirt:

$$7)\quad k'^2\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^{\alpha}\frac{\sin^2\Theta}{1-(1-k'^2\sin^2\beta)\sin^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^{\beta}\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}{\cos^2\alpha+k'^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta}d\Theta$$

$$-[F(\alpha,k)F(\beta,k')+F(\alpha,k)F(\beta,k')-F(\alpha,k)F(\beta,k')].$$

Die Hinzufügung einer Constanten ist unnöthig, da die vorstehende Gleichung mit $\alpha$ identisch verschwindet. Mit Hülfe der Gleichungen 3) und 13) von § 28 lässt sich die obige Gleichung etwas symmetrischer darstellen. Setzt man in den bemerkten Gleichungen $\Theta$ statt $\varphi$, vertauscht $k$ mit $k'$, so findet man die folgende Relation, welche sich auch ohne Schwierigkeit direct verificiren lässt:

$$\sqrt{\frac{1+n}{n(k'^2+n)}}\cdot\frac{d}{d\Theta}\operatorname{arc\,tang}\frac{\sin\Theta\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}\sqrt{n+k'^2}}{\cos\Theta\sqrt{n(1+n)}} =$$
$$\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}{n+k'^2\sin^2\Theta}+\frac{k^2\sin^2\Theta}{n+1-(k'^2+n)\sin^2\Theta}\frac{1}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}.$$

Integrirt man nach $\Theta$ zwischen den Gränzen 0 und $\beta$, setzt $n = \cot^2\alpha$, so ist:

$$\operatorname{arc\,tang}(\tang\alpha\tang\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}) =$$
$$\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^\beta\frac{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}{\cos^2\alpha+k^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta}d\Theta$$
$$+k^2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^\beta\frac{\sin^2\Theta}{1-(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta)}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}.$$

Die Gleichung 7) lässt sich hierdurch auf folgende Art darstellen:

$$8)\quad k'^2\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta}\int_0^\alpha\frac{\sin^2\Theta}{1-(1-k'^2\sin^2\beta)\sin^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}$$
$$+k^2\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\int_0^\beta\frac{\sin^2\Theta}{1-(1-k^2\sin^2\alpha)\sin^2\Theta}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\Theta}}$$
$$=\operatorname{arc\,tang}(\tang\alpha\tang\beta\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\sqrt{1-k'^2\sin^2\beta})$$
$$-[F(\alpha,k)\;E(\beta,k')+E(\alpha,k)\;F(\beta,k')-F(\alpha,k)\;F(\beta,k')]$$

### Dritter Fall. $n = -k^2\sin^2\beta$.

Aus der Gleichung 6) erhält man leicht durch Integration in Beziehung auf $\beta$:

$$9)\quad k^2 \sin\beta \cos\beta \sqrt{1-k^2\sin^2\beta} \int_0^{\alpha} \frac{\sin^2\Theta}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$-k^2 \sin\alpha \cos\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha} \int_0^{\beta} \frac{\sin^2\Theta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$= F(\alpha, k)\ E(\beta, k) - E(\alpha, k)\ F(\beta, k).$$

Die Hinzufügung einer Constanten ist unnöthig, durch Vertauschung von $\alpha$ mit $\beta$ würde dieselbe negativ werden, woraus folgt, dass die Constante verschwindet.

Die Gleichung 9) enthält nur den Modul $k$, während in den Gleichungen 5) und 8) auch noch der Complementärmodul $k'$ enthalten ist. Auf diesen Umstand hat schon *Legendre* (F. E. t. 1. p. 141) aufmerksam gemacht, wobei eine wesentliche Eigenschaft der bemerkten Gleichung ihm entgangen ist, welche zuerst *Jacobi* hervorgehoben hat. Indem *Jacobi* eines der Integrale auf der linken Seite der Gleichung 9) als Typus eines elliptischen Integrals dritter Gattung nimmt, folgt, dass die Quantität $\beta$, welche in dem ersten Integrale als Constante auftritt in dem zweiten Integrale als obere Gränze (Argument) erscheint. Analog, nur umgekehrt, verhält sich $\alpha$ in Beziehung auf die beiden Integrale. Bezeichnet man durch $-k^2\sin^2\alpha$, $-k^2\sin^2\beta$ die Parameter, so enthält die Gleichung 9) das Mittel in einem elliptischen Integrale dritter Gattung Argument und Parameter mit einander zu vertauschen. Auf dieses Verhältniss soll bei *Jacobi's* Behandlung der betreffenden Integrale zurückgekommen werden.

Aus den Gleichungen 5), 8) und 9) fand *Legendre*, dass die Integrale, deren obere Gränze $\frac{\pi}{2}$ ist, d. i. die ganzen elliptischen Integrale dritter Gattung, sich durch die elliptischen Integrale der beiden ersten Gattungen ausdrücken lassen. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ findet man:

$$\sin\beta \cos\beta \sqrt{1-k'^2\sin^2\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\Theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - [KE(\beta, k') + EF(\beta, k') - KF(\beta, k')].$$

$$k'^2 \sin\beta \cos\beta \sqrt{1-k'^2\sin^2\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\Theta}{1-(1-k'^2\sin^2\beta)\sin^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - [KE(\beta, k') + EF(\beta, k') - KF(\beta, k')].$$

$$k^2 \sin\beta \cos\beta \sqrt{1-k^2\sin^2\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\Theta}{1-k^2\sin^2\beta\sin^2\Theta} \frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}}$$

$$= KE(\beta, k) - EF(\beta, k).$$

Die beiden ersten der vorstehenden Gleichungen führen für $\beta = \frac{\pi}{2}$ wieder auf die Gleichung 17) des § 27 zurück, nämlich:

$$\frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK',$$

welche Gleichung häufig unter der Bezeichnung „das Theorem von *Legendre*“ angeführt wird.

## § 30. Das Additionstheorem der elliptischen Integrale dritter Gattung nach Legendre.

Für die elliptischen Integrale dritter Gattung hat *Legendre* (F. E. t. 1 p. 64) ein Additionstheorem aufgestellt, welches, in Verbindung mit den entsprechenden Sätzen für die Function $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ sich zu einem allgemeinen Additionstheorem für die elliptischen Integrale überhaupt ausdehnen lässt.

Man setze:

$$1) \quad F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma),$$

und:

$$2) \quad S = \Pi(n, \varphi) + \Pi(n, \psi) - \Pi(n, \sigma),$$

wo $\sigma$ als Constante angesehen wird. Nach § 26 ist:

$$3) \quad E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = k^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma.$$

Die Gleichungen 1) und 3) differentiirt geben:

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{d\varphi}{\Delta(\psi)} = 0, \quad \Delta(\varphi)\, d\varphi + \Delta(\psi) d\psi = k^2 \sin\sigma d \sin\varphi \sin\psi.$$

Hieraus folgt:

$$4)\quad \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} = -\frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = \frac{k^2 \sin\sigma d\sin\varphi \sin\psi}{\Delta(\varphi)^2 - \Delta(\psi)^2} = \frac{\sin\sigma d\sin\varphi \sin\psi}{\sin^2\psi - \sin^2\varphi}.$$

Die Gleichung 2) differentiirt giebt:

$$dS = \frac{1}{1+n\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} + \frac{1}{1+n\sin^2\psi}\frac{d\psi}{\Delta(\psi)},$$

oder nach 4):

$$5)\quad dS = \frac{n\sin\sigma\, d\sin\varphi \sin\psi}{(1+n\sin^2\varphi)(1+n\sin^2\psi)}.$$

Die Gleichung $\cos\sigma + \sin\varphi \sin\psi\, \Delta(\sigma) = \cos\varphi\cos\psi$ quadrirt giebt:

$$[\cos\sigma + \sin\varphi\sin\psi\,\Delta(\sigma)]^2 = 1 - \sin^2\varphi - \sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi$$

oder:

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi = \sin^2\sigma - 2\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\Delta\sigma + (\sin\varphi\sin\psi)^2 k^2\sin^2\sigma.$$

Substituirt man diesen Werth von $\sin^2\varphi + \sin^2\psi$ in den Nenner auf der rechten Seite der Gleichung 5), so nimmt dieselbe folgende Form an:

$$dS = \frac{n\sin\sigma\, d\sin\varphi\sin\psi}{1+n\sin^2\sigma - 2n\cos\sigma\,\Delta(\sigma)\sin\varphi\sin\psi + (n^2+nk^2\sin^2\sigma)(\sin\varphi\sin\psi)^2},$$

oder:

$$6)\quad dS = \frac{\sin\sigma(n+k^2\sin^2\sigma)d\sin\varphi\sin\psi}{[(n+k^2\sin^2\sigma)\sin\varphi\sin\psi - \cos\sigma\,\Delta(\sigma)]^2 + (1+n)\left(1+\frac{k^2}{n}\right)\sin^2\sigma}.$$

Für $\varphi = 0$ ist nach 1) $\psi = \sigma$, dann verschwindet $S$ nach 2). Integrirt man die Gleichung 6), bestimmt die Integrationsconstante durch $\varphi = 0$, setzt links für $S$ seinen Werth aus 2) ein, so folgt:

$$\Pi(n,\varphi) + \Pi(n,\psi) - \Pi(n,\sigma) = \sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}}\times$$

$$\text{arc tang}\left[\frac{(n+k^2\sin^2\sigma)\sin\varphi\sin\psi - \cos\sigma\,\Delta(\sigma)}{\sin\sigma}\sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}}\right]$$

$$+\sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}}\,\text{arc tang}\frac{\cos\sigma\,\Delta(\sigma)}{\sin\sigma}\sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}},$$

d. i.

$$7)\quad \Pi(n,\varphi)+\Pi(n,\psi)-\Pi(n,\sigma) =$$

$$\sqrt{\frac{n}{(1+n)(k^2+n)}}\ \text{arc tang}\left(\frac{\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\sqrt{n(1+n)(k^2+n)}}{1+n\sin^2\sigma-n\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta(\sigma)}\right).$$

In Folge der Bedeutungen von $\sin\sigma$, $\cos\sigma$, $\Delta(\sigma)$ lässt sich der Factor von $n$ im Nenner des Arcus-Tangens auf folgende Art darstellen:

$$8)\quad [\sin^2\sigma-\sin\varphi\sin\psi\cos\sigma\,\Delta(\sigma)][1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi] =$$
$$\sin^2\varphi+\sin^2\psi-(1+k^2)\sin^2\varphi\sin^2\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\varphi\cos\psi\,\Delta(\varphi)\Delta(\psi).$$

Die Gleichung 7) ist anwendbar wenn $n = \cot^2\alpha$, oder $n = -1+k'^2\sin^2\alpha$.

Ist $n = -k^2\sin^2\alpha$, so wird die Gleichung 6) für:

$$9)\quad t = k^2(\sin^2\sigma-\sin^2\alpha)\sin\varphi\sin\psi\sin\alpha,$$

$$10)\quad dS =$$

$$\frac{\sin\alpha\sin\sigma\,dt}{[t-\sin\alpha\cos\sigma\,\Delta(\sigma)]^2-[\sin\sigma\cos\alpha\,\Delta(\alpha)]^2} =$$
$$\frac{\text{tang}\,\alpha}{2\Delta(\alpha)}\left[\frac{-dt}{\sin\sigma\cos\alpha\,\Delta(\alpha)+\sin\alpha\cos\sigma\,\Delta(\sigma)-t}\right.$$
$$\left.+\frac{-dt}{\sin\sigma\cos\alpha\,\Delta(\alpha)-\sin\alpha\cos\sigma\,\Delta(\sigma)+t}\right]$$

Um einer zu grossen Weitläufigkeit der Formeln zu entgehen, setze man zur Vereinfachung:

$$11)\quad \begin{cases}\sin\lambda = \dfrac{\sin\sigma\cos\alpha\,\Delta(\alpha)-\sin\alpha\cos\sigma\,\Delta(\sigma)}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma},\\ \sin\mu = \dfrac{\sin\sigma\cos\alpha\,\Delta(\alpha)+\sin\alpha\cos\sigma\,\Delta(\sigma)}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma}.\end{cases}$$

Diese Gleichungen geben:

$$12)\quad \sin\lambda\sin\mu = \frac{\sin^2\sigma-\sin^2\alpha}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma}.$$

In Folge des Additionstheorems der elliptischen Integrale erster Gattung sind die beiden Gleichungen 11) den folgenden Gleichungen aequivalent:

$$13)\quad \begin{cases}\displaystyle\int_0^{\sigma}\frac{dw}{\Delta}-\int_0^{\alpha}\frac{dw}{\Delta}=\int_0^{\lambda}\frac{dw}{\Delta}, \int_0^{\sigma}\frac{dw}{\Delta}+\int_0^{\alpha}\frac{dw}{\Delta}=\\ \displaystyle\int_0^{\mu}\frac{dw}{\Delta},\ \Delta=\sqrt{1-k^2\sin^2 w}.\end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 11) lässt sich die Gleichung 10) nun schreiben:

$$dS =$$

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{2\Delta(\alpha)}\left[\frac{-dt}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma)\sin\mu - t} + \frac{-dt}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma)\sin\lambda + t}\right].$$

Die vorstehende Gleichung werde nach $t$ integrirt und für $t$ der Werth aus 9) substituirt. Bestimmt man die Integrationsconstante durch $\varphi = 0$, so ist auch $t = 0$. Setzt man schliesslich für $S$ den Werth aus 1) ein und $n = -k^2\sin^2\alpha$, so folgt:

$$\Pi(-k^2\sin^2\alpha,\varphi) + \Pi(-k^2\sin^2\alpha,\psi) - \Pi(-k^2\sin^2\alpha,\sigma) =$$
$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{2\Delta(\alpha)}\log\frac{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma)\sin\mu - k^2(\sin^2\sigma-\sin^2\alpha)\sin\varphi\sin\psi\sin\alpha}{(1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\sigma)\sin\lambda + k^2(\sin^2\sigma-\sin^2\alpha)\sin\varphi\sin\psi\sin\alpha}$$
$$+\frac{\operatorname{tang}\alpha}{2\Delta(\alpha)}\log\frac{\sin\lambda}{\sin\mu}.$$

Auf der rechten Seite ziehe man die beiden Logarithmen zum Logarithmen des Products zusammen. Mit Rücksicht auf die Gleichung 12) ist dann Zähler und Nenner durch $\sin^2\sigma - \sin^2\alpha$ theilbar, die obige Gleichung vereinfacht sich in folgende:

14) $$\Pi(-k^2\sin^2\alpha,\varphi) + \Pi(-k^2\sin^2\alpha,\psi) - \Pi(-k^2\sin^2\alpha,\sigma) =$$
$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{2\Delta(\alpha)}\log\cdot\frac{1-k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\alpha\sin\lambda}{1+k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\alpha\sin\mu}.$$

Die vorstehende Gleichung lässt sich auch direct aus der Gleichung 7) herleiten unter Benutzung von:

$$i\operatorname{arc\,tang} iz = \frac{1}{2}\log\frac{1-z}{1+z}.$$

Mit Rücksicht auf die rechten Seiten der Gleichungen 7) und 14) hat *Legendre* die elliptischen Integrale dritter Gattung in zwei Classen zerlegt, über deren Terminologie sich in der „Théorie des Fonctions elliptiques, Deuxième Supplément, p. 138 folgende Bemerkung findet:

„Nous appelons, pour abréger *fonction à paramètre logarithmique* la fonction de troisième espèce dont le paramètre est $-k^2\sin^2\alpha$, $k$ étant le module. On sait que ces fonctions diffèrent essentiellement de celles de la même espèce dont le paramètre est ou peut être ramené à la forme $-1 + k'^2\sin^2\alpha$, $k'$ étant le com-

plément de $k$. Ces dernières devront être appelées *fonctions à paramètre circulaire.*

Diese Unterscheidung hat gegenwärtig eigentlich nur noch ein historisches Interesse; die ganze Auffassung des elliptischen Integrals dritter Gattung ist insofern eine zu beschränkte und in mancher Hinsicht etwas unbequeme, als eine bestimmte Form des Integrals unter einer grösseren Anzahl gleichberechtigter Formen ausgewählt und durch eine besondere functionale Characteristik ausgezeichnet wird. Es erfordert dieses bei Untersuchungen ein beständiges Zurückkommen auf die beliebig gewählte Normalform, eine Reduction, welche nicht immer ohne beschwerliche Rechnungen auszuführen ist. Diese Bemerkungen beziehen sich nur auf die folgenden Untersuchungen über den Zusammenhang der elliptischen Integrale dritter Gattung mit den Theta-Functionen. In einer grossen Anzahl von Fällen, namentlich bei geometrischen Anwendungen, wenn es sich nur um einfache Transformationen und Additionen elliptischer Integrale dritter Gattung handelt, wird die Unbequemlichkeit der gewählten Bezeichnung $\Pi$ durch den ausserordentlich elementaren Character der von *Legendre* angewandten Methode fast aufgehoben.

## § 31. Ausdruck des Parameters in den elliptischen Integralen dritter Gattung durch elliptische Functionen.

Die Anwendung der elliptischen Functionen auf das Integral

$$1) \qquad \Pi(n,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\Theta}{(1+n\sin^2\Theta)\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}},$$

setzt den Parameter $n$ in der Form $-k^2\sin^2\operatorname{am} c$ voraus, wo $c$ eine beliebige reelle, imaginäre oder complexe Quantität ist. Um die nachfolgenden Betrachtungen nicht zu unterbrechen, soll der Nachweis über die Zulässigkeit dieser Annahme geliefert werden. Eine weitere Untersuchung über diesen Gegenstand enthält die Abhandlung „Darstellung einer beliebig gegebenen Grösse durch $\sin\operatorname{am}(u+w,k)$" von *Richelot.* (Crelle J. t. 45. p. 225—332.)

Man unterscheide für $n$ die folgenden Werthe.

Erster Fall. $n$ liege zwischen 0 und $-k^2$. Man setze $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} a$, wo $0 \leqq a \leqq K$.

Zweiter Fall. $n$ liege zwischen $-k^2$ und $-1$. Es liegt dann $\sin^2 \operatorname{am} c$ zwischen 1 und $\frac{1}{k^2}$. In diesem Falle nehme man $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(K + ia) = -k^2 \left(\frac{\cos \operatorname{am} ai}{\Delta \operatorname{am} ia}\right)^2 = \frac{-k^2}{\Delta^2 \operatorname{am}(a, k')}$, wo $0 \leqq a \leqq K'$.

Dritter Fall. $n$ liege zwischen $-1$ und $-\infty$. Man setze: $n = -\frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} a} = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + iK')$ wo $0 \leqq a \leqq K$.

Vierter Fall. $n$ positiv. Man setze $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} ia = k^2 \operatorname{tang}^2 \operatorname{am}(a, k')$, $0 \leqq a \leqq K$.

Ist also $n$ reell, so kann man immer $n = -k^2 \sin^2 \operatorname{am} c$ setzen. Nimmt man in 1) $\varphi = \operatorname{am} u$ und $\Theta = \operatorname{am} w$, so lässt sich die Gleichung auf folgende Art schreiben:

$$\Pi(-k^2 \sin^2 \operatorname{am} c, \operatorname{am} u) = \int_0^u \frac{dw}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} c \sin^2 \operatorname{am} w}$$

oder auf beiden Seiten $u = \int_0^u dw$ subtrahirt:

$$\Pi(-k^2 \sin^2 \operatorname{am} c, \operatorname{am} u) - u =$$

$$2) \qquad \int_0^u \frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am} c \sin^2 \operatorname{am} w}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} c \sin^2 \operatorname{am} w} dw.$$

Ist $n$ eine complexe Quantität, so sei $n = \mu + \nu i$. Man setze:

$$3) \qquad \mu + \nu i = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + bi),$$

also:

$$4) \qquad \mu - \nu i = -k^2 \sin^2 \operatorname{am}(a - bi).$$

Die Gleichungen 3) und 4) geben:

$$5) \quad \begin{cases} k^2 + \mu + \nu i = k^2 \cos^2 \operatorname{am}(a + bi), & 1 + \mu + \nu i = \Delta^2 \operatorname{am}(a + bi), \\ k^2 + \mu - \nu i = k^2 \cos^2 \operatorname{am}(a - bi), & 1 + \mu - \nu i = \Delta^2 \operatorname{am}(a - bi), \end{cases}$$

Zur Vereinfachung führe man folgende Hülfsgrössen ein:

$$6) \quad \begin{cases} -\mu - \nu i = A^2(\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha), \\ k^2 + \mu + \nu i = B^2(\cos 2\beta + i \sin 2\beta), \\ 1 + \mu + \nu i = C^2(\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma). \end{cases}$$

Die Quantitäten $A$, $B$, $C$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind dann auf folgende Art als Functionen von $\mu$, $\nu$ und $k$ bestimmt:

$$7)\quad \begin{cases} -\mu = A^2\cos 2\alpha, & -\nu = A^2\sin 2\alpha, \\ k^2+\mu = B^2\cos 2\beta, & \nu = B^2\sin 2\beta, \\ 1+\mu = C^2\cos 2\gamma, & \nu = C^2\sin 2\gamma. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen 3), 5) und 6) zieht man:

$$8)\quad \begin{cases} k\sin\mathrm{am}(a+bi) = A(\cos\alpha+i\sin\alpha) = Ae^{\alpha i}, \\ k\cos\mathrm{am}(a+bi) = B(\cos\beta+i\sin\beta) = Be^{\beta i}, \\ \Delta\mathrm{am}(a+bi) = C(\cos\gamma+i\sin\gamma) = Ce^{\gamma i}. \end{cases}$$

oder $-i$ statt $i$ gesetzt:

$$9)\quad \begin{cases} k\sin\mathrm{am}(a-bi) = A(\cos\alpha-i\sin\alpha) = Ae^{-\alpha i}, \\ k\cos\mathrm{am}(a-bi) = B(\cos\beta-i\sin\beta) = Be^{-\beta i}, \\ \Delta\mathrm{am}(a-bi) = C(\cos\gamma-i\sin\gamma) = Ce^{-\gamma i}. \end{cases}$$

Nun ist: $2a = a+bi+a-bi$, $2bi = a+bi-(a-bi)$,

also
$$\sin\mathrm{am}\,2a = \sin\mathrm{am}[(a+bi)+(a-bi)]$$
$$= \frac{\left\{\begin{array}{l}\sin\mathrm{am}(a+bi)\cos\mathrm{am}(a-bi)\Delta\mathrm{am}\,a-bi)+ \\ \sin\mathrm{am}(a-bi)\cos\mathrm{am}(a+bi)\Delta\mathrm{am}\,a+bi)\end{array}\right\}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(a+bi)\sin^2\mathrm{am}(a-bi)}.$$

Aehnlich lassen sich $\cos\mathrm{am}\,2a$, $\Delta\mathrm{am}\,2a$, $\sin\mathrm{am}\,2bi$, $\cos\mathrm{am}\,2bi$ und $\Delta\mathrm{am}\,2bi$ mittelst des Additionstheorems ausdrücken. Unter Zuziehung der Gleichungen 8) und 9) findet man:

$$10)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\,2a = \dfrac{ABC}{k^2}\cdot\dfrac{e^{(\alpha-\beta-\gamma)i}+e^{-(\alpha-\beta-\gamma)i}}{1-\dfrac{A^4}{k^2}} \\ \qquad\qquad = \dfrac{2ABC\cos(\alpha-\beta-\gamma)}{k^2-A^4} \\ \cos\mathrm{am}\,2a = \dfrac{\dfrac{B^2}{k^2}-\dfrac{A^2C^2}{k^2}}{1-\dfrac{A^4}{k^2}} = \dfrac{B^2-A^2C^2}{k^2-A^4} \\ \Delta\mathrm{am}\,2a = \dfrac{C^2-\dfrac{A^2B^2}{k^2}}{1-\dfrac{A^4}{k^2}} = \dfrac{k^2C^2-A^2B^2}{k^2-A^4}. \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am} 2bi = 2i\,\dfrac{ABC\sin(\alpha-\beta-\gamma)}{k^2-A^4}, \\ \cos\operatorname{am} 2bi = \dfrac{B^2+A^2C^2}{k^2-A^4}, \\ \Delta\operatorname{am} 2bi = \dfrac{k^2C^2+A^2B^2}{k^2-A^4}. \end{cases}$$

Die beiden ersten Gleichungen von 10) und 11) geben durch Division:

$$12)\quad \begin{cases} \operatorname{tang am} 2a = \dfrac{2ABC}{B^2-A^2C^2}\cos(\alpha-\beta-\gamma), \\ \operatorname{tang am} 2bi = \dfrac{2iABC}{B^2+A^2C^2}\sin(\alpha-\beta-\gamma). \end{cases}$$

Setzt man weiter:

$$13)\quad B = AC\operatorname{tang}\delta,$$

so lassen sich die Gleichungen 12) einfacher schreiben:

$$14)\quad \begin{cases} \operatorname{tang am} 2a = \operatorname{tang} 2\delta\,.\cos(\alpha-\beta-\gamma), \\ \operatorname{tang am} 2bi = i\sin 2\delta\,.\sin(\alpha-\beta-\gamma). \end{cases}$$

Die letzte Gleichung 14) lässt sich auch schreiben:

$$\sin\operatorname{am}(2b, k') = \sin 2\delta\,.\sin(\alpha-\beta-\gamma).$$

Durch die vorstehenden Gleichungen lassen sich $a$ und $b$ für einen gegebenen Modul $k$ bestimmen. Man kann also immer den Parameter $n$ in der Form $-k^2\sin^2\operatorname{am} c$ voraussetzen, wo $c$ eine beliebige reelle, imaginäre oder complexe Quantität ist. Ueber diese Darstellung vergleiche man: *Durège*: Theorie der elliptischen Functionen § 67.

## § 32. Die elliptischen Integrale dritter Gattung nach Jacobi's Reihenentwickelungen. Jacobi's erste Darstellung des Additionstheorems.

An Stelle des von *Legendre* gewählten Typus eines elliptischen Integrals dritter Gattung hat *Jacobi* auf p. 144 der „Fundamenta" eine andere Normalform aufgestellt, welche von der ersteren nur unwesentlich unterschieden ist. Das von *Jacobi* gewählte Integral gestattet eine unmittelbare Entwickelung in einer unendlichen Reihe, deren genauere Untersuchung schliesslich darauf geführt hat,

für das elliptische Integral dritter Gattung keine besondere Normalform anzunehmen, sondern jedes der 16, respective 20 Integrale, welche sich ergeben, als mit der Normalform gleichberechtigt anzusehen. Da die ersten Untersuchungen von *Jacobi* über diesen Gegenstand von grossem Interesse sind, so möge derselben hier eine kurze Erwähnung geschehn.

Es ist:

$$\sin^2 \mathrm{am}(u+b) - \sin^2 \mathrm{am}(u-b) = 2\frac{d}{du}\frac{\sin \mathrm{am} b \cos \mathrm{am} b \, \Delta \mathrm{am} b \sin^2 \mathrm{am} u}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am} b \sin^2 \mathrm{am} u}.$$

Setzt man $u = \frac{2Kx}{\pi}$, $b = \frac{2Ka}{\pi}$, multiplicirt auf beiden Seiten mit $\frac{2k^2K^2}{\pi^2}$, so folgt:

$$1) \quad \frac{2K}{\pi} k^2 \frac{d}{dx} \frac{\sin \mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \cos \mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \Delta \mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \left[\sin^2 \mathrm{am}\frac{2K(x+a)}{\pi} - \sin^2 \mathrm{am}\frac{2K(x-a)}{\pi}\right].$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich aber nach Gleichung 22) § 22 nach den Cosinus der Vielfachen von $2(x+a)$ und $2(x-a)$ entwickeln und mithin auch als Differentialquotient zweiter Ordnung in Beziehung auf $x$ einer noch näher darzustellenden Reihe ausdrücken. Man findet leicht:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \left[\sin^2 \mathrm{am}\frac{2K(x+a)}{\pi} - \sin^2 \mathrm{am}\frac{2K(x-a)}{\pi}\right] =$$

$$8 \sum_{r=1}^{r=\infty} [\cos 2r(x-a) - \cos 2r(x+a)] \frac{rq^r}{1-q^{2r}}.$$

Die rechte Seite ist aber der zweite Differentialquotient nach $x$ von:

$$2\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos 2r(x+a) - \cos 2r(x-a)}{r} \frac{q^r}{1-q^{2r}} =$$

$$\log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)},$$

wie mittelst der ersten Gleichung 25) des § 22 unmittelbar folgt.

Mit Rücksicht auf das Vorstehende lässt sich die Gleichung 1) auf folgende Form bringen:

$$\frac{2K}{\pi} k^2 \frac{d}{dx} \frac{\sin \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \Delta \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$4 \sum_1^\infty [\cos 2r(x-a) - \cos 2r(x+a)] \frac{rq^r}{1-q^{2r}} = \frac{1}{2} \frac{d^2 \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}}{dx^2}$$

Diese Gleichung zwischen den Gränzen 0 und $x$ integrirt giebt, da $\vartheta'(-a) = -\vartheta'(a)$:

$$2) \quad \frac{2K}{\pi} k^2 \frac{\sin \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \Delta \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}} =$$

$$2 \sum_1^\infty [\sin 2r(x-a) - \sin 2r(x+a) + 2 \sin 2ra] \frac{q^r}{1-q^{2r}} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{d \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}}{dx} + \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Von der Gleichung 2) macht *Jacobi* in den „Fundamenta" einen doppelten Gebrauch, sie dient ihm sowohl zur Reihenentwickelung eines elliptischen Integrals, wie zur Herstellung eines Additionstheorems, welches nicht wesentlich von *Legendre's* Theorem verschieden ist.

In der Gleichung 2) werde nach $x$ zwischen den Gränzen 0 und $x$ integrirt. Bezeichnet man die Integrationsvariabele durch $z$, so ist:

$$3) \quad \frac{2K}{\pi} \int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \cos \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \Delta \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kz}{\pi}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kz}{\pi}} dz =$$

$$\sum_1^\infty \frac{2x \sin 2ra - \cos 2r(x-a) + \cos 2r(x+a)}{r} \frac{q^r}{1-q^{2r}} =$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)} + x \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Nimmt man am $\frac{2Ka}{\pi} = \alpha$, am $\frac{2Kx}{\pi} = \varphi$ und substituirt in dem links stehenden Integrale der Gleichung 3) am $\frac{2Kz}{\pi} = w$, so geht dieses Integral über in:

$$\int_0^{\varphi} \frac{k^2 \sin\alpha \cos\alpha \, \Delta(\alpha) \sin^2 w}{1 - k^2 \sin^2\alpha \sin^2 w} \frac{dw}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 w}}.$$

Nach den Bezeichnungen von *Legendre* ist dieses Integral gleich:

$$\frac{\cos\alpha \, \Delta(\alpha)}{\sin\alpha} [\Pi(-k^2 \sin^2\alpha, \varphi) - F(\varphi)].$$

*Jacobi* bezeichnet (Fund. pag. 144) dasselbe Integral durch $\Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}, k\right)$ oder kürzer durch $\Pi\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right)$. Diese Bezeichnung hat die Unbequemlichkeit eine schon von *Legendre* fixirte Characteristik in anderer Bedeutung zu gebrauchen und ihren Zweck insofern nicht ganz zu erfüllen, als nach 15) andere Integrale existiren, welche dem in 3) enthaltenen Integrale analog sind.

Das Integral der Gleichung 3) enthält die Variabeln $x$, $a$ und $k$. Da die Quantität $q$ der Theta-Functionen nur von $k$ abhängt, so folgt, dass in der Summe:

$$\frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)} + x \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}$$

nur Functionen von zwei Argumenten vorkommen. Diese merkwürdige Eigenschaft, dass das elliptische Integral dritter Gattung von *Legendre*, welches drei Argumente enthält, sich auf Functionen mit nur zwei Argumenten reduciren lässt, hat zuerst *Jacobi* gemacht und besonders hervorgehoben auf p. 140 der „Fundamenta".*)

Die rechte Seite der Gleichung 2) lässt sich auf folgende Art darstellen:

---

*) Man vergleiche hierüber auch die „Annales de l'École Normale", wo sich t. VI. p. 152 folgende Bemerkung *Jacobi's* an *Legendre* findet:

— D'ailleurs elle montre que les Fonctions Elliptiques de troisième espèce dans lesquels entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux, découverte qui vous intéressera beaucoup.

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)} - \frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)} + \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} =$$
$$-\frac{1}{2}d\frac{\log\vartheta(x-a)\,\vartheta(x+a)}{da} + \frac{d\log\vartheta(a)}{da}.$$

Integrirt man die Gleichung 2) nach $a$ innerhalb der Gränzen 0 und $a$, so folgt:

$$\left[\frac{\vartheta(a)\,\vartheta(x)}{\vartheta(0)}\right]^2 = \frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(x+a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}.$$

Für $a = \frac{m+n}{2}$, $x = \frac{m-n}{2}$ folgt hieraus:

$$4)\quad \left\{\frac{\vartheta\left(\frac{m+n}{2}\right)\vartheta\left(\frac{m-n}{2}\right)}{\vartheta(0)}\right\}^2 = \frac{\vartheta(m)\,\vartheta(n)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{K(m+n)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{K(m-n)}{\pi}}.$$

In dieser Gleichung nehme man $\frac{m+n}{2} = x-a$, $\frac{m-n}{2} = y-a$ also $m = x+y-2a$ und $n = x-y$. Ferner setze man $\frac{m+n}{2} = x+a$, $\frac{m-n}{2} = y+a$, also $m = x+y+2a$ und $n = x-y$. Die beiden so erhaltenen Gleichungen geben durch Division:

$$5)\quad \left[\frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(y-a)}{\vartheta(x+a)\,\vartheta(y+a)}\right]^2 =$$
$$\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x+a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(y+a)}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x-a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(y-a)}{\pi}}\,\frac{\vartheta(x+y-2a)}{\vartheta(x+y+2a)}.$$

In der Gleichung 4) mache man ferner die Substitutionen $\frac{m+n}{2} = x+y-a$, $\frac{m-n}{2} = a$ und $\frac{m+n}{2} = x+y+a$, $\frac{m-n}{2} = a$. Bildet man den Quotienten der so erhaltenen Gleichungen so folgt:

$$\left[\frac{\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+y-a)}\right]^2 =$$
$$\frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x+y-a)}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x+y+a)}{\pi}}\,\frac{\vartheta(x+y+2a)}{\vartheta(x+y-2a)}.$$

Diese Gleichung mit der Gleichung 5) multiplicirt giebt:

$$6)\quad \left[\frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(y-a)\,\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\,\vartheta(y+a)\,\vartheta(x+y-a)}\right]^2 = H.H_1,$$

wo:

$$7)\quad \begin{cases} H = \dfrac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(x+a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(y+a)}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(x-a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(y-a)}{\pi}}, \\ H_1 = \dfrac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(x+y-a)}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2K(x+y+a)}{\pi}}. \end{cases}$$

In der Gleichung 3) setze man zur Abkürzung:

$$8)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{k^2\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2Kz}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2Kz}{\pi}} = \psi(z),$$

dann ist kürzer:

$$9)\quad \int_0^x \psi(z)\,dz = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)} + x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Aus dieser Gleichung erhält man unmittelbar durch Vertauschung von $x$ mit $y$ und $x+y$

$$\int_0^x \psi(z)\,dz + \int_0^y \psi(z)\,dz - \int_0^{x+y} \psi(z)\,dz =$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-a)\,\vartheta(y-a)\,\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\,\vartheta(y+a)\,\vartheta(x+y-a)}.$$

Wegen der Gleichung 6) folgt:

$$10)\quad \int_0^x \psi(z)dz + \int_0^y \psi(z)dz - \int_0^{x+y} \psi(z)\,dz = \frac{1}{4}\log H.H_1.$$

Nach der Bezeichnung von *Legendre* ist nun:

$$\int_0^x \psi(z)dz = \frac{\cos\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}}{\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}}\Pi\left(-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi},\ \sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$-\frac{2Kx}{\pi}\,\frac{\cos\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}}{\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}}.$$

Die Gleichung 10) enthält folglich das Additionstheorem der elliptischen Integrale dritter Gattung, wenn der Parameter gleich $-k^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2Ka}{\pi}$ ist. Setzt man:

$$\mathrm{am} \frac{2Ka}{\pi} = \alpha, \quad \mathrm{am} \frac{2Kx}{\pi} = \varphi, \quad \mathrm{am} \frac{2Ky}{\pi} = \psi,$$

$$\mathrm{am} \frac{2K(x+y)}{\pi} = \sigma, \quad \mathrm{am} \frac{2K(x+y-a)}{\pi} = \lambda, \quad \mathrm{am} \frac{2K(x+y+a)}{\pi} = \mu,$$

so muss die Gleichung 10) auf die von *Legendre* gefundene Form führen. Dieses kommt darauf hinaus zu zeigen, dass die Quantitäten $H$ und $H_1$, definirt durch die Gleichungen 7), auf die Gleichung führen:

$$11) \quad H H_1 =$$

$$\left\{ \frac{1 - k^2 \sin \mathrm{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2Kx}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2Ky}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2K(x+y-a)}{\pi}}{1 + k^2 \sin \mathrm{am} \frac{2Ka}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2Kx}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2Ky}{\pi} \sin \mathrm{am} \frac{2K(x+y+a)}{\pi}} \right\}^2.$$

Um sein Resultat mit dem von *Legendre* aufgestellten in Uebereinstimmung zu bringen hat *Jacobi* auf pag. 157 u. 158 der „Fundamenta" den Beweis der Gleichung 11) gegeben, welchen er mit den Worten einleitet: „Transformatio satis abstrusa hunc in modum peragitur". Es möge hier genügen auf die von *Jacobi* gefundene Form des Additionstheorems hingewiesen zu haben, die von *Legendre* gefundene Form lässt sich einfach mittelst des Multiplicationstheorems der Theta-Functionen herleiten, wie im nächsten Paragraph gezeigt werden soll.

In der bemerkenswerthen Abhandlung „Formulae novae in theoria transcendentium fundamentales" (Crelle. J. t. XV p. 199—204) hat *Jacobi* die elliptischen Integrale zweiter Gattung zum Ausgangspunct der Herleitung des Additionstheorems der elliptischen Integrale dritter Gattung genommen. *Jacobi* citirt bei dieser Gelegenheit eine ältere Abhandlung „De functionibus ellipticis commentatio" (Crelle. J. t. IV. p. 371—390), welche weitere Ausführungen über einige Theile der „Fundamenta" enthält und ursprünglich bestimmt war, im Verein mit anderen Abhandlungen einen zweiten Theil des bemerkten Werks zu bilden. Die weitere Ausbildung der glän-

zenden Theorie der Theta-Functionen scheint dieser Publication hinderlich in den Weg getreten zu sein.

Wenn sich auch die Untersuchungen über die elliptischen Integrale dritter Gattung ohne weitere Zuhülfenahme der Reihe für das Quadrat von $\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}$ führen lassen, so scheint der in diesem § befolgte Weg ausser dem historischen Interesse den Vorzug einer sich von selbst darbietenden Ursprünglichkeit zu haben. Führt man in das elliptische Integral dritter Gattung von *Legendre* elliptische Functionen ein, so ist, unter Berücksichtigung der Gleichung 1) der zu verfolgende Weg vorgezeichnet, wenn es sich um Darstellung des in Rede stehenden Integrals in Form einer unendlichen Reihe handelt.

## § 33. Die elliptischen Integrale dritter Gattung und die Theta-Functionen. Das ganze Integral. Vertauschung von Argument und Parameter. Additionstheoreme der Argumente und Parameter. Integrale mit zusammengesetztem Argument und Parameter.

Die fundamentale Gleichung:

$$\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) - \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) = \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z') - \vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z'),$$

welche auf die elliptischen Integrale zweiter Gattung in § 26 führte, kann auch den Ausgangspunct für die elliptischen Integrale dritter Gattung bilden. Setzt man wieder $w = -(x+y+z)$, also $w' = 0$. $x' = -(y+z)$, $y' = -(x+z)$, $z' = -(x+y)$, so ist:

1) $$\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z)\vartheta(x+y+z) + \vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(x+y+z) = \vartheta(0)\vartheta(x+y)\vartheta(x+z)\vartheta(y+z).$$

Diese Gleichung nach $z$ differentiirt, darauf $z = 0$ gesetzt führte auf:

2) $$\frac{2K}{\pi}k^2\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Ky}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2K(x+y)}{\pi} = \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} + \frac{\vartheta'(y)}{\vartheta(y)} - \frac{\vartheta'(x+y)}{\vartheta(x+y)}.$$

In dieser Gleichung nehme man successive $y = a$ und $y = -a$, bilde die halbe Differenz der so erhaltenen Gleichungen. Es ist dann:

$$\frac{K}{\pi}k^2 \sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\left[\sin\mathrm{am}\frac{2K(x+a)}{\pi}+\sin\mathrm{am}\frac{2K(x-a)}{\pi}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}+\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Wendet man auf die linke Seite das Additionstheorem der elliptischen Functionen an, so ergiebt sich die Gleichung:

$$3)\quad \frac{\frac{2K}{\pi}k^2\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}=$$
$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}+\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Die vorstehende Ableitung hat den Vortheil, dass $x$ und $a$ ganz beliebige Grössen sein können. Integrirt man in der Gleichung 3) nach $x$ zwischen den Gränzen 0 und $x$, bezeichnet die Integrationsvariabele durch $z$, so erhält man wieder die im vorigen § gefundene Gleichung 3), nämlich:

$$4)\quad \frac{2K}{\pi}k^2\int_0^x \frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}dz=$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}+x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar einige von *Legendre* gefundene Sätze. Für $x=\frac{\pi}{2}$ verschwindet der Logarithmus auf der rechten Seite der Gleichung 4). Dieselbe reducirt sich einfach auf $\frac{\pi}{2}\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}$ d.i. nach § 26 auf:

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{2K}{\pi}E\left(\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\right)-\frac{2Ka}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi}\right].$$

Setzt man in der Gleichung 4) $x=\frac{\pi}{2}$, ferner $\frac{2Kz}{\pi}=w$ und einfach $a$ statt $\frac{2Ka}{\pi}$, so giebt dieselbe:

$$\int_0^K \frac{k^2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,w}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,w}dw=$$
$$K\,E(\mathrm{am}\,a)-a\,.\,E,$$

oder $\operatorname{am} a = \alpha$, $\operatorname{am} w = \Theta$ gesetzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin\alpha\cos\alpha\,\Delta(\alpha)\sin^2\Theta}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\Theta}\,\frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)} =$$

$$K\int_0^{\alpha}\Delta(\Theta)\,d\Theta - E\int_0^{\alpha}\frac{d\Theta}{\Delta(\Theta)}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Resultaten des § 31 enthält das Theorem von *Legendre* betreffend den Ausdruck des ganzen elliptischen Integrals dritter Gattung durch elliptische Integrale erster und zweiter Gattung.

In der Gleichung 4) vertausche man $x$ mit $a$, es bleibt dann

$$\frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)}$$

ungeändert. Bildet man also die Differenz der Gleichung 4) mit der neuen Gleichung, so folgt, wenn in den Integralen $\frac{2Kz}{\pi} = w$ gesetzt wird:

$$5)\quad k^2\int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am} w}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am} w}\,dw$$

$$-k^2\int_0^{\frac{2Ka}{\pi}} \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin^2\operatorname{am} w}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\sin^2\operatorname{am} w}\,dw$$

$$= x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} - a\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}.$$

Die rechte Seite ist auch gleich:

$$\frac{2Kx}{\pi}E\left(\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\right) - \frac{2Ka}{\pi}E\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right).$$

Nimmt man zur Vereinfachung $\frac{2Kx}{\pi} = u$ und $a$ statt $\frac{2Ka}{\pi}$, so wird die Gleichung 5) einfacher:

$$6)\quad k^2\int_0^u \frac{\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,w}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,w}\,dw$$

$$-k^2\int_0^a \frac{\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,w}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,w}\,dw$$

$$= u\,E(\mathrm{am}\,a) - a\,E(\mathrm{am}\,u).$$

Diese Gleichung repräsentirt den von *Jacobi* genannten Satz von der Vertauschung des Arguments mit dem Parameter, welches Resultat nach § 29 von *Legendre* herrührt.

In der Gleichung 1) setze man $z = -a$ und $z = a$, die beiden resultirenden Gleichungen geben durch Division:

$$\frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-a)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+a)}$$

$$= \frac{\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(a)\vartheta(x+y-a) - \vartheta_1(a)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(x+y-a)}{\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(a)\vartheta(x+y+a) + \vartheta_1(a)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(x+y+a)}$$

oder auch:

$$7)\quad \frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-a)\vartheta(x+y+a)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+a)\vartheta(x+y-a)} =$$

$$\frac{1-\dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y-a)}{\vartheta(x+y-a)}}{1+\dfrac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}\dfrac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)}\dfrac{\vartheta_1(y)}{\vartheta(y)}\dfrac{\vartheta_1(x+y+a)}{\vartheta(x+y+a)}} =$$

$$\frac{1-k^2\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2Kx}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ky}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2K(x+y-a)}{\pi}}{1+k^2\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2Kx}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2Ky}{\pi}\sin\mathrm{am}\dfrac{2K(x+y+a)}{\pi}}.$$

Hält man diese Gleichung mit der Gleichung 4) zusammen, so ergiebt sich unmittelbar *Legendre's* Additionstheorem der elliptischen Integrale dritter Gattung „quod vocabimus de Additione Argumenti Amplitudinis theorema“ (Fundamenta p. 154). Vertauscht man in der Gleichung 4) $x$ successive mit $x$, $y$ und $x+y$, zieht von der Summe der beiden ersten so erhaltenen Gleichungen die dritte ab, so lässt sich die rechte Seite mit Hülfe der Gleichung 7) durch elliptische Functionen darstellen. Um das Resultat etwas zu vereinfachen setze man in den drei Integralen auf der linken Seite

$\frac{2Kz}{\pi} = w$, ferner $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\frac{2Ky}{\pi} = v$ und einfach $a$ statt $\frac{2Ka}{\pi}$.
Es folgt dann:

$$8) \int_0^u \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \cdot \sin^2\mathrm{am}\, w}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, w}\, dw$$

$$+ \int_0^v \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, w}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, w}\, dw$$

$$- \int_0^{u+v} \frac{k^2 \sin\mathrm{am}\, a \cos\mathrm{am}\, a\, \Delta\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, w}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, a \sin^2\mathrm{am}\, w}\, dw$$

$$= \frac{1}{2} \log \frac{1 - k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}(u+v-a)}{1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}(u+v+a)}.$$

Da für einige der folgenden Sätze die Wiederholung der elliptischen Integrale etwas beschwerlich ist, so sollen dieselben auf eine Art bezeichnet werden, welche sich direct an die Bezeichnung von *Jacobi* anschliesst, ohne mit der Bezeichnung von *Legendre* zu coincidiren. Zu diesem Zwecke soll das von *Jacobi* gewählte Zeichen $\Pi$ nur mit einem unteren Index versehn werden. Setzt man im Integral der Gleichung 4) $\frac{2Kz}{\pi} = w$, so sei:

$$9) \quad \Pi_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) =$$

$$k^2 \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\, \Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \sin^2\mathrm{am}\, w}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} \sin^2\mathrm{am}\, w}\, dw,$$

also auch nach 4)

$$10) \quad \Pi_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) = \frac{1}{2} \log \frac{\vartheta(x-a)}{\vartheta(x+a)} + x \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Die Gleichungen 6) und 8) lassen sich dann einfacher schreiben:

$$11) \quad \Pi_1(u,a) - \Pi_1(a,u) = u E(\mathrm{am}\, a) - a E(\mathrm{am}\, u).$$

$$12) \quad \Pi_1(u,a) + \Pi_1(v,a) - \Pi_1(u+v,a) =$$

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 - k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}(u+v-a)}{1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}(u+v+a)}.$$

Aus der Gleichung 11) folgt durch Vertauschung von $a$ mit $b$ und $a + b$,

$$\Pi_1(u,b) - \Pi_1(b,u) = uE(\operatorname{am} b) - b(E\operatorname{am} u),$$
$$\Pi_1(u,a+b) - \Pi_1(b+a,u) = uE[\operatorname{am}(a+b)] - (a+b)E(\operatorname{am} u).$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit der Gleichung 11) geben durch Addition und Subtraction:

13) $$\Pi_1(u,a) + \Pi_1(u,b) - \Pi_1(u,a+b) =$$
$$\Pi_1(a,u) + \Pi_1(b,u) - \Pi_1(a+b,u) +$$
$$u\{E(\operatorname{am} a) + E(\operatorname{am} b) - E[\operatorname{am}(a+b)]\}.$$

Vertauscht man in der Gleichung 12) $u$ mit $a$, setzt $v = b$, so lassen sich die drei ersten Terme auf der rechten Seite der Gleichung 13) durch einen Logarithmen darstellen. Da ferner nach § 26:

$$E(\operatorname{am} a) + E(\operatorname{am} b) - E[\operatorname{am}(a+b)] =$$
$$k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(a+b),$$

so nimmt die Gleichung 13) folgende Form an:

14) $$\Pi_1(u,a) + \Pi_1(u,b) - \Pi_1(u,a+b) =$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{1 - k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(a+b-u)}{1 + k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(a+b+u)}$$
$$+ uk^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(a+b).$$

Diese Gleichung enthält nach *Jacobi* das Additionstheorem der Parameter, „quod vocabimus de Additione Argumenti Parametri theorema“ (Fund. p. 154).

Die Gleichung 10) giebt:

$$\Pi_1\left(\frac{2K(x+y)}{\pi}, \frac{2K(a+b)}{\pi}\right) + \Pi_1\left(\frac{2K(x-y)}{\pi}, \frac{2K(a-b)}{\pi}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+y-a-b)}{\vartheta(x+y+a+b)} \cdot \frac{\vartheta(x-y-a+b)}{\vartheta(x-y+a-b)} + (x+y)\frac{\vartheta'(a+b)}{\vartheta(a+b)} +$$
$$(x-y)\frac{\vartheta'(a-b)}{\vartheta(a-b)}.$$

$$2\Pi_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) + 2\Pi_1\left(\frac{2Ky}{\pi}, \frac{2Kb}{\pi}\right) =$$
$$\log\frac{\vartheta(x-a)\vartheta(y-b)}{\vartheta(x+a)\vartheta(y+b)} + 2x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + 2y\frac{\vartheta'(b)}{\vartheta(b)}.$$

Man bilde die Differenz dieser Gleichungen und setze rechts

$$2x = x+y+x-y,$$
$$2y = x+y-(x-y)$$

es folgt dann:

15) $$\Pi_1\left[\frac{2K(x+y)}{\pi}, \frac{2K(a+b)}{\pi}\right] + \Pi_1\left[\frac{2K(x-y)}{\pi}, \frac{2K(a-b)}{\pi}\right]$$
$$-2\Pi_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, \frac{2Ka}{\pi}\right) - 2\Pi_1\left(\frac{2Ky}{\pi}, \frac{2Kb}{\pi}\right) =$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+y-a-b)\vartheta(x-y-a+b)}{\vartheta(x+y+a+b)\vartheta(x-y+a-b)}\cdot\frac{\vartheta(x+a)^2\vartheta(y+b)^2}{\vartheta(x-a)^2\vartheta(y-b)^2}$$
$$-(x+y)\left[\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} + \frac{\vartheta'(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\vartheta'(a+b)}{\vartheta(a+b)}\right]$$
$$+(x-y)\left[\frac{\vartheta'(a-b)}{\vartheta(a-b)} + \frac{\vartheta'(b)}{\vartheta(b)} - \frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}\right].$$

Die Gleichung 1) reducirt sich für $x = c$ und $y = -c$ auf:

$$\vartheta(z)^2\vartheta(c)^2 - \vartheta_1(z)^2\vartheta_1(c)^2 = \vartheta(0)^2\vartheta(z+c)\vartheta(z-c)$$

oder durch $\vartheta(z)^2\vartheta(c)^2$ dividirt:

$$\frac{\vartheta(0)^2\vartheta(z+c)\vartheta(z-c)}{\vartheta(c)^2\vartheta(z)^2} = 1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kc}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}.$$

Setzt man hierin $z = x-a$, $c = y-b$, dann $z = x+a$, $c = y+b$, dividirt die erhaltenen Gleichungen, so findet man:

$$\frac{\vartheta(x+y-a-b)\vartheta(x-y-a+b)}{\vartheta(x+y+a+b)\vartheta(x-y+a-b)}\cdot\frac{\vartheta(x+a)^2\vartheta(y+b)^2}{\vartheta(x-a)^2\vartheta(y-b)^2} =$$
$$\frac{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x-a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(y-b)}{\pi}}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(x+a)}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2K(y+b)}{\pi}}.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 2) lässt sich die rechte Seite der Gleichung 15) durch elliptische Functionen ausdrücken. Setzt man zur Vereinfachung $a$ und $b$ statt $\frac{2Ka}{\pi}$ und $\frac{2Kb}{\pi}$, ferner $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\frac{2Ky}{\pi} = v$, so giebt die Gleichung 15 folgende Relation zwischen elliptischen Integralen:

16) $$\Pi_1(u+v, a+b) + \Pi_1(u-v, a-b) - 2\Pi_1(u, a) - 2\Pi_1(v, b) =$$
$$\frac{1}{2}\log\frac{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(u-a)\sin^2\mathrm{am}(v-b)}{1 - k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\sin^2\mathrm{am}(v+b)}$$
$$-k^2(u+v)\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}(a+b)$$
$$-k^2(u-v)\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}(a-b).$$

In dieser Gleichung vertausche man $a$ mit $b$, addire die so erhaltene Gleichung zur Gleichung 16) und dividire durch 2. Da in Folge der Definition nach 9) $\Pi_1(u, -a) = -\Pi_1(u, a)$ ist, so

ergiebt sich die folgende allgemeine Relation zwischen elliptischen Integralen dritter Gattung, welche ausdrückt, dass ein derartiges Integral mit zusammengesetztem Argument und zusammengesetztem Parameter, sich durch Integrale mit den einfachen Argumenten und Parametern ausdrücken lässt. Diese Gleichung ist:

$$\Pi_1(u+v, a+b) - \Pi_1(u, a) - \Pi_1(u, b) - \Pi_1(v, a) - \Pi_1(v, b) =$$

$$\frac{1}{4}\log \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u-a)\sin^2\mathrm{am}(v-b)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\sin^2\mathrm{am}(v+b)} \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u-b)\sin^2\mathrm{am}(v-a)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+b)\sin^2\mathrm{am}(v+a)}$$
$$-k^2(u+v)\sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, b \sin\mathrm{am}\,(a+b).$$

## § 34. Die verschiedenen Formen der elliptischen Integrale dritter Gattung. Literarische Anmerkungen.

Im Jahre 1849 theilte *Jacobi* der Pariser Academie (Comptes Rendus t. XXIX p. 97) die vollständige Lösung eines mechanischen Problems mit, betreffend die Drehung eines Körpers, auf welchen keine äusseren Kräfte wirken. Die Abhandlung selbst, welche später mehrfach als Vorbild bei Anwendungen von elliptischen Functionen auf Probleme der Mechanik gedient hat, findet sich abgedruckt in Crelle's Journal, t. 39 p. 293—350, oder auch *Jacobi*: Math. Werke t. II p. 139—186 unter dem Titel: „Sur la rotation d'un corps". Das häufige Auftreten von elliptischen Integralen dritter Gattung veranlasste *Jacobi* dieselben bei dieser Gelegenheit einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen und die wesentlichsten Formen dieser Integrale ohne weitere Ableitung aufzustellen. Es findet sich hierbei die folgende Bemerkung:

> Il parait que l'on pourrait se passer entièrement d'une notation particulière des intégrales elliptiques de la troisième espèce. Les valeurs, en effet, exprimées par les fontions $\Theta$, sont assez simples pour entrer elles-mêmes dans le calcul et sans se cacher sous une notation laquelle ne saurait mettre en évidence ni leur nature logarithmique ni la liaison intime entre leur argument et celui du paramètre ni, enfin, leur décomposition en deux parties l'une proportionelle à leur argument et l'autre périodique". (Crelle. J. t. 39 p. 348. Werke t. II p. 194).

Die in den vorstehenden Worten enthaltene Verwerfung der Bezeichnung von *Legendre* erscheint sehr gerechtfertigt, wenn es sich darum handelt, die bei Anwendungen äusserst lästige Beschränkung eines Normal-Integrals dritter Gattung fallen zu lassen. Auf der andern Seite sind es gerade die von *Legendre* gebrauchten einfachen Methoden und schönen Resultate, welche *Abel* zu seinen grossartigen Entdeckungen angeregt haben.

Die Gleichung 3) des vorhergehenden §, nämlich:

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2K}{\pi}k^2\dfrac{\sin\operatorname{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2Kx}{\pi}} = \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}+\dfrac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} \end{array}\right.$$

gilt für ein beliebiges $x$ oder $a$. Lässt man $x$ um passende Quantitäten zunehmen, so kann in den Ausdrücken:

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x\pm a)}{\vartheta(x\pm a)}$$

jede der Functionen $\vartheta_1$, $\vartheta_2$, $\vartheta_3$ an Stelle der Function $\vartheta$ treten. Man erhält so drei weitere Gleichungen aus 1). Aus jeder dieser Gleichungen und der Gleichung 1) lassen sich durch Aenderungen des Argumentes $a$ je drei neue Gleichungen ableiten. Man erhält auf diese Art 16 Gleichungen, welche zu ebenso vielen Integralen Veranlassung geben, deren Zahl auf 20 steigt, wenn die Gränzen der Integrationsvariabeln bei vier derselben so bestimmt werden, dass die Integrale endlich bleiben.

Differentiirt man jede der Gleichungen:

$$\vartheta\left(z+\frac{\pi}{2}\right)=\vartheta_3(z),\ \vartheta\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{zi}\vartheta_2(z),$$

$$\vartheta\left(z+\frac{i}{2}\log q\right)=-iq^{-\frac{1}{4}}e^{zi}\vartheta_1(z),$$

in Beziehung auf $z$ und dividirt die so erhaltene Gleichung durch die primitive Gleichung, so folgt:

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'\left(z+\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta\left(z+\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)}, & \dfrac{\vartheta'\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q\right)}{\vartheta\left(z+\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q\right)} = i+\dfrac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} \\ & \dfrac{\vartheta'\left(z+\frac{i}{2}\log q\right)}{\vartheta\left(z+\frac{i}{2}\log q\right)} = i+\dfrac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)}. \end{cases}$$

Ebenso findet man:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)} = \dfrac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, & \dfrac{\vartheta'(z+\pi+i\log q)}{\vartheta(z+\pi+i\log q)} = 2i+\dfrac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} \\ & \dfrac{\vartheta'(z+i\log q)}{\vartheta(z+i\log q)} = 2i+\dfrac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}. \end{cases}$$

In der Gleichung 1) lasse man $x$ und $a$ *gleichzeitig* um $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\frac{i}{2}\log q$ und $\frac{i}{2}\log q$ zunehmen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 2) und 3) folgt:

$$4)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{k^2\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

$$5)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{\mathrm{tang\,am}\frac{2Ka}{\pi}\;\Delta\;\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}$$

$$6)\quad \frac{2K}{\pi}\,\frac{\mathrm{cotang\,am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x-a)}{\vartheta(x-a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'(x+a)}{\vartheta(x+a)}+\frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

Die Gleichungen 2), 4), 5) und 6) nach $x$ zwischen den Gränzen 0 und $x$ integrirt geben, wenn die Integrationsvariabele durch $z$ bezeichnet wird:

$$7)\quad \frac{2K}{\pi}k^2\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}dz =$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+a)}{\vartheta(x-a)}+x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

$$8)\quad \frac{2K}{\pi}k^2\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+a)}{\vartheta(x-a)}-x\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

$$9)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+a)}{\vartheta(x-a)}-x\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}.$$

$$10)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{cotang}\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}dz =$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x+a)}{\vartheta(x-a)}+x\frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

Durch Aenderung von $a$ um $\frac{\pi}{2}$ geben die Gleichungen 7)—10) zu den folgenden Integralen Veranlassung:

$$11)\quad \frac{2K}{\pi}k^2k'^2\int_0^x \frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta^3\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_3(x+a)}{\vartheta_3(x-a)}+x\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

$$12)\quad \frac{2K}{\pi}k^2\int_0^x \frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\frac{\cos^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz =$$

$$-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_3(x+a)}{\vartheta_3(x-a)}+x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

$$13)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\frac{\cos^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_3(x+a)}{\vartheta_3(x-a)}+x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

$$14)\quad \frac{2K}{\pi}k'^2\int_0^x \frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(1-k^2\frac{\cos^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_3(x+a)}{\vartheta_3(x-a)}+x\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}.$$

In der Gleichung 6) lasse man $x$ um $\frac{i}{2}\log q$ zunehmen. Dann folgt:

$$15)\quad \frac{2K}{\pi}\frac{\mathrm{cotangam}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\sin^2\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}-\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}=$$

$$\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(x-a)}{\vartheta_1(x-a)}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta_1'(x+a)}{\vartheta_1(x+a)}+\frac{\vartheta_1'(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

Für den Fall dass $x>a$, ist:

$$\frac{\vartheta'_1(x-a)}{\vartheta_1(x-a)}=\frac{d\log\vartheta_1(x-a)}{dx}.$$

Hat man dagegen $a<x$, so ist:

$$\frac{\vartheta'_1(x-a)}{\vartheta_1(x-a)}=-\frac{\vartheta'_1(a-x)}{\vartheta_1(a-x)}=\frac{d\log\vartheta_1(a-x)}{dx}.$$

Integrirt man in der Gleichung 15) nach $x$, so seien die Gränzen 0 und $x$, wenn $x < a$, dagegen $x$ und $\frac{\pi}{2}$, wenn $x > a$. Man gelangt zu ähnlichen Gleichungen wie die Gleichung 15), wenn man in jeder der Gleichungen 5), 4) und 1) $x$ um $\frac{i}{2}\log q$ zunehmen lässt. Integrirt man in diesen Gleichungen unter denselben Bedingungen wie in der Gleichung 15), so ergeben sich die folgenden acht Integrale:

$$16)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{cotang}\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}\,dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x\,\frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

$$17)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}\,dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x\,\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}.$$

$$18)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}\,dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(x-x)} - x\,\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

$$19)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}\,dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(a+x)}{\vartheta_1(a-x)} - x\,\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Für $x > a$ erhält man:

20) $$\frac{2K}{\pi}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotang}\,\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)}+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

21) $$\frac{2K}{\pi}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}\,\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)}+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}.$$

22) $$\frac{2K}{\pi}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\right)}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)}+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

23) $$\frac{2K}{\pi}\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}dz =$$

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_1(x+a)}{\vartheta_1(x-a)}+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

Aus den Gleichungen 16)—19) leitet man endlich die folgenden ab, wenn $a$ mit $\frac{\pi}{2}+a$ vertauscht wird:

24) $$\frac{2Kk'^2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}dz$$

$$= -\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(a+x)}{\vartheta_2(a-x)}-x\frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)}.$$

$$25)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}\,dz$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(a+x)}{\vartheta_2(a-x)}+x\frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)}.$$

$$26)\quad \frac{2K}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}\,dz$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(a+x)}{\vartheta_2(a-x)}+x\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}.$$

$$27)\quad \frac{2Kk'^2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^3\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}\left(\frac{\cos^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}-\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right)}\,dz$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta_2(a+x)}{\vartheta_2(a-x)}+x\frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)}.$$

Die im Vorstehenden aufgestellten Gleichungen umfassen alle Fälle, welche bei Parametern mit reellem Argument vorkommen. Die entsprechenden Integrale, deren Parameter imaginäre Argumente haben, lassen sich unmittelbar aus den vorhergehenden durch Vertauschung von $a$ mit $ai$ herleiten. Da die Aufstellung von 16 neuen Gleichungen etwas weitläufig ist, so sollen nur vier derselben angemerkt werden, aus welchen sich mittelst der folgenden Gleichungen die übrigen ohne Schwierigkeit ergeben.

Die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_1(a)}{\vartheta(a)}=\sqrt{k}\sin\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi},\quad \frac{\vartheta_2(a)}{\vartheta(a)}=\sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi},$$

$$\frac{\vartheta_3(a)}{\vartheta(a)}=\frac{\Delta\operatorname{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\sqrt{k'}},$$

geben durch Differentiation in Beziehung auf $a$:

$$\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)} = \frac{\vartheta'_1(a)}{\vartheta_1(a)} - \frac{2K}{\pi}\frac{\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}$$

$$= \frac{\vartheta'_2(a)}{\vartheta_2(a)} + \frac{2K}{\pi}\frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\,\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}$$

$$= \frac{\vartheta'_3(a)}{\vartheta_3(a)} + \frac{2Kk^2}{\pi}\frac{\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}}.$$

Man setze $ai$ statt $a$, dividire auf beiden Seiten durch $i$ und führe zur Vereinfachung die Bezeichnung:

$$28)\quad \mathrm{am}\left(\frac{2Ka}{\pi}, k'\right) = \beta$$

ein. Es ist dann:

$$29)\quad \begin{cases} \frac{1}{i}\frac{\vartheta'(ai)}{\vartheta(ai)} = \frac{1}{i}\frac{\vartheta'_1(ai)}{\vartheta_1(ai)} + \frac{2K}{\pi}\frac{\Delta(\beta, k')}{\sin\beta\cos\beta} \\ \qquad = \frac{1}{i}\frac{\vartheta'_2(ai)}{\vartheta_2(ai)} + \frac{2K}{\pi}\frac{\sin\beta\,\Delta(\beta, k')}{\cos\beta} \\ \qquad = \frac{1}{i}\frac{\vartheta'_3(ai)}{\vartheta_2(ai)} + \frac{2Kk^2}{\pi}\frac{\sin\beta}{\cos\beta\,\Delta(\beta, k')}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 7), 11), 16) und 24) vertausche man $a$ mit $ai$ und führe den Winkel $\beta$ mittelst der Gleichung 28) ein. Ferner setze man in den Integralen $\frac{2Kz}{\pi} = w$. Hierdurch ergeben sich die folgenden vier Integrale, wenn auf beiden Seiten durch $i$ dividirt wird:

$$30)\quad \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{k^2\sin\beta\,\Delta(\beta, k')\sin^2\mathrm{am}w}{\cos^3\beta\,(1 + k^2\tan\mathrm{g}^2\beta\sin^2\mathrm{am}w)}\,dw =$$

$$-\frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(ai + x)}{\vartheta(ai - x)} + \frac{x}{i}\frac{\vartheta'(ai)}{\vartheta(ai)}.$$

$$31)\quad \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{k^2 k'^2 \sin\beta \cos\beta \sin^2 \mathrm{am} w}{\Delta^3(\beta, k')\left(1 - \frac{k^2}{\Delta^2(\beta, k')} \sin^2 \mathrm{am} w\right)} dw =$$
$$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_3(ai + x)}{\vartheta_3(ai - x)} - \frac{x}{i} \frac{\vartheta'_3(ai)}{\vartheta_3(ai)}.$$

$$32)\quad \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{\cos\beta\, \Delta(\beta, k') \sin^2 \mathrm{am} w}{\sin^3\beta\,(1 + \cot^2 \mathrm{am}\beta \sin^2 \mathrm{am} w)} dw =$$
$$\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_1(ai + x)}{\vartheta_1(ai - x)} - \frac{x}{i} \frac{\vartheta'_1(ai)}{\vartheta_1(ai)}.$$

$$33)\quad \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{\sin\beta \cos\beta\, \Delta(\beta, k') \sin^2 \mathrm{am} w}{1 - \Delta^2(\beta, k') \sin^2 \mathrm{am} w} dw =$$
$$-\frac{1}{2i} \log \frac{\vartheta_2(ai + x)}{\vartheta_2(ai - x)} + \frac{x}{i} \frac{\vartheta'_2(ai)}{\vartheta_2(ai)}.$$

Die Factoren von $\frac{x}{i}$ auf den rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich mittelst der Gleichungen 29) transformiren. Bringt man jeden Term $\frac{2Kx}{\pi} H$, wo $H$ von $\beta$ abhängt, auf die Form:

$$\int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} H dw,$$

vereinigt das Integral mit dem links stehenden durch Addition oder Subtraction, so ergeben sich die übrigen zwölf elliptischen Integrale dritter Gattung mit imaginären Parametern.

Die 20 Integrale der Gleichungen 7) — 10), 11) — 14), 16) — 19), 20) — 23) und 24) — 27) lassen sich je zwei durch Addition oder Subtraction vereinigen. Die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen lassen sich unmittelbar durch elliptische Functionen ausdrücken, hierdurch kann man eine Menge von Reductionsformeln herstellen, welche die von *Legendre* angestellten Untersuchungen über den Parameter (§ 28) umfassen. Zu analogen Resultaten geben die Gleichungen 30) — 33) Veranlassung.

Die Logarithmen der Theta-Functionen auf den rechten Seiten der Gleichungen 20) — 33) hat *Jacobi* in Reihen entwickelt. In Folge der Bemerkung am Schlusse der Note IV ist allgemein:

$$\vartheta(z) = \prod_1^\infty (1-q^{2r}) \prod_1^\infty (1-q^{2r-1}e^{2zi})(1-q^{2r-1}e^{-2zi}).$$

Vertauscht man $z$ mit $x+ai$ und $x-ai$, wo $a$ positiv ist, so folgt durch Division:

$$\frac{\vartheta(x+ai)}{\vartheta(x-ai)} = \prod_1^\infty \frac{1-q^{2r-1}e^{-2a}e^{2xi}}{1-q^{2r-1}e^{-2a}e^{-2xi}} \cdot \frac{1-q^{2r-1}e^{2a}e^{-2xi}}{1-q^{2r-1}e^{2a}e^{2xi}},$$

oder:

$$34) \quad e^{-2a} = q^b$$

gesetzt:

$$\frac{\vartheta(x+ai)}{\vartheta(x-ai)} = \prod \frac{1-q^{2r-1+b}e^{2xi}}{1-q^{2r-1+b}e^{-2xi}} \cdot \frac{1-q^{2r-1-b}e^{-2xi}}{1-q^{2r-1-b}e^{2xi}}.$$

Wendet man hierauf:

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\alpha+\beta i}{\alpha-\beta i} = \text{arc tang}\,\frac{\beta}{\alpha}$$

an, so folgt:

$$35) \quad \frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(x+ai)}{\vartheta(x-ai)} =$$

$$\sum_1^\infty \left[\text{arc tang}\,\frac{q^{2r-1-b}\sin 2x}{1-q^{2r-1-b}\cos 2x} - \text{arc tang}\,\frac{q^{2r-1+b}\sin 2x}{1-q^{2r-1+b}\cos 2x}\right].$$

Aus der Gleichung 34) folgt $2a = -b\log q = b\pi\frac{K'}{K}$, also

$$36) \quad \frac{2aK}{\pi} = bK'.$$

Die Gleichung 28) wird hierdurch:

$$\text{am}\,(bK', k') = \beta.$$

Nimmt man nun $\beta < \frac{\pi}{2}$, so ist $bK' < K'$ d. i. $b < 1$. In den Gleichungen 34), 35) und 36) kann immer $b < 1$ angenommen werden. Es ist dann in allen Termen auf der rechten Seite der Gleichung 35) der Exponent der verschiedenen Potenzen von $q$ positiv, da die Exponenten zunehmen, so nehmen die Terme unbegränzt ab. Die Reihe enthält abwechselnd positive und negative Terme. Wird die Reihe mit einem positiven Terme abgebrochen, so ist das Resultat zu gross, dagegen zu klein, wenn man bei einem negativen Term stehn bleibt. Die rechte Seite der Gleichung 35) liegt also zwischen den Gränzen:

$$\text{arc tang}\,\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x},$$

$$\text{arc tang}\,\frac{q^{1-b}\sin 2x}{1-q^{1-b}\cos 2x}-\text{arc tang}\,\frac{q^{1+b}\sin 2x}{1-q^{1+b}\cos 2x}=$$

$$\text{arc tang}\,\frac{(q^{1-b}-q^{1+b})\sin 2x}{1-(q^{1-b}+q^{1+b})\cos 2x+q^2}.$$

Die Maxima dieser Terme finden für $\cos 2x = 0$ statt.

Statt der obigen Reihenentwickelung lässt sich die Gleichung 30) auch auf folgende Art behandeln. Man setze:

$$37)\quad \int_0^{\frac{2Kx}{\pi}} \frac{k^2\sin\beta\,\Delta(\beta,k')\sin^2\text{am}\,w}{\cos^3\beta(1+k^2\tang^2\beta\,\sin^2\text{am}\,w)}\,dw = y,$$

wodurch die Gleichung 30) übergeht in:

$$38)\quad y = \frac{1}{2i}\log\frac{\vartheta(ai-x)}{\vartheta(ai+x)}+\frac{x}{i}\frac{\vartheta'(ai)}{\vartheta(ai)}.$$

Setzt man weiter:

$$\frac{\vartheta'(ai)}{\vartheta(ai)} = \frac{1}{i}\frac{d\log\vartheta(ai)}{da} = \frac{m}{i},$$

so ist in Folge von § 18 $m$ eine reelle Quantität. Die Gleichung 38) wird dann einfacher mit $i$ multiplicirt:

$$(y+mx)i = \frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(ai-x)}{\vartheta(ai-x)} = \log\sqrt{\frac{\vartheta(ai-x)}{\vartheta(ai+x)}}.$$

oder:

$$39)\quad e^{(y+mx)i} = \sqrt{\frac{\vartheta(ai-x)}{\vartheta(ai+x)}}.$$

Vertauscht man $i$ mit $-i$, so folgt:

$$e^{-(y+mx)i} = \sqrt{\frac{\vartheta(ai+x)}{\vartheta(ai-x)}}.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 39) leitet man unmittelbar die beiden folgenden ab:

$$40)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{(y+mx)i}+e^{-(y+mx)i}}{2} = \cos(y+mx) = \dfrac{\vartheta(ai-x)+\vartheta(ai+x)}{2\sqrt{\vartheta(ai-x)\,\vartheta(ai+x)}}. \\ \dfrac{e^{(y+mx)i}-e^{-(y+mx)i}}{2i} = \sin(y+mx) = \dfrac{\vartheta(ai-x)-\vartheta(ai+x)}{2i\sqrt{\vartheta(ai-x)\,\vartheta(ai+x)}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen gestatten $\cos y$ und $\sin y$ mittelst sehr convergenter Reihen darzustellen. Die in dem Nenner auf der

rechten Seite vorkommende Quantität $\vartheta(ai-x)\,\vartheta(ai+x) = \vartheta(x-ai)\,\vartheta(x+ai)$ lässt sich mittelst der Gleichungen des § 18 als reelle Grösse darstellen. Nimmt man z. B. in:

$$\vartheta(0)^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) = \vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_1(y)^2 = \vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2\left[1 - \frac{\vartheta_1(x)^2}{\vartheta(x)^2}\,\frac{\vartheta_1(y)^2}{\vartheta(y)^2}\right]$$

$y = ai$, so folgt:

$$\vartheta(x+ai)\,\vartheta(x-ai) = \left(\frac{\vartheta(x)\,\vartheta(ai)}{\vartheta(0)}\right)^2\left[1 - k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2Kai}{\pi}\right]$$

$$= \left(\frac{\vartheta(x)\,\vartheta(ai)}{\vartheta(0)}\right)^2\left[1 + k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}\,\mathrm{tang}^2\,\mathrm{am}\left(\frac{2Ka}{\pi}, k'\right)\right].$$

Andere Formen für das links stehende Product leitet man auf dem angegebenen Wege ohne Schwierigkeit mit Hülfe der Gleichungen des § 18 ab.

Zur Vervollständigung des Vorstehenden seien noch folgende literarische Anmerkungen beigefügt.

Die ersten Bemerkungen *Jacobi's* vor Erscheinen der „Fundamenta" über die elliptischen Integrale dritter Gattung sind enthalten in „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" (Crelle J. t. 3. p. 303 u. 403, t. 4. p. 189).

Eine besondere Bemerkung von *Abel*: „Théorème général sur la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce" ist enthalten in Crelle Journal, t. 3. p. 402. Oeuvres. t. 1. p. 417.

In Verbindung mit allgemeinern Untersuchungen sind die hierhin gehörigen Integrale von *Abel* in dem „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" behandelt auf p. 245—277 im IV. Bande des Journals von Crelle. (Oeuvres. t. 1. p. 335—350.)

Die beiden folgenden Aufsätze von *Abel* verdienen besonders erwähnt zu werden, weil dieselben Theoreme enthalten, welche, die engen Schranken der elliptischen Integrale von *Legendre* durchbrechend, eine grossartige Theorie geschaffen haben, mit welcher der Name *Abel* unzertrennlich verbunden ist.

Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes. (Crelle. J. t. 3. p. 313—323, Ov. t. 1 p. 288—298.)

Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendantes (Crelle J. t. 4 p. 200—201, Ov. t. 1. p. 324—325).

In der „Théorie des Fonctions elliptiques" Deuxième Supplément p. 128—159, Troisième supplément p. 199—201, hat *Legendre* die elliptischen Integrale dritter Gattung in Form von Reihen aufgestellt, wie dieses in § 32 geschehn. Auf p. 149 der ersten Abhandlung wird eine neue Function, definirt durch die Gleichung:

$$Y(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{E(k, \varphi)}{\Delta(k, \varphi)} d\varphi,$$

aufgestellt. Diese Bezeichnung, ziemlich unbequem und nicht grade erforderlich, scheint später total in Vergessenheit gerathen zu sein.

Ueber die numerische Berechnung vergleiche man *Somoff*: „Méthode du calcul des fonctions elliptiques" (Crelle Journ. t. 47 p. 269—289). In den „Philosophical Transactions. For the year MDCCCLII" (London 1852 p. 311—417) und „Phil. Tr. For the year MDCCCLIV" (London 1854 p. 53) hat *Booth* in einer sehr ausgedehnten Abhandlung betitelt: „Researches on the geometrical proporties of elliptic integrals" versucht, namentlich durch Untersuchung sphärischer Kegelschnitte, die von *Legendre* gefundenen Resultate geometrisch herzuleiten. Der grosse aufgewandte Apparat von geometrischer Deduction und Rechnung lässt sich mit dem erhaltenen Erfolg nicht gut in Einklang bringen.

Bei den vielfachen Anwendungen der elliptischen Functionen auf Probleme der Mechanik treten häufig elliptische Integrale dritter Gattung in den Vordergrund. Aus den hierhin gehörigen Arbeiten mögen nur die folgenden älteren hervorgehoben werden, unter denen namentlich die erste den Integralen einige Aufmerksamkeit zugewandt hat.

*Tissot:* Thèse de Mécanique. Journal de Mathém. t. XVII. p. 88—116. Année 1852.

*Dumas:* Ueber die Bewegung des Raumpendels mit Rücksicht auf die Rotation der Erde. Crelle Journ. t. 50. p. 52—78, 126—186.

*Lottner:* Reduction der Bewegung eines schweren, um einen festen Punct rotirenden Revolutionskörpers auf die elliptischen Transcendenten. Crelle J. t. 50. p. 111—125.

Eine sehr schöne Anwendung der elliptischen Integrale dritter Gattung auf dreifach periodische Functionen enthält die schon früher citirte Preisschrift von *Rosenhain:* Mém. sur les fonct. de deux variables et à quatre périodes. (Mém. présent. p. div. savans à l'Ac. Paris 1851. t. XI. p. 376). Es handelt sich hierbei darum, aus den Gleichungen:

$$u = \int_0^{x_1} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \pm \int_0^{x_2} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

$$v = \int_0^{x_1} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}} \pm \int_0^{x_2} \frac{(\alpha'+\beta' x)\,dx}{(1-\lambda^2 x)\sqrt{x(1-x)(1-k^2x)}},$$

$x_1$ und $x_2$ als Functionen von $u$ und $v$ zu bestimmen. Diese Gleichungen lassen sich durch Combinationen etwas transformiren, so dass die linken Seiten $gu+hv$, $g'u+h'v$ werden, wo $g, h, g', h'$ Constanten sind. Setzt man einfacher für den Modul $k$:

$$\sqrt{x} = \sin\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi},\quad \sqrt{x_1} = \sin\mathrm{am}\frac{2Ku_1}{\pi},\quad \sqrt{x_2} = \sin\mathrm{am}\frac{2Ku_2}{\pi},$$

$$u = \frac{2Ku'}{\pi},\quad 2\alpha = 1,\quad 2\beta = -\lambda^2,\quad \lambda^2 = k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi},$$

$$2\alpha' = -\frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)},$$

$$2\beta' = \frac{\pi}{2K}\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi} + k^2\sin\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\cos\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi}\Delta\mathrm{am}\frac{2Ka}{\pi},$$

so gehn die obigen Gleichungen nach § 33 über in:

$$41)\quad u' = u_1 + u_2,$$

$$42)\quad 2v = \log\frac{\vartheta(u_1-a)\,\vartheta(u_2-a)}{\vartheta(u_1+a)\,\vartheta(u_2+a)}.$$

Zieht man die Gleichung 7) des § 33 zu Hülfe für $x = u_1$ und $x = u_2$, so erhält man eine Gleichung zwischen $\sin\mathrm{am}\frac{2Ku_1}{\pi}$ und $\sin\mathrm{am}\frac{2Ku_2}{\pi}$, d. h. nach 41) und 42) eine Gleichung zwischen diesen Quantitäten und $u'$, $v$ und $a$. In Verbindung mit der Gleichung $u' = u_1 + u_2$, oder

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Ku'}{\pi} = \sin\mathrm{am}\,u = \sin\mathrm{am}\frac{2K(u_1+u_2)}{\pi}$$

erhält man auf diese Art zwei Gleichungen zur Bestimmung von

$$\sin\mathrm{am}\frac{2Ku_1}{\pi} = \sqrt{x_1},\quad \sin\mathrm{am}\frac{2Ku_2}{\pi} = \sqrt{x_2}$$

in Function von $u, v$ und $a$.

Es ist dieses eine Andeutung wie *Rosenhain* das Problem behandelt hat, eine Andeutung, deren vollständige Ausführung zu weit führen würde. Setzt man $\sqrt{x_1}$, $\sqrt{x_2}$ als Functionen der beiden Variabeln $u$ und $v$ ein, so findet *Rosenhain*, dass diese Quantitäten ungeändert bleiben, bei *gleichzeitigen* Zunahmen von $u$ und $v$, so dass

wenn $u$ um $2K$ zunimmt, $v$ um $0$ zunimmt,

„ $u$ „ $2iK'$ „ „ $v$ „ $\frac{i\pi a}{K}$ „ „

„ $u$ „ $0$ „ „ $v$ „ $i\pi$ „ .

Diese besondere Art von dreifach periodischen Functionen mit zwei Variabeln, basirt auf elliptische Integrale dritter Gattung, dient nur als eine Art Einleitung zu dem eigentlichen Gegenstand der oben bemerkten ausgezeichneten Abhandlung.

---

# Neunter Abschnitt.

## § 35. Die Transformation der elliptischen Functionen. Erste Untersuchungen von Jacobi, betreffend algebraische Principien.

Am Ende des ersten Abschnitts ist ein Theorem der „Fundamenta“ angeführt, mit dessen Hülfe sich ein elliptisches Differential

auf beliebig viele Arten in einen ähnlichen Ausdruck transformiren lässt. Die Vergleichung derartiger Differentiale kommt auf die Vergleichung elliptischer Functionen heraus, welche sich sowohl durch ihre Argumente, wie durch die Moduli unterscheiden. Namentlich der letztere Umstand hat Veranlassung zu einer Reihe von Untersuchungen gegeben, welche man unter den Namen *die Transformation der elliptischen Functionen* zusammengefasst hat. Die ungemeine Ausdehnung, welche diese ziemlich schwierige und verwickelte Theorie allmählich gewonnen hat, gestattet an diesem Orte nur eine Hervorhebung und Deduction der wesentlichsten Resultate, soweit dieselben bei einer einiger Maassen vollständigen Darstellnng in Betracht kommen.

Die Basis der Untersuchungen über Transformation ist ursprünglich eine algebraische und findet ihren Ausdruck in dem folgenden Problem, welches *Jacobi* an die Spitze seiner „Fundamenta" gesetzt hat:

„Quaeritur Functio rationalis $y$ elementi $x$ ejusmodi, ut sit:

$$\frac{dy}{\sqrt{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}}."$$

Hierzu bemerkt *Jacobi* „Quod Problema et Multiplicationem videmus amplecti et Transformationem."

Zur Vereinfachung des Folgenden setze man:

$$1) \quad V = A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4 = A'(1 - \alpha' y)(1 - \beta' y)(1 - \gamma' y)(1 - \delta' y),$$

wo $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ und $\delta'$ beliebige Quantitäten sind. Durch $U$ und $V$ bezeichne man die folgenden Polynome von $x$, welche prim zu einander sind:

$$2) \quad \begin{aligned} U &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r, \\ V &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_s x^s. \end{aligned}$$

Es ist dann:

$$V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx} = (r-s)\,a_r b_s x^{r+s-1} +$$

$$[(r-s+1)\,a_r b_{s-1} + (r-s-1)\,a_s b_{r-1}]\,x^{r+s-2} + \ldots + a_1 b_0 - a_0 b_1.$$

Die rechte Seite ist höchstens vom Grade $r+s-1$, wenn $r$

und $s$ von einander verschieden, für $r = s$ höchstens vom Grade $r + s - 2$.

In dem Ausdrucke:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

setze man $Y = \frac{U}{V}$. Nach 1) ist dann:

$$3) \quad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{\sqrt{A'(V-\alpha' U)(V-\beta' U)(V-\gamma' U)(V-\delta' U)}}dx.$$

Das Polynom unter dem Wurzelzeichen auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung unterwerfe man der Bedingung, gleich dem Product eines Polynoms vom vierten Grade von $x$ in das Quadrat eines Polynoms derselben Variabeln zu sein. Man setze:

$$4) \quad A'(V-\alpha' U)(V-\beta' U)(V-\gamma' U)(V-\delta' U) = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4)\,T^2.$$

Die Gleichung 3) nimmt dann folgende Form an:

$$5) \quad \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}},$$

wo:

$$6) \quad \frac{1}{M} = \frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{T}.$$

Da in Folge der Annahme $U$ und $V$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, so ist dieses auch nicht der Fall mit je zweien der Binome $V-\alpha' U$, $V-\beta' U$, $V-\gamma' U$, $V-\delta' U$. Jenachdem $r \gtrless s$, ist das Product dieser vier Binome vom Grade $4r$ oder $4s$. Sei zuerst $r \geqq s$. Nach 4) ist dann $T^2$ vom Grade $4r-4$, also $T$ vom Grade $2r-2$. Es ist nun identisch:

$$(V-\varepsilon U)\frac{dU}{dx} - U\frac{d(V-\varepsilon U)}{dx} = V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}.$$

Setzt man hierin successive $\varepsilon = \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, so folgt, dass jeder quadratische Factor eines der Binome $V-\alpha' U$, $V-\beta' U$ $V-\gamma' U$, $V-\delta' U$ in der ersten Potenz in

$$7) \quad V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}$$

vorkommt, mithin auch die Gesammtheit $T$ dieser Factoren, es ist also:

$$\frac{V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}}{T}$$

eine ganze Function von $x$. Nun ist der Zähler dieses Ausdrucks höchstens vom Grade $r+s-1$. Für $r \geqq s$ ist $T$ vom Grade $2r-2$. Hieraus folgt: $r+s-1 \geqq 2r-2$ d. i. $s \geqq r-1$. Da nun auch $r \geqq s$, so ergeben sich die beiden Fälle $s = r-1$ und $s = r$.

Nimmt man $s \geqq r$, so ist $T$ vom Grade $2s-2$. Man hat dann $r+s-1 \geqq 2s-2$, d. i. $r \geqq s-1$, woraus in Verbindung mit $s \geqq r$ die beiden Fälle $r = s-1$ und $r = s$ folgen.

Diese sämmtlichen drei Fälle sind in dem Falle $r = s = m$ enthalten, wenn man setzt:

$$8) \quad y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m},$$

wo auch eine der Quantitäten $b_m$ oder $a_m$ verschwinden kann. Es ist dann der Ausdruck in 7) vom Grade $2m-2$, es ist ferner $T$ vom Grade $2m-2$, da nun in 6) auf der rechten Seite der Zähler alle Factoren des Nenners enthält, da ferner beide Polynome von demselben Grade sind, so ist die rechte Seite von 6) constant, mithin auch $M$. Die Gleichung 7) kommt, abgesehen von dem constanten Factor $M$, auf die Gleichung des Problems zurück. Die gegebene Differentialgleichung ist also mittelst der Gleichung 8) integrabel.

Dividirt man in 8) durch eine der Constanten $a_0, \ldots a_m, b_0, \ldots b_m$, welche nicht verschwindet, Zähler und Nenner, so enthält der Ausdruck für $y$ rechts $2m+1$ Constanten. Da in $T^2$ unter den $4m-4$ Factoren $2m-2$ gleiche vorkommen, so erhält man eine gleiche Anzahl von Bedingungen zwischen den bemerkten Constanten. Hieraus folgt unter den $2m+1$ Constanten, enthalten in dem Werthe von $y$, bleiben $2m+1-(2m-2) = 3$ arbiträr. Diese drei Constanten lassen sich verwenden, um die rechte Seite der Gleichung 5) auf die Normalform der elliptischen Differentiale von *Legendre* zu bringen.

Die in der Gleichung 8) enthaltene Substitution nennt *Jacobi* der $m^{\text{ten}}$ Ordnung, oder einfach zur Zahl $m$ gehörig.

Man kann in der Gleichung 5), ohne Beeinträchtigung, für beide Seiten die Normalformen annehmen und gelangt dann zu der folgenden Differentialgleichung, deren Untersuchung die Transformation der elliptischen Functionen involvirt:

$$9) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

In der vorstehenden Gleichung sind $k$ und $l$ positive, ächte Brüche, $M$ ist eine Constante.

Es soll angenommen werden, dass $y$ mit $x$ verschwindet. Da nach 9) $y$ sein Zeichen ändert, wenn $x$ in $-x$ übergeht, so muss in der Gleichung 8) der Zähler nur ungrade, der Nenner nur grade Potenzen von $x$ enthalten. Es bieten sich also hier zwei Fälle dar, entweder der Grad des Nenners ist um eine Einheit höher wie der des Zählers oder umgekehrt. Ist also $m$ grade, so muss in 8) $a_m = 0$ sein, dagegen für ein ungrades $m$ ist $b_m = 0$. Diesen beiden Fällen entsprechend unterscheidet *Jacobi* (F. p. 18 u. 19) Substitutionen grader und ungrader Ordnung.

Die Substitutionen grader Ordnung sind in folgender Gleichung enthalten:

$$10) \quad y = \frac{x(a + a_1x^2 + a_2x^4 + \ldots + a_{m-1}x^{2m-2})}{1 + b_1x^2 + b_2x^4 + \ldots + b_mx^{2m}} = \frac{U}{V}.$$

Es sind die Binome $V+U$, $V-U$, $V+lU$, $V-lU$ sämmtlich vom Grade $2m$, von den Factoren $1+x$, $1-x$, $1+kx$, $1-kx$ muss eins der Binome je zwei enthalten. Es seien $A$, $B$, $C$, $D$ Polynome von $x$. Man kann nicht setzen $V+U = (1+x)(1-x)A^2 = (1-x^2)A^2$. Durch Aenderung von $x$ in $-x$ möge $A$ in $B$ und $C$ in $D$ übergehen. Durch dieselbe Aenderung geht nach 10) $U$ in $-U$ über. Die Annahme $V+U = (1-x^2)A^2$ führt durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ auf $V-U = (1-x^2)B^2$, d. h. $V+U$ und $V-U$, mithin auch $V$ und $U$, haben den gemeinschaftlichen Factor $1-x^2$, was gegen die Voraussetzung ist. Enthält also $V+U$ zwei der Factoren $1+x$, $1-x$, $1+kx$, $1-kx$, so kann dieses nur das Product von $1 \pm x$ in $1 \pm kx$ sein. Man kann also setzen

11) $V+U = (1+x)(1+kx)A^2, \quad V-U = (1-x)(1-kx)B^2,$

12) $V+lU = C^2, \quad V-lU = D^2.$

Die Gleichung für $V-U$ ergiebt sich aus $V+U$ durch Vertauschung von $x$ mit $-x$. Dann müssen nothwendig $V+lU$, $V-lU$ vollständige Quadrate sein.

Nimmt man $k$ als gegeben an, so ist nach 11) $V+U$ durch $1+x$ und $1+kx$ theilbar, zwischen den $2m$ Constanten $a_1, a_2 \ldots a_m$, $b_1 \ldots b_m$ der Gleichung 8) ergeben sich zwei Relationen. Da ferner nach 11) $\dfrac{V+U}{(1+x)(1+kx)}$ das Quadrat eines Polynoms vom Grade $m-1$ ist, so erhält man $m-1$ Relationen zwischen diesen Constanten. Die Gleichung $V+lU = C^2$ giebt $m$ weitere Relationen, so dass man im Ganzen $2+m-1+m = 2m+1$ Gleichungen zur Bestimmung der Quantität $l$ und der $2m$ Constanten der Substitution 8) erhält, wodurch also die bemerkte Substitution vollständig bestimmt ist.

Die Substitutionen ungrader Ordnung sind in der Gleichung enthalten:

13) $$y = \frac{x(a+a_1x^2+a_2x^4+\ldots+a_mx^{2m})}{1+b_1x^2+b_2x^4+\ldots+b_mx^{2m}} = \frac{U}{V}.$$

Da in diesem Falle die Binome $V+U, V-U, V+lU, V-lU$ sämmtlich vom Grade $2m+1$ sind, da ferner $U$ in $-U$ durch Vertauschung von $x$ mit $-x$ übergeht, so kann man in diesem Falle setzen:

14) $V+U = (1+x)A^2, \quad V-U = (1-x)B^2,$

15) $V+lU = (1+kx)C^2, \quad V-lU = (1-kx)D^2.$

Es sind $A$, $B$, $C$ und $D$ Polynome vom Grade $m$. Nimmt man wieder $k$ als gegeben an, so erhält man zur Bestimmung der $2m+1$ Constanten $a, \ldots a_m, b_1 \ldots b_m$ und des Moduls $l$ ebensoviele Gleichungen.

Es muss nämlich $V+U$ durch $1+x$, $V+lU$ durch $1+kx$ theilbar sein, was zwei Relationen giebt. Da ferner nach 14) und 15):

$$\frac{V+U}{1+x}, \quad \frac{V+lU}{1+kx}$$

vollständige Quadrate von Polynomen $m^{\text{ten}}$ Grades sind so erhält man je $m$ Bedingungsgleichungen, also deren $2m$, welche in Ver-

bindung mit den beiden erst bemerkten zur Bestimmung von $l$ und der Constanten der Gleichung 13) hinreichen. Eine Substitution, enthalten in der Gleichung 13), ist also vollständig bestimmt.

Für eine Transformation $m^{\text{ter}}$ Ordnung sei:

$$16) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad y = \frac{U}{V}.$$

Für eine Transformation von der Ordnung $m_1$ sei:

$$17) \quad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-l_1^2z^2)}} = \frac{1}{M_1}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}, \quad z = \frac{U_1}{V_1}.$$

Die beiden Differentialgleichungen 16) und 17) geben:

$$18) \quad \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-l_1^2z^2)}} = \frac{1}{M_1}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Es ist $q^{m_1}$ die höchste Potenz von $y$ enthalten in $U_1$ und $V_1$, ferner $x^m$ die höchste Potenz von $x$ enthalten in $U$ und $V$. Setzt man also nach 16) $y = \frac{U}{V}$ in $z = \frac{U_1}{V_1}$, so folgt $z = \frac{U_2}{V_2}$, wo $U_2$ und $V_2$ Polynome von $x$ sind, höchstens vom Grade $m.m_1$. Aus dem Vorstehenden folgt, dass aus zwei Transformationen von den Graden $m$ und $m_1$ sich eine Transformation vom Grade $m.m_1$ zusammensetzen lässt. Allgemein führt eine Zusammensetzung von Transformationen von den Graden $m$, $m_1$, $m_2$.... auf eine Transformation vom Grade $m.m_1.m_2$..... Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes, wie später gezeigt wird, dass eine Transformation vom Grade $m.m_1.m_2$.... sich herstellen lässt durch successive Anwendungen der einzelnen Transformationen von den Graden $m$, $m_1$, $m_2$.. etc. Was die Transformationen ungrader Ordnung betrifft, so braucht man sich auf die ungraden Primzahlen zu beschränken, aus denen die ungraden Zahlen bestehn. Da eine grade Zahl das Produkt einer Potenz von 2 in eine ungrade Zahl ist, so reduciren sich die Transformationen grader Ordnung auf Zusammensetzungen von Transformationen ungrader Ordnung mit einer, wenn nöthig wiederholten, Transformation zweiten Grades. Hieraus folgt dass sich alle Transformationen aus Transformationen zweiten Grades, combinirt mit solchen, welche zu Primzahlen gehören, zusammensetzen lassen.

Mit Beziehung auf die wirkliche Substitution der Werthe von $y$, definirt durch die Gleichungen 10) und 13), in die Differentialgleichung 9), hat *Jacobi* eine sehr schöne Bemerkung gemacht, welche sich auf eine genauere Untersuchung der Gleichung 13) bezieht. Den eigentlichen Ursprung seiner ingenieusen Idee hat *Jacobi* nicht angegeben, derselbe beruht darauf, wie schon *Legendre* bemerkt hat (F. E. Prem. Suppl. p. 10), dass die Differentialgleichung 9) ungeändert bleibt, wenn $x$ und $y$ gleichzeitig ersetzt werden $\frac{1}{kx}$ und $\frac{1}{ly}$, hierauf auf beiden Seiten der gemeinschaftliche Factor $\frac{1}{i}$ unterdrückt wird.

Der von *Jacobi* gegebene Satz ist folgender:

> Lassen sich die Polynome $U$ und $V$ in $y = \frac{U}{V}$ für eine Transformation ungrader Ordnung so bestimmen, dass durch die Substitution von $\frac{1}{kx}$ an Stelle von $x$, $\frac{1}{ly} = \frac{V}{lU}$ an die Stelle von $y$ tritt, so ist von den beiden Gleichungen:
>
> $$U + V = (1 + x)A^2, \quad V + lU = (1 + kx)C^2,$$
>
> eine immer Folge der andern.

Durch diesen Satz reduciren sich die vier Gleichungen 14) und 15) auf eine Gleichung.

Man setze zur Abkürzung:

$$19) \quad \begin{cases} U = x\psi(x^2), \ \psi(x^2) = a + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_m x^{2m}, \\ V = \varphi(x^2), \ \varphi(x^2) = 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_m x^{2m}. \end{cases}$$

Nach 13) ist dann:

$$y = \frac{x\psi(x^2)}{\varphi(x^2)}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{1}{ly} = \frac{\frac{1}{kx}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)},$$

so geben diese beiden Werthe von $y$:

$$\frac{\varphi(x^2)}{lx\psi(x^2)} = \frac{1}{kx}\frac{\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}$$

oder rechts Zähler und Nenner mit $x^{2m}$ multiplicirt:

$$\frac{\varphi(x^2)}{l\psi(x^2)} = \frac{1}{k}\,\frac{x^{2m}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}.$$

Bezeichnet $g$ eine Unbestimmte, so lässt sich die vorstehende Gleichung durch die beiden folgenden ersetzen:

$$20)\quad \varphi(x^2) = g\,x^{2m}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

$$21)\quad l\psi(x^2) = gk\,x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right).$$

Wegen der Gleichungen 19) sind aber:

$$\varphi(x^2),\ \psi(x^2),\ x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),\ \ x^{2m}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),$$

Polynome $2m^{\text{ten}}$ Grades von $x$. In 20) und 21) ist also $g$ constant. Vertauscht man in diesen beiden Gleichungen $x$ mit $\frac{1}{kx}$, so folgt:

$$k^{2m}x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = g\,\psi(x^2),\ \ lk^{2m-1}x^{2m}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) = \varphi(x^2).$$

Jede dieser Gleichungen mit den Gleichungen 20) und 21) combinirt giebt:

$$g^2 = lk^{2m-1},\ g = k^m\sqrt{\frac{l}{k}},$$

Die Gleichungen 20) und 21) werden hierdurch:

$$23)\quad \varphi(x^2) = k^m\sqrt{\frac{l}{k}}\,x^{2m}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right),\ \ \psi(x^2) = k^m\sqrt{\frac{k}{l}}\,x^{2m}\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right).$$

Jede dieser Gleichungen ist Folge der andern.

Nach 19) ist:

$$24)\quad \frac{V+U}{1+x} = \frac{\varphi(x^2)+x\,\psi(x^2)}{1+x}.$$

Der Voraussetzung nach ist die linke, mithin auch die rechte Seite, das vollständige Quadrat eines Polynoms $m^{\text{ten}}$ Grades von $x$. Man setze $\frac{1}{kx}$ statt $x$ und multiplicire auf beiden Seiten mit:

$$x^{2m}k^m\sqrt{\frac{l}{k}}$$

Nach 23) und 19) ist dann:

$$x^{2m} k^m \sqrt{\frac{l}{k}} \frac{\varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) + \frac{1}{kx}\psi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)}{1 + \frac{1}{kx}} = \frac{\varphi(x^2) + lx\,\psi(x^2)}{1 + kx}$$

$$= \frac{V + lU}{1 + kx}.$$

Ist also $\frac{V+U}{1+x}$ ein Quadrat, so ist dieses auch mit $\frac{V+lU}{1+kx}$ der Fall, wodurch das obige Theorem bewiesen ist.

In der zweiten Gleichung 23), nämlich:

$$25) \quad \psi(x^2) = k^m \sqrt{\frac{k}{l}}\, x^{2m} \varphi\left(\frac{1}{k^2x^2}\right)$$

setze man für $\varphi(x^2)$ und $\psi(x^2)$ ihre Werthe aus 19). Es folgt dann:

$$a + a_1 x^2 + a_2 x^4 + a_3 x^6 + \ldots\ldots + a_m x^{2m} =$$

$$k^m \sqrt{\frac{k}{l}}\, x^{2m}\left(1 + \frac{b_1}{k^2x^2} + \frac{b_2}{k^4x^4} + \ldots\ldots + \frac{b^m}{k^{2m}x^{2m}}\right) =$$

$$\frac{1}{k^m}\sqrt{\frac{k}{l}}\,(b_m + b_{m-1}k^2x^2 + b_{m-2}k^4x^4 + \ldots\ldots + k^{2m}x^{2m}).$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar folgende Relationen:

$$a = \frac{b_m}{g},\ a_1 = \frac{b_{m-1}k^2}{g},\ a_2 = \frac{b_{m-2}k^4}{g},\ \ldots\ldots$$

$$a_m = \frac{k^{2m}}{g},\ g = k^{m-\frac{1}{2}}\sqrt{l} = \sqrt{lk^{2m-1}}.$$

Es ist also nun nach 19):

$$26) \quad \begin{cases} \varphi(x^2) = 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots\ldots + b_m x^{2m}, \\ \psi(x^2) = \dfrac{b_m + b_{m-1}k^2x^2 + b_{m-2}k^4x^4 + \ldots + k^{2m}x^{2m}}{\sqrt{lk^{2m-1}}}. \end{cases}$$

Diese Werthe von $\varphi(x^2)$ und $\psi(x^2)$ setze man in die Gleichung 24) und ferner:

$$27) \quad \frac{V+U}{1+x} = (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_m x_m)^2.$$

Die Substitution:

$$28) \quad y = \frac{x\psi(x^2)}{\varphi(x^2)} = \frac{U}{V}$$

in die Differentialgleichung 9) ist dann auf die Untersuchung der Gleichung 27) reducirt, oder besser nach 24) und 26) auf folgende:

$$29)\quad \begin{cases} 1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + \ldots + b_m x^{2m} \\ + x\,\dfrac{b_m + b_{m-1} k^2 x^2 + b_{m-2} k^4 x^4 + \ldots + b_1 k^{2m-2} x^{2m-2} + k^{2m} x^{2m}}{\sqrt{l k^{2m-1}}} \\ = (1+x)(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m)^2. \end{cases}$$

Die Vergleichung gleicher Potenzen von $x$ giebt für $b_1$, $b_2$.... $b_m$, $2m+1$ lineare Gleichungen, aus denen sich ohne Schwierigkeit $m+1$ Gleichungen zwischen $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ und $k$ und $l$ ergeben. Die Elimination von $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... $\alpha_m$ zwischen diesen Gleichungen führt auf eine Gleichung zwischen $k$ und $l$. Es können übrigens *$k$ und $l$ beliebige Quantitäten* sein, da die vorhergehende Deduction keine Annahme, weder über die Grösse, noch über die Realität von $k$ und $l$ voraussetzt.

Setzt man nach 19) $V = \varphi(x^2)$, $U = x\,\psi(x^2)$, so ist nach 27) und 29):

$$30)\quad V + U = (1+x)(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_m x_m)^2.$$

Hierin $-x$ statt $x$:

$$31)\quad V - U = (1-x)[1 - \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + (-1)^m \alpha_m x^m]^2.$$

Die Gleichung 30) giebt, $x$ mit $\dfrac{1}{kx}$ vertauscht, darauf mit $x^{2m+1}$ multiplicirt:

$$32)\quad V + lU = \sqrt{\frac{l}{k^{2m+1}}}\,(1+kx)(\alpha_m + \alpha_{m-1} kx \ldots + k^m x^m)^2.$$

Hierin $-x$ statt $x$:

$$33)\quad V - lU = \sqrt{\frac{l}{k^{2m+1}}}\,(1-kx)(\alpha_m - \alpha_{m-1} kx + \ldots + (-1)^m k^m x^m)^2.$$

Mittelst der Gleichungen 30)—33) und $y = \dfrac{U}{V}$ wird die Gleichung 9):

$$34)\quad M\sqrt{\frac{k^{2m+1}}{l}} \cdot \left(V\frac{dU}{dx} - U\frac{dV}{dx}\right) =$$

$$(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_m x^m)(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots + (-1)^m \alpha_m x^m) \times$$
$$(\alpha_m + \alpha_{m-1} kx + \ldots + k^m x^m)(\alpha_m - \ldots + (-1)^m k^m x^m).$$

Durch diese Gleichung ist $M$ definirt. Für $x = 0$ ist $U = 0$, $V = 1$, $\dfrac{dU}{dx} = \dfrac{b_m}{\sqrt{l k^{2m-1}}}$. Die Gleichung 34) giebt für $x = 0$:

$$35)\quad M\frac{b_m}{\sqrt{l k^{2m-1}}} = \alpha_m^2 \sqrt{\frac{l}{k^{2m+1}}}.$$

Die Vergleichung der Factoren von $x^{2m+1}$ in der Gleichung 29) giebt:

$$36) \quad \alpha_m^2 = \sqrt{\frac{k^{2m+1}}{l}}.$$

Aus 25) folgt hierdurch:

$$37) \quad \frac{b_m}{\sqrt{l\,k^{2m-1}}} = \frac{1}{M},$$

wodurch die Bestimmung von $M$ von derjenigen von $b_m$ und $l$ abhängig gemacht ist.

Im Vorstehenden sind die wesentlichsten algebraischen Hülfsmittel, nebst einigen Erläuterungen, mitgetheilt, deren sich *Jacobi* zuerst bei seiner Behandlung des Transformationsproblems bedient hat. Eine Andeutung hiervon enthalten die Auszüge zweier Briefe *Jacobi's* an *Schumacher* vom Jahre 1827, enthalten in „Astronomische Nachrichten" t. 7. p. 33—38. (Nr. 123). Ebendaselbst p. 133—142 (Nr. 127) findet sich eine weitere Mittheilung von *Jacobi* unter dem Titel: „Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis", zu welcher *Legendre* (p. 201—208, Nr. 130) eine Anzahl interessanter Bemerkungen gemacht hat. Bedeutend erweitert erscheinen die rein algebraischen Untersuchungen auf p. 1—20 der „Fundamenta". Ein weiterer Erfolg in dieser Richtung ist wegen der steigenden Complication der Rechnungen nicht zu erwarten. Die Anwendung der Gleichungen 26), 28) und 29) auf die Gleichung 9) ist schon für $m = 1$ und $m = 2$ nicht ohne Weitläufigkeiten, welche bald durchblicken lassen, dass auf diesem Wege die Bestimmung der Constanten $b_1$, $b_2$,... $b_m$ der Gleichungen 26) und 28) für den allgemeinen Fall nicht gesucht werden kann.

Um zum Ziele zu gelangen führt *Jacobi* den Begriff der elliptischen Functionen ein und beginnt auf p. 36 der „Fundamenta" mit Hülfe derselben die Lösung des allgemeinen Problems der Transformation. Während bisher die Deductionen eine grosse logische Schärfe zeigen, tritt auf p. 36 plötzlich eine vollständige Discontinuität der leitenden Ideen auf, *Jacobi* stellt sein Theorem auf, ohne die mindeste Andeutung, wie er dazu gelangt ist. Man könnte hier der Vermuthung Raum geben, wie dieses auch schon geschehn,

dass *Jacobi* durch glückliche Versuche auf seinen Satz gekommen ist. In Nr. 130 der „Astron. Nachr." finden sich folgende Worte von *Legendre*:

„Ici on doit regretter que l'auteur remplisse la tâche qu'il s'est imposée par une sorte de divination, sans nous mettre dans le secret des idées dont la filiation l'a amené progressivement à la forme que doit avoir $1-y$ pour satisfaire aux conditions du problème. Au reste cette suppression des idées intermédiaires s'explique assez naturellement par la nécessité de ne pas donner trop d'étendue à une démonstration qui devait être insérée dans un journal scientifique; et il est à croire que quand l'auteur donnera un libre cours au développement, de ses idées, dans un ouvrage composé ad hoc il rétablira les intermédiaires dont l'absence se fait remarquer."

Dieser Wunsch ist leider nicht in Erfüllung gegangen, die „Fundamenta" zeigen in diesem Puncte eine sehr bedauerliche Lücke, welche dem Studium dieses ausgezeichneten Werkes eine nicht leicht zu überwindende Schwierigkeit entgegenstellen musste.

## § 36. Das Problem der Transformation nach Abel.

Während *Jacobi* sich darauf beschränkt hat die rationale Gleichung zwischen $x$ und $y$ hinzustellen, in der Form:

$$1) \quad y = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m},$$

welche der Differentialgleichung:

$$2) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{1}{M}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

genügt, ist *Abel* mehrfach auf die Integration der vorstehenden Differentialgleichung zurückgekommen. *Jacobi* hat Zähler und Nenner der rechten Seite der Gleichung 1) als Producte von Factoren in Beziehung auf $x$ dargestellt (Fund. p. 36). Wird der so erhaltene Ausdruck in Partialbrüche in Beziehung auf $x^2$ zerlegt, so ergiebt sich für $x$ ein Ausdruck, welcher den Ausgangspunct der ersten Untersuchungen von *Abel* bildet, enthalten im § IX seiner „Recherches sur les fonctions elliptiques" (Crelle. Journ. t. 3.

p. 169—181, Oeuv. t. 1. p. 230—242). Diese erste Behandlung des Problems der Transformation ist, wie bei *Jacobi*, rein synthetisch; der Ausdruck für $y$ wird ohne weitere Begründung aufgestellt und dann bewiesen. Die weiteren Untersuchungen von *Abel* über diesen Gegenstand zeigen eine Tiefe der Auffassung, verbunden mit einem Reichthum überraschender Ideen, welche allein hinreichen, die Erinnerung an sein wunderbares Genie in der Geschichte der Mathematik lebendig zu erhalten. Wird die Gleichung 13) des vorhergehenden § angenommen, so findet *Abel* für eine ungrade Zahl $2m+1$, d. h. nach *Jacobi's* Bezeichnung, für eine Transformation von der Ordnung $2m+1$, dass $k$ und $l$ durch eine algebraische Gleichung vom Grade $2m+2$ verbunden sind, welche Gleichung sich mit Hülfe von Gleichungen niedrigeren Grades lösen lässt, wenn $2m+1$ keine Primzahl ist. Hierbei setzt *Abel* in der Gleichung 2) $l$ und $k$ als beliebige Quantitäten voraus. (Crelle. J. 3. p. 177.) In dem folgenden § X wird ein besonderer Fall der Gleichung 2) behandelt, wenn $l = k$ und $\frac{1}{M}$ eine complexe Zahl ist. Uebrigens hat die Form, deren sich *Abel* für $y$ bedient, später *Jacobi* benutzt in der Abhandlung: „De functionibus ellipticis commentatio altera". (Crelle. J. t. 6. p. 397—403.)

Eine Begründung der Lehre von den elliptischen Integralen, nach Art der Behandlung von *Legendre*, hat *Abel* in dem „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" gegeben. (Crelle J. t. 4. p. 236—277, 309—348, Oeuvr. I. p. 326—408.) Diese scharfsinnige Abhandlung, welche in Folge des frühen Todes des Verfassers unvollendet geblieben ist, enthält nicht im eigentlichen Sinne eine Lehre der elliptischen Functionen, deren nur in der Einleitung gedacht ist. Die Untersuchungen beziehn sich wesentlich auf die elliptischen Integrale und basiren in dem Theile, welcher sich auf die Transformation dieser Integrale bezieht, auf einer sehr geistvollen Anwendung des Additionstheorems von *Euler*. Das Problem der Transformation bildet den Inhalt von Chap. IV und V. Die ersten algebraischen Betrachtungen sind denen von *Jacobi* (vergl. § 35) analog. *Abel* betrachtet nun in der Gleichung 1) umgekehrt

$x$ als Function von $y$, wodurch sich $m$ Werthe für $x$ ergeben. Sind $x$ und $x_1$ zwei dieser Werthe, so muss jeder derselben der Differentialgleichung 2) genügen, man erhält so zwei Gleichungen, deren linke Seiten einander gleich sind. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{(1-x_1^2)(1-k^2x_1^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Diese Gleichung integrirt giebt:

$$x_1 = \frac{x\sqrt{(1-a^2)(1-k^2a^2)} + a\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2a^2x^2},$$

wo $a$ eine Constante ist. Auf diese Relation basirt *Abel* seine Untersuchungen, welche wesentlich die Multiplicationsformeln der elliptischen Functionen voraussetzen, d. h. die Ausdrücke von $\sin\mathrm{am}\,nu$, $\cos\mathrm{am}\,nu$ und $\Delta\,\mathrm{am}\,nu$. Diese Ausdrücke lassen sich durch wiederholte Anwendung des *Euler*'schen Additionstheorems herstellen. So ungemein interessant die von *Abel* gefundenen Resultate sind, namentlich in den Theilen, welche Anwendungen von der Lehre der algebraischen Gleichungen enthalten, lässt sich der befolgte Weg nicht wohl übersichtlich angeben, ohne die Abhandlung selbst einem grossen Theile ihres Inhalts nach reproduciren zu müssen. Eine meisterhafte Behandlung des Problems der Transformation ist enthalten in dem Aufsatze:

„Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques". (Astronomische Nachrichten, Band VI p. 365—388 Nr. 138. Altona 1828. Oeuvres. t. 1. p. 253—274.)

Eine Folge hierzu bildet:

„Addition au mémoire sur les fonctions elliptiques". (A. N. t. VII p. 33—44, Nr. 147. Altona 1829. O. t. 1. p. 275—287.)

Es ist namentlich diese letzte Abhandlung, von welcher im Folgenden die Rede sein soll, welche bei der Transformation Principien anwendet, die von den algebraischen Betrachtungen wesentlich verschieden sind. Einige supplementäre Formeln hierzu sind enthalten in: „Note sur quelques formules elliptiques" (Crelle J. t. 4. p. 85—93, Oeuv. I. p. 299—308).

Der Complementärmodul von $l$ sei $l'$, so dass $l^2 + l'^2 = 1$. Die entsprechenden Integrale bezeiche man durch $L$ und $L'$, also:

3) $$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 w}}, \quad L' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 w}}.$$

Nach den algebraischen Betrachtungen des vorhergehenden § über die Transformation grader und ungrader Ordnung, kann man in der Gleichung 1) die Constanten $a_0, a_1, \ldots a_m, b_0, \ldots . b_m$ als bestimmt ansehn. Die Werthe derselben hängen von algebraischen Gleichungen ab, einem bestimmten Systeme von Werthen derselben entspricht ein Werth von $y$ in Function von $x$. Das allgemeinste Problem der Transformation nach *Jacobi* besteht nun darin, die sämmtlichen Werthe der bemerkten Art von $y$ zu finden, welche der Differentialgleichung 2) Genüge leisten. *Abel* formulirt das Problem in etwas anderer Weise, indem er die Aufgabe stellt:

Trouver tous les cas possibles dans lesquelles on pourra satisfaire à l'équation différentielle 2) en mettant pour $y$ une fonction algébrique de $x$, rationnelle ou irrationnelle."

Es sei $f(y, x) = 0$ die gesuchte algebraische Relation zwischen $x$ und $y$, welche der Differentialgleichung 3) genügt. Der Einfachheit halber soll angenommen werden, dass $x$ und $y$ gleichzeitig verschwinden. Setzt man in der Gleichung 2):

$$x = \sin\mathrm{am}(u, k), \; y = \sin\mathrm{am}(u_1, l),$$

so folgt:

$$du_1 = \frac{du}{M},$$

also: $u_1 = \frac{u}{M}$, da $u_1$ mit $u$ verschwinden soll. Die Werthe von $x$ und $y$ sind folglich:

4) $$x = \sin\mathrm{am}(u, k), \quad y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right).$$

Die algebraische Gleichung $f(y, x) = 0$ geht durch Substitution dieser Werthe von $y$ und $x$ über in:

5) $$f\left[\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right), \; \sin\mathrm{am}\left(u, k\right)\right] = 0.$$

In dieser Gleichung ist $u$ allein variabel, dieselbe muss also für einen beliebigen Werth von $u$ bestehn. Man vertausche $u$ mit $u + 4pK$ und mit $u + 2pK'i$, wo $p$ eine ganze Zahl bedeutet.

Da $\sin am\,(u + 4pK, k) = \sin am\,(u, k)$, $\sin am\,(u + 2pK'i, k) = \sin am\,(u, k)$, so leitet man aus der Gleichung 5) die beiden folgenden ab:

$$6) \qquad f\left[\sin am\left(\frac{u+4pK}{M}, l\right), \sin am\left(u, k\right)\right] = 0,$$

$$7) \qquad f\left[\sin am\left(\frac{u+2pK'i}{M}, l\right), \sin am\left(u, k\right)\right] = 0.$$

Die Gleichungen 5), 6) und 7) zeigen nun, dass der algebraischen Gleichung $f(y,x) = 0$ für $x = \sin am(u,k)$ die Werthe

$$\sin am\left(\frac{u}{M}, l\right), \sin am\left(\frac{u+4pK}{M}, l\right), \sin am\left(\frac{u+2pK'i}{M}, l\right)$$

von $y$ entsprechen. Wegen der Unbestimmtheit der Zahl $p$ ist die Anzahl dieser Werthe unendlich gross, da aber die Anzahl der Werthe von $y$ eine endliche sein soll, so muss dieses auch mit den obigen Werthen der Fall sein, d. h. dieselben können nicht alle unter einander verschieden sein. Sind $\mu, \mu', \nu, \nu'$ ganze Zahlen, so erfordert die aufgestellte Bedingung die Gleichungen:

$$\sin am\left(\frac{u+4\mu' K}{M}, l\right) = \sin am\left(\frac{u+4\mu K}{M}, l\right),$$

$$\sin am\left(\frac{u+2\nu' K'i}{M}, l\right) = \sin am\left(\frac{u+2\nu K'i}{M}, l\right),$$

oder:

$$8) \qquad \frac{4\mu' K}{M} = \frac{4\mu K}{M} + 4gL + 2g'L'i, \quad \frac{2\nu' K'i}{M} = \frac{2\nu K'i}{M} + 4hL + 2h'L'i,$$

wo $g, h, g', h'$, ganze Zahlen bedeuten und $L$, $L'$, durch die Gleichungen 3) definirt sind. Setzt man einfacher $\mu' - \mu = p$ und $\nu' - \nu = p'$, wo also $p$ und $p'$ ganze Zahlen bedeuten, so gehn die Gleichungen 8) über in:

$$9) \qquad \frac{4pK}{M} = 4gL + 2hL'i, \quad \frac{2p'K'i}{M} = 4g'L + 2h'L'i,$$

$$10) \qquad \frac{1}{M} = \frac{gL}{pK} + \frac{hL'i}{2pK'}, \quad \frac{1}{M} = \frac{2g'L}{p'K'i} + \frac{h'L'}{p'K'}.$$

Der doppelte Werth von $M$ giebt:

$$11) \qquad \frac{gL}{pK} + \frac{hL'i}{2pK} = \frac{2g'L}{p'K'i} + \frac{h'L'}{p'K'}.$$

Nimmt man zuerst mit *Abel* an, dass $k$ und $l$ ächte, positive

Brüche sind, also $K$, $K'$, $L$ und $L'$ reelle, positive Quantitäten bedeuten, so giebt die Gleichung 11) durch Trennung der reellen und imaginären Theile:

$$\frac{gL}{pK} = \frac{h'L'}{p'K'}, \quad \frac{hL'}{2pK} = -\frac{2g'L}{p'K'}$$

oder:

$$12) \quad \frac{gK'}{pK} = \frac{h'L'}{p'L}, \quad \frac{hK'L'}{pKL} = -\frac{4g'}{p'}.$$

Diese Gleichungen bestehen entweder gleichzeitig, oder eine derselben verschwindet identisch, so dass sich die beiden Gleichungen auf eine reduciren. Es werde zuerst dieser zweite Fall betrachtet. Dann ist $g' = 0$, $h = 0$ oder $g = 0$, $h' = 0$. Für $g' = 0$, $h = 0$ giebt die erste Gleichung 9) in Verbindung mit der ersten Gleichung 12):

$$13) \quad \frac{1}{M} = \frac{gL}{pK}, \quad \frac{gK'}{pK} = \frac{h'L'}{p'L}.$$

Für den vorstehenden Werth von $M$ wird die Differentialgleichung 2):

$$14) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{gL}{pK}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Die Annahme $g = 0$, $h' = 0$, führt aus den zweiten Gleichungen 9) und 12) auf:

$$15) \quad \frac{1}{M} = \frac{2g'L}{p'K'i}, \quad \frac{hL'}{pL} = -\frac{4g'K}{p'K'}.$$

Für den vorstehenden Werth von $M$ wird die Differentialgleichung 2):

$$16) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{2g'L}{p'K'i}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Setzt man in der Gleichung 16):

$$17) \quad x = \frac{zi}{\sqrt{1-z^2}},$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{2g'L}{p'K'}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung 14) nur durch Vertauschung von $k$ mit $k'$, durch dieselbe Vertauschung geht

die zweite Gleichung 13) in die zweite Gleichung 15) über. Der Fall $g = 0$, $h' = 0$ lässt sich also mittelst der Gleichung 17) auf den Fall $g' = 0$, $h = 0$ reduciren.

Bestehn die Gleichungen 12) gleichzeitig, so ergeben sich für $\frac{L'}{L}$ und $\frac{K'}{K}$ constante Werthe; mithin auch für die Moduli $k$ und $l$, welche nicht mehr ganz beliebig sein können. Man findet leicht:

$$18) \quad \frac{K'}{K} = 2\frac{p}{p'}\sqrt{-\frac{g'h'}{gh}},$$

wo $g'$ oder $h$ negativ sein muss. Wenn dieser Fall nicht die Bedeutung der vorhergehenden Fälle hat, so ist doch die von *Abel* angewandte Behandlung von grossem Interesse. Nach 10) ist:

$$\frac{1}{M} = \frac{gL}{pK} + \frac{hL'i}{2pK},$$

da nun nach 12):

$$\frac{hL'}{2pK} = -\frac{2g'L}{p'K'}$$

so ist auch:

$$\frac{1}{M} = \frac{gL}{pK} + \frac{2g'L}{p'K'i}.$$

Setzt man diesen Werth von $M$ in die Differentialgleichung 2), so ist:

$$19) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \left(\frac{gL}{pK} + \frac{2g'L}{p'K'i}\right)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Man setze nun mit *Abel*:

$$20) \quad \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-l^2v^2)}} = \frac{gL}{pK}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$21) \quad \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-l^2w^2)}} = \frac{2g'L}{p'K'i}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

dann wird die Gleichung 19):

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-l^2v^2)}} + \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-l^2w^2)}}.$$

Hieraus folgt nach dem Additionstheoreme von *Euler:*

$$22) \quad y = \frac{v\sqrt{(1-w^2)(1-l^2w^2)} + w\sqrt{(1-v^2)(1-l^2v^2)}}{1-l^2v^2w^2}.$$

Lassen sich $v$ und $w$ aus den Gleichungen 20) und 21) in Function von $x$ ausdrücken, so giebt die Gleichung 22) $y$ in Function von $x$. Die Gleichungen 20) und 21) fallen mit den Gleichungen 14) und 16) zusammen.

Sind $k$ und $l$ positive, ächte Brüche, so hängt die Transformation wesentlich von der Integration der Differentialgleichung 14) ab, mit der Bedingung nach 13):

$$23) \quad \frac{L'}{L} = \frac{gp'}{h'p}\frac{K'}{K}.$$

Da nun $l$, $l'$, $L$ auf dieselbe Art von $e^{-\pi\frac{L'}{L}}$ abhängen, wie $k$, $k'$ $K$ von:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$$

und nach 23):

$$e^{-\pi\frac{L'}{L}} = e^{-\pi\frac{gp'}{h'p}\frac{K'}{K}} = q^{\frac{gp'}{h'p}},$$

so folgt, dass der Werth von $l$ sich aus dem Werthe von $k$ ergiebt, wenn in demselben $q$ ersetzt wird durch $q^{\frac{\mu}{\nu}}$, wo $\mu$ und $\nu$ positive, ganze Zahlen sind. Dieses ist das Resultat, zu welchem *Abel* in der bemerkten Abhandlung gelangt. Dass die Bedingung, enthalten in der Gleichung 23), nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend ist, beweist *Abel* auf eine sehr schöne Art durch Anwendung des Satzes von *Cotes* auf die Factoren der unendlichen Producte, welche die Zähler und Nenner der elliptischen Functionen bilden. Die hierbei nöthigen Betrachtungen sind im folgenden § ausführlich behandelt.

Um von vorneherein eine unnöthige Complication der Rechnungen zu vermeiden, sollen einige Vereinfachungen bei der Behandlung des Transformationsproblems angemerkt werden, unter der Voraussetzung, dass die in 23) enthaltene Bedingung, zur Integration der Differentialgleichung 14) hinreicht.

Dem Modul $l_1$ und seinem Complemente $l_1'$ mögen die Integrale $L_1$ und $L_1'$ entsprechen. Man ersetze die Gleichung 23) sowie die Gleichung 14) durch die folgenden:

$$24)\quad \frac{L'_1}{L_1} = gp'\frac{K'}{K}, \qquad 25)\quad \frac{L'_1}{L_1} = h'p\frac{L'}{L}.$$

$$26)\quad \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l_1^2t^2)}} = \frac{gL_1}{K}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$27)\quad \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l_1^2t^2)}} = \frac{pL_1}{L}\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.$$

Der Voraussetzung nach lässt sich nach 24) in 26) $t$ algebraisch durch $x$ ausdrücken, und ebenso ist nach 25) aus 27) $t$ eine algebraische Function von $y$. Die Gleichsetzung beider Werthe von $t$ führt auf die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $y$. Die Gleichung 14) folgt aus der Gleichung 26) für $l = l_1$ und $p = 1$. Es soll im Folgenden der Einfachheit halber $p = 1$ genommen werden.

An Stelle der Gleichungen 12) und 14) treten dann die folgenden:

$$28)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = g\dfrac{L}{K}\dfrac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \\ \dfrac{L'}{L} = g\dfrac{K'}{K}, \end{cases}$$

wo $g$ eine ganze positive Zahl bedeutet. Ist $g$ ein Product von Factoren, so sei:

$$g = n_1 . n_2 . n_3 \ldots n_\nu,$$

wo $n_1, n_2 \ldots n_\nu$ Primzahlen sind.

Die Integrale, welche einer Reihe von Moduln $l, l_1, l_2, \ldots l_{\nu-1}$ und deren Complementen entsprechen, seien: $L, L_1, L_2 \ldots L_{\nu-1}$ und $L', L'_1, L'_2, \ldots L'_{\nu-1}$.

Die Gleichungen 28) ersetze man durch die folgenden:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = n_1\frac{L}{L_1}\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-l_1^2y_1^2)}},$$

$$\frac{L'}{L_1} = n_1\frac{L'_1}{L_1},$$

$$\frac{dy_1}{\sqrt{(1-y_1^2)(1-l_1^2y_1^2)}} = n_2\frac{L_1}{L_2}\frac{dy_2}{\sqrt{(1-y_2^2)(1-l_2^2y_2^2)}},$$

$$\frac{L'_1}{L_1} = n_2\frac{L'_2}{L_2},$$

. . . .

$$\frac{dy_{\nu-1}}{\sqrt{(1-y^2_{\nu-1})(1-l^2_{\nu-1}y^2_{\nu-1})}} = n_\nu \frac{L_{\nu-1}}{K} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\frac{L'_{\nu-1}}{L_{\nu-1}} = n_\nu \frac{K'}{K}.$$

Lassen sich diese Differentialgleichungen algebraisch integriren, so reducirt sich die Herstellung der Gleichung $f(y,x) = 0$ auf die Elimination der Quantitäten $y_1, y_2, \ldots y_{\nu-1}$ zwischen einem Systeme von $\nu$ algebraischen Gleichungen. Der einfachste Fall der Gleichung 28) setzt also $g$ als Primzahl voraus; da sich alle andern Annahmen auf diesen Fall reduciren lassen, so bleiben nur die beiden Voraussetzungen übrig $g = n$, wo $n$ eine ungrade Primzahl ist, und $g = 2$.

Vertauscht man in den Gleichungen 28) $x$ und $y$, ferner $k$ und $l$, so folgt:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{L}{gK} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\frac{L'}{L} = \frac{K'}{gK}.$$

Es ist also $g$ in $\frac{1}{g}$ übergegangen. Für die einfachsten reellen Transformationen geht also $q$ über in:

$$q^n, q^2, q^{\frac{1}{n}}, \sqrt{q},$$

wo $n$ eine ungrade Primzahl bedeutet.

Die von *Abel* gefundene Relation:

$$\frac{L'}{L} = g\frac{K'}{K}$$

findet sich auch bei *Legendre* auf anderem Wege dargestellt. (Fonct. ell. Supplément, p. 17, 19. u. f.)

## § 37. Die Theta-Functionen, für welche $q$ durch $q^n$ ersetzt ist. Die erste reelle Transformation von Jacobi. Uebergang vom grösseren zum kleineren Modul.

Setzt man zur Vereinfachung:

$$\prod_{s=1}^{s=\infty} (1-q^{2s}) = \varphi(q),$$

so ist:

$$1) \quad \vartheta(x,q) = \varphi(q) \prod_{s=1}^{s=\infty} (1 - 2q^{2s-1}\cos 2x + q^{4s-2}).$$

In dieser Gleichung werde $x$ durch $nx$ und $q$ durch $q^n$ ersetzt. Es ist dann:

$$2) \quad \vartheta(nx,q^n) = \varphi(q^n) \prod_{s=1}^{s=\infty} (1 - 2q^{n(2s-1)}\cos 2nx + q^{n(4s-2)}).$$

Der Einfachheit halber sei $n$ eine ungrade Primzahl. Bei dieser Darstellung drängt sich fast von selbst der Gedanke auf, jeden Factor des unendlichen Products auf der rechten Seite der Gleichung 2), mit Hülfe des Theorems von *Cotes* zu zerlegen. Die Ausführung dieser geistreichen Idee hat zuerst *Abel* gegeben, die ungemeine Leichtigkeit auf diesem Wege das Problem der Transformation zu behandeln, hat *Jacobi* schon sehr frühe erkannt, wie ein Brief desselben vom Jahre 1828 an *Crelle* zeigt, welcher unter dem Titel: „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" im dritten Bande (p. 303—310) vom Journal für Mathematik abgedruckt ist.

Nach dem Theorem von *Cotes* ist bekanntlich:

$$3) \quad 1 - 2p^n\cos 2nx + p^{2n} = \prod_{r=0}^{r=n-1}\left[1 - 2p\cos 2\left(x + \frac{r\pi}{n}\right) + p^2\right] = \prod_{r=-\frac{n-1}{2}}^{r=\frac{n-1}{2}}\left[1 - 2p\cos 2\left(x + \frac{r\pi}{n}\right) + p^2\right].$$

Durch einige einfache Transformationen lässt sich auch folgende Doppelgleichung aufstellen:

$$4) \quad 1 - 2p^n\cos 2nx + p^{2n} = \prod_{0}^{n-1}\left[1 - 2p\cos 2\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) + p^2\right] = \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\left[1 - 2p\cos 2\left(x + \frac{2r\pi}{n}\right) + p^2\right].$$

Wendet man die Gleichung 3) auf die Gleichung 2) an, so folgt:

$$\vartheta(nx, q^n) = \varphi(q^n) \prod_{r=0}^{r=n-1} \prod_{s=1}^{s=\infty} \left[1 - 2q^{2s-1} \cos 2\left(x + \frac{r\pi}{n}\right) + q^{4s-2}\right] =$$

$$\varphi(q^n) \prod_{r=-\frac{n-1}{2}}^{r=\frac{n-1}{2}} \prod_{s=1}^{s=\infty} \left[1 - 2q^{2s-1} \cos 2\left(x + \frac{r\pi}{n}\right) + q^{4s-2}\right].$$

Man erhält hieraus unmittelbar:

$$5) \quad \vartheta(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \cdot \prod_{0}^{n-1} \vartheta\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right)$$

und:

$$6) \quad \vartheta(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \cdot \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right).$$

Ist $n$ nun eine ungrade Zahl, setzt man $x + \frac{\pi}{2}$ statt $x$ in den Gleichungen 5) und 6), so gehn dieselben über in:

$$7) \quad \vartheta_3(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{0}^{n-1} \vartheta_3\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right),$$

$$8) \quad \vartheta_3(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right).$$

Es ist allgemein:

$$9) \quad \vartheta_3\left(z + \frac{i}{2}\log p, p\right) = p^{-\frac{1}{4}} e^{zi} \vartheta_2(z, p).$$

Für $z = nx$ und $q = q^n$ folgt:

$$10) \quad \vartheta_3\left(nx + \frac{i}{2}\log q^n, q^n\right) = \vartheta_3\left(nx + \frac{ni}{2}\log p, q^n\right) =$$

$$q^{-\frac{n}{4}} e^{nxi} \vartheta_2(nx, q^n).$$

In der Gleichung 7) setze man $x + \frac{i}{2}\log q$ statt $x$. Das rechts stehende Product der Functionen $\vartheta_3$ geht in das analoge Product der Functionen $\vartheta_2$ über mit dem folgenden Factor multiplicirt:

$$(q^{-\frac{1}{4}})^n e^{nxi+[1+2+\ldots+(n-1)]\pi i} = q^{-\frac{n}{4}} e^{nxi} e^{\frac{n-1}{2}\pi i}.$$

Da nun $n$ ungrade, also $\frac{n-1}{2}$ ganzzahlig, so ist

$$e^{\frac{n-1}{2}\pi i} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung 10) erhält man aus der Gleichung 3):

$$11) \quad \vartheta_2(nx, q^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_0^{n-1} \vartheta_2\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right).$$

Auf ganz analoge Weise leitet man aus der Gleichung 8) die folgende ab:

$$12) \quad \vartheta_2(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right).$$

Es ist $\vartheta_2\left(z + \frac{2m+1}{2}\pi\right) = -(-1)^m \vartheta_1(z)$, oder $2m+1 = n$ gesetzt:

$$\vartheta_2\left(z + \frac{n\pi}{2}\right) = -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(z).$$

In den Gleichungen 11) und 12) lasse man $x$ um $\frac{\pi}{2}$ zunehmen. Da nun $n$ ungrade, so ist $(-1)^n = -1$. Es ergeben sich so unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$13) \quad \vartheta_1(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_0^{n-1} \vartheta_1\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right),$$

$$14) \quad \vartheta_1(nx, q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(x + \frac{r\pi}{n}, q\right).$$

Aus den Gleichungen 5), 7), 11) und 13) erhält man durch Division:

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(nx;\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \prod_0^{n-1} \dfrac{\vartheta_1\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}, \\ \dfrac{\vartheta_2(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_0^{n-1} \dfrac{\vartheta_2\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}, \\ \dfrac{\vartheta_3(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \prod_0^{n-1} \dfrac{\vartheta_3\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{2},\,q\right]}. \end{cases}$$

Zu einem analogen Systeme geben die Gleichungen 6), 8), 12) und 14) Veranlassnng, nämlich zu den folgenden:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{\vartheta_1\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}, \\ \dfrac{\vartheta_2(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \prod \dfrac{\vartheta_2\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}, \\ \dfrac{\vartheta_3(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \prod \dfrac{\vartheta_3\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}{\vartheta\left[x+\frac{r\pi}{n},\,q\right]}. \end{cases}$$

Geht $q$ in $q^n$ über, so mögen $k$, $k'$, $K$ respective in $l$, $l'$ $L$ übergehn. Diese Quantitäten sind dann durch folgende Gleichungen definirt:

$$17)\quad \sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0,\,q^n)}{\vartheta_3(0,\,q^n)},\ \sqrt{l'} = \frac{\vartheta(0,\,q^n)}{\vartheta_3(0,\,q^n)},\ \sqrt{\frac{2L}{\pi}} = \vartheta_3(0,\,q^n).$$

In den Gleichungen 15) ersetze man die Quotienten der Theta-Functionen durch die elliptischen Functionen, also:

$$\frac{\vartheta_1(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \sqrt{l}\,\sin\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi},\ l\right],$$

$$\frac{\vartheta_2(nx,\,q^n)}{\vartheta(nx,\,q^n)} = \sqrt{\frac{l}{l'}}\,\cos\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi},\ l\right],$$

$$\frac{\vartheta_3(nx, q^n)}{\vartheta(nx, q^n)} = \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi}, l\right]}{\sqrt{l'}}.$$

Der Einfachheit halber soll der Modul $k$ nicht mit angemerkt werden. Die Gleichungen 15) lassen sich nun schreiben:

$$18)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi}, l\right] = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \sin\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left[x + \frac{r\pi}{n}\right], \\ \cos\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi}, l\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n . l'}{l . k'^n}} \prod_0^{n-1} \cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left[x + \frac{r\pi}{n}\right], \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[\frac{2nLx}{\pi}, l\right] = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod_0^{n-1} \Delta\,\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left[x + \frac{r\pi}{n}\right]. \end{cases}$$

Nimmt man zur Vereinfachung $\frac{2Kx}{\pi} = u$ und setzt mit *Jacobi*:

$$19)\quad \frac{nL}{K} = \frac{1}{M},$$

so nehmen die Gleichungen 18) folgende Formen an:

$$20)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \sin\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{n}\right], \\ \cos\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n l'}{l k'^n}} \prod_0^{n-1} \cos\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{\pi}\right], \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod_0^{n-1} \Delta\,\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{n}\right]. \end{cases}$$

Auf ganz analoge Weise erhält man aus den Gleichungen 16):

$$21)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{n}} \sin\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{n}\right], \\ \cos\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{k^n l'}{l k'^n}} \prod \cos\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{n}\right], \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod \Delta\,\mathrm{am}\left[u + \frac{2rK}{n}\right]. \end{cases}$$

Es lassen sich ohne Schwierigkeit Gleichungen aufstellen, in welchen die rechten Seiten der Gleichungen 20) und 21) in etwas

anderen Formen auftreten. Dieses ist z. B. der Fall, wenn man den Satz von *Cotes* auf das unendliche Product für $\vartheta(nx, q^n)$ in Anwendung bringt, in der Form, wie derselbe in der Gleichung 4) enthalten ist. Es soll nur ein System hier angemerkt und direct abgeleitet werden.

Unterscheidet man je nachdem $r$ grade oder ungrade ist, so folgt leicht:

$$\prod_{0}^{n-1} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2rK}{n}\right] =$$

$$\prod_{0}^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right] \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2(2r-1)K}{n}\right]$$

Da $\sin\mathrm{am}(w+2K) = -\sin\mathrm{am}\, w$, so kann man auch setzen:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2(2r-1)K}{n}\right] =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2(n+2r-1)K}{n}\right].$$

Nun nimmt $n+2r-1$ die graden Werthe von $n+1$ bis $2(n-1)$ an, wenn $r$ die Werthe von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ durchläuft. Es ist also auch:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2(2r-1)K}{n}\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right],$$

und folglich:

$$\prod_{0}^{n-1} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{2rK}{n}\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_{0}^{n-1} \sin\mathrm{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right].$$

Wendet man dasselbe Verfahren auf die beiden übrigen Gleichungen 20) an, so lassen sich diese Gleichungen durch die folgenden ersetzen:

$$22)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \sin\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right], \\ \cos\operatorname{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{k^n l'}{l k'^n}} \prod_0^{n-1} \cos\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right], \\ \Delta\operatorname{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod_0^{n-1} \Delta\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right]. \end{cases}$$

Nach 19) ist $\frac{K}{M} = nL$. Man hat ferner $\sin\operatorname{am}[(2m+1)L, l] = (-1)^m$, also $2m+1 = n$ gesetzt, $\sin\operatorname{am}(nL, l) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$. Mit Rücksicht hierauf giebt die erste Gleichung 22), $u = K$ gesetzt:

$$23)\quad 1 = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \operatorname{sin\,coam}\frac{4rK}{n} = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \frac{\cos\operatorname{am}\frac{4rK}{n}}{\Delta\operatorname{am}\frac{4rK}{n}}.$$

Die erste Gleichung 22) differentiire man nach $u$, setze darauf $u = 0$. Zur Bestimmung von $M$ ergiebt sich hieraus folgende Gleichung:

$$24)\quad \frac{1}{M} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_1^{n-1} \sin\operatorname{am}\frac{4rK}{n}.$$

Die beiden letzten Gleichungen 22) endlich geben, $u = 0$ gesetzt:

$$25)\quad 1 = \sqrt{\frac{k^n l'}{l k'^n}} \prod_0^{n-1} \cos\operatorname{am}\frac{4rK}{n},\quad 1 = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod_0^{n-1} \Delta\operatorname{am}\frac{4rK}{n}.$$

In den Gleichungen 23) und 25) kann die Multiplication in Beziehung auf $r$ von $r = 1$ beginnen, da dem Werthe $r = 0$ nur die Einheit als Factor entspricht.

Wendet man dasselbe Verfahren, welches zur Herstellung der Gleichungen 23), 24) und 25) diente, auf die Gleichungen 21) an, so findet man leicht:

$$26)\quad \begin{cases} 1 = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{2rK}{n} = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\cos \operatorname{am} \frac{2rK}{n}}{\Delta \operatorname{am} \frac{2rK}{n}} \right)^2 . \\ \frac{1}{M} = \sqrt{\frac{k^n}{l}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}, \\ 1 = \sqrt{\frac{k^n l'}{l k'^n}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \cos^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}, \quad 1 = \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \Delta^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben unmittelbar:

$$27)\quad \begin{cases} l = k^n \left( \frac{\cos \operatorname{am} \frac{2K}{n} \cos \operatorname{am} \frac{4K}{n} \ldots . \cos \operatorname{am} \frac{n-1}{n} K}{\Delta \operatorname{am} \frac{2K}{n} \Delta \operatorname{am} \frac{4K}{n} \ldots . \Delta \operatorname{am} \frac{n-1}{n} K} \right)^4 . \\ l' = \frac{k'^n}{\left( \Delta \operatorname{am} \frac{2K}{n} \Delta \operatorname{am} \frac{4K}{n} \ldots . \Delta \operatorname{am} \frac{n-1}{n} K \right)^4}, \\ \frac{1}{M} = \left( \frac{\sin \operatorname{am} \frac{2K}{n} \sin \operatorname{am} \frac{4K}{n} \ldots . \sin \operatorname{am} \frac{n-1}{n} K}{\sin \operatorname{coam} \frac{2K}{n} \sin \operatorname{coam} \frac{4K}{n} \ldots . \sin \operatorname{coam} \frac{n-1}{n} K} \right)^2 . \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind $l$, $l'$ und $M$ in Function von $k$ bestimmt. Trennt man in den Gleichungen 21) die positiven und negativen Werthe von $r$, so lassen sich dieselben mittelst der Gleichungen 26) auf folgende Art schreiben:

28)

$$\begin{cases} \sin \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, l \right) = \frac{\sin \operatorname{am} u}{M} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} + u \right) \sin \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} - u \right)}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}}, \\ \cos \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, l \right) = \cos \operatorname{am} u \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\cos \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} - u \right) \cos \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} + u \right)}{\cos^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}}, \\ \Delta \operatorname{am} \left( \frac{u}{M}, l \right) = \Delta \operatorname{am} u \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Delta \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} + u \right) \Delta \operatorname{am} \left( \frac{2rK}{n} - u \right)}{\Delta^2 \operatorname{am} \frac{2rK}{n}}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich mittelst der Formeln des § 24 für $\sin\mathrm{am}(a+u).\sin\mathrm{am}(a-u)$ etc. transformiren. Setzt man zur Vereinfachung:

$$y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right), \quad x = \sin\mathrm{am}(u, k),$$

oder:

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2t^2)}} = \frac{u}{M}, \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = u,$$

folglich:

$$29)\quad \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-l^2t^2)}} = \frac{1}{M}\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

so geben die Gleichungen 28) zwischen $x$ und $y$ folgende Relationen, in denen zwischen $l, l', M, k$ und $k'$ die Gleichungen 27) stattfinden:

$$30)\quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{M}\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2rK}{n}}}{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2rK}{n}}, \\ \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2}\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2\mathrm{coam}\dfrac{2rK}{n}}}{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2rK}{n}}, \\ \sqrt{1-l^2y^2} = \sqrt{1-k^2x^2}\prod_1^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{coam}\dfrac{2rK}{n}}{1-k^2x^2\sin^2\mathrm{am}\dfrac{2rK}{n}}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen zwischen den Variabeln $x$ und $y$ hat zuerst *Jacobi* aufgestellt in einer seiner frühesten Publicationen über die Theorie der elliptischen Functionen, in der schon erwähnten Abhandlung „Demonstratio theoremat. ad theor. funct. ellipt. spectantis“ (Astron. Nachr. t. VI. 1828 p. 133). Da:

$$\sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0, q^n)}{\vartheta_3(0, q^n)} = 2q^{\frac{n}{4}}\frac{1+q^{2n}+q^{6n}+..}{1+2q^n+2q^{4n}+..},$$

für wachsende $n$ abnimmt, also $l$ gegen Null convergirt, so wird durch die Transformation der Modul verkleinert, wie auch aus der ersten Gleichung 27) hervorgeht. Aus diesem Grunde nennt *Jacobi* den Uebergang von $q$ zu $q^n$ die Transformation des grösseren Moduls in den kleineren (Fund. p. 56). Aus allgemeineren Untersuchungen hat *Abel* die eleganten Resultate von *Jacobi* hergeleitet in einem Zusatz zu den „Recherches sur les fonctions elliptiques“ (Crelle. Journal. t. 3 p. 187. Oeuvr. t. 1 p. 249). Weitere Betrachtungen und Anwendungen der Gleichungen 30) findet man bei *Legendre*. (Supplément p. 3 u. f.). Die obige Art der Herleitung der Gleichungen 27) und 30) aus der Theorie der Theta-Functionen verleiht denselben, in Folge der Entwickelungen des § 21, eine bedeutend grössere Allgemeinheit, hinsichtlich des Werthes des Moduls, als dieselben nach den Untersuchungen von *Abel* haben. In den Theta-Functionen hat $q$ nur der Bedingung für die Convergenz der Reihen zu genügen, kann also auch einen complexen Werth haben. Hieraus folgt, dass die Gleichungen 27) und 30) nicht nothwendig für $k$ einen reellen Werth voraussetzen. Es soll für das Folgende angenommen werden, dass der Werth von $q$ nicht nothwendig reell ist und nur der Bedingung unterworfen, dass $\lim q^n = 0$, wenn $n$ unbegränzt zunimmt. Diese Annahme gestattet, einige Betrachtungen, welche sich auf Transformationen beziehn, sehr zu vereinfachen.

Die Producte auf den rechten Seiten der Gleichungen 30) lassen sich in Beziehung auf $x^2 = \sin^2 \operatorname{am} u$ in Partialbrüche zerlegen. Da eine directe Rechnung sehr beschwerlich ausfallen würde, so soll ein einfaches Verfahren angegeben werden, die bemerkte Zerlegung mit Leichtigkeit ausführen zu können.

Die beiden Gleichungen:

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}, \quad q^n = e^{-\pi \frac{L'}{L}}$$

und die Gleichung 19), nämlich:

$$\frac{nL}{K} = \frac{1}{M},$$

geben:

$$31) \quad n\frac{K'}{K} = \frac{L'}{L}, \quad \frac{K'}{M} = nL\frac{K'}{K} = L', \quad \frac{K}{nM} = L.$$

Für $u = K'$ ist also $\frac{u}{M} = L'$. In den Gleichungen 30) setze man wieder:

$$x = \sin\operatorname{am} u, \quad y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, l\right).$$

Aus der ersten Gleichung folgt durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$32)\quad \frac{M\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, l\right)}{\sin\operatorname{am} u} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} u\,\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}} =$$

$$A_0 + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{A_r}{1 - k^2\sin^2\operatorname{am} u\,\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}.$$

Um $A_r$ zu finden multiplicire man auf beiden Seiten mit:

$$1 - k^2\sin^2\operatorname{am} u\,\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n} = 1 - \frac{\sin^2\operatorname{am} u}{\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2rK}{n} + iK'\right)}$$

und setze $u = \frac{2rK}{n} + iK'$. Man nehme zuerst $u = \varepsilon + \frac{2rK}{n} + iK'$, also nach 31):

$$\frac{u}{M} = \frac{\varepsilon}{M} + 2rL + iL'.$$

Man erhält dann, $\varepsilon = 0$ gesetzt,:

$$A_r = \lim \frac{M\sin\operatorname{am}\left(\frac{\varepsilon}{M} + 2rL + iL', l\right)}{\sin\operatorname{am}\left(\varepsilon + \frac{2rK}{n} + iK'\right)} \times$$

$$\left[1 - k^2\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon + \frac{2rK}{n} + iK'\right)\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}\right],$$

oder einfacher:

$$A_r = \lim \frac{(-1)^r kM}{l\sin\operatorname{am}\left(\varepsilon + \frac{2rK}{n}\right)} \cdot \frac{\sin^2\operatorname{am}\left(\varepsilon + \frac{2rK}{n}\right) - \sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}{\sin\operatorname{am}\left(\frac{\varepsilon}{M}, l\right)}.$$

Nach leichter Rechnung folgt:

$$33)\quad A_r = 2(-1)^r \frac{kM^2}{l}\cos\operatorname{am}\frac{2rK}{n}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2rK}{n}.$$

Multiplicirt man in der Gleichung 32) auf beiden Seiten mit:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \, \sin^2 \mathrm{am} \frac{2rK}{n}\right),$$

und vergleicht die Coefficienten von $(\sin \mathrm{am}\, u)^{n-1}$, so folgt für $A_0$ die Gleichung:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am} \frac{2rK}{n}} = A_0 \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} k^2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{2rK}{n},$$

oder:

$$A_0 k^{n-1} = \frac{1}{\left[\sin \mathrm{am} \frac{2K}{n} \sin \mathrm{am} \frac{4K}{n} \ldots . \sin \mathrm{am} \frac{n-1}{n} K\right]^4}.$$

In Folge der Gleichungen 27) ist einfacher:

$$A_0 = \frac{kM^2}{l}.$$

Setzt man diesen Werth von $A_0$ und den Werth von $A_r$ aus 33) in die Gleichung 32), multiplicirt mit:

$$\frac{l}{kM^2} \sin \mathrm{am}\, u,$$

so erhält man schliesslich:

$$35) \quad \frac{l}{kM} \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) =$$

$$\sin \mathrm{am}\, u + 2 \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^r \frac{\sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am} \frac{2rK}{n} \Delta \mathrm{am} \frac{2rK}{n}}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \, \sin^2 \mathrm{am} \frac{2rK}{n}}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich auf folgende Art noch etwas transformiren. Man setze zur Abkürzung:

$$35) \quad S = 2 \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^r \frac{\sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am} \frac{2rK}{n} \Delta \mathrm{am} \frac{2rK}{n}}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \, \sin^2 \mathrm{am} \frac{2rK}{n}}.$$

In dieser Gleichung setze man $r = n - s$, dann ist:

$$36)\quad S = 2\sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-1)^{n-s}\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\left(2K-\frac{2sK}{n}\right)\Delta\mathrm{am}\left(2K-\frac{2sK}{n}\right)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\left(2K-\frac{2sK}{n}\right)}.$$

Da $n$ ungrade, so ist $(-1)^{n-s} = (-1)^{n+s} = -(-1)^s$. Setzt man rechts in 36) wieder $r$ statt $s$, so ist auch:

$$S = 2\sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-1)^r\frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}\frac{2rK}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{2rK}{n}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}\frac{2rK}{n}}.$$

Diese Gleichung zur Gleichung 35) addirt, dann durch 2 dividirt, giebt:

$$37)\quad S = \sum_{1}^{n-1}(-1)^r\frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}\frac{2rK}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{2rK}{n}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}\frac{2rK}{n}}.$$

Trennt man in der vorstehenden Summe die graden und ungraden Werthe von $r$, so ist auch:

$$S = \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}\frac{4rK}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{4rK}{n}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}\frac{4rK}{n}}$$

$$-\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n}}.$$

In der zweiten Summe setze man: $\cos\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n} = -\cos\mathrm{am}\left(2K-\frac{2(2r-1)K}{n}\right) = -\cos\mathrm{am}\frac{2(n-2r+1)K}{n}$ und analog transformire man die Argumente von $\Delta\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n}$, $\sin\mathrm{am}\frac{2(2r-1)K}{n}$. Es nimmt dann $n-2r+1$ alle gradzahligen Werthe an von 2 bis $n-1$; die zweite Summe ist also gleich der ersten, und mithin:

$$38)\quad S = 2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\mathrm{am}u\,\cos\mathrm{am}\frac{4rK}{n}\Delta\mathrm{am}\frac{4rK}{n}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}u\,\sin^2\mathrm{am}\frac{4rK}{n}}.$$

Wegen der Gleichungen 35), 37) und 38) lässt sich die Gleichung 34) auf eine der folgenden Formen bringen:

$$39)\quad \frac{l}{kM}\operatorname{sinam}\left(\frac{u}{M}, l\right) =$$

$$\operatorname{sinam} u + \sum_{1}^{n-1} (-1)^r \frac{\operatorname{sinam} u \operatorname{cosam} \frac{2rK}{n} \Delta\operatorname{am} \frac{2rK}{n}}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} \frac{2rK}{n}},$$

$$40)\quad \frac{l}{kM}\operatorname{sinam}\left(\frac{u}{M}, l\right) =$$

$$\operatorname{sinam} u + 2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sinam} u \operatorname{cosam} \frac{4rK}{n} \Delta\operatorname{am} \frac{4rK}{n}}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} \frac{4rK}{n}}.$$

Es ist:

$$\operatorname{sinam}(u+a) + \operatorname{sinam}(u-a) = \frac{2\operatorname{sinam} u \operatorname{cosam} a \Delta\operatorname{am} a}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2\operatorname{am} u \operatorname{sin}^2\operatorname{am} a}.$$

Nimmt man $a = \frac{4rK}{n}$, so giebt die Gleichung 40):

$$41)\quad \frac{l}{kM}\operatorname{sinam}\left(\frac{u}{M}, l\right) =$$

$$\operatorname{sinam} u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left(u + \frac{4rK}{n}\right) + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left(u - \frac{4rK}{n}\right).$$

Da nun $\operatorname{sinam}(w + 4K) = \operatorname{sinam} w$, so ist auch:

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left[u - \frac{4rK}{n}\right] = \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left[u + 4K - \frac{4rK}{n}\right] =$$

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sinam}\left[u + 4\frac{n-r}{n}K\right] = \sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sinam}\left[u + \frac{4rK}{n}\right].$$

Die Gleichung 41) lässt sich hierdurch auf folgende Form bringen:

$$42)\quad \frac{l}{kM}\operatorname{sinam}\left[\frac{u}{M}, l\right] = \sum_{0}^{n-1} \operatorname{sinam}\left[u + \frac{4rK}{n}\right].$$

Die beiden letzten Gleichungen 30) lassen sich ganz auf dieselbe Art wie die erste transformiren; da eine Ausführung der vorkommenden Rechnungen eine fortwährende Wiederholung der Operationen sein würde, welche zur Herstellung der Gleichungen 34), 39), 40) und 41) dienten, so sollen die betreffenden Gleichungen, in Verbindung mit den bemerkten Gleichungen, ohne weitere Ableitung aufgestellt werden.

$$43)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{kM}\sin\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \\ \sin\operatorname{am}u + 2\displaystyle\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^r \dfrac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}\frac{2rK}{n}\,\Delta\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}, \\ \dfrac{l}{kM}\cos\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \\ \cos\operatorname{am}u + 2\displaystyle\sum(-1)^r \dfrac{\cos\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}, \\ \dfrac{1}{M}\Delta\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \\ \Delta\operatorname{am}u + 2\displaystyle\sum \dfrac{\Delta\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}\frac{2rK}{n}}. \end{cases}$$

Der Gleichung 42) entsprechen folgende Gleichungen:

$$44)\quad \begin{cases} \dfrac{l}{kM}\sin\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \displaystyle\sum_{0}^{n-1}\sin\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right], \\ \dfrac{l}{kM}\cos\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \displaystyle\sum\cos\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right], \\ \dfrac{1}{M}\Delta\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M}, l\right] = \displaystyle\sum\Delta\operatorname{am}\left[u+\frac{4rK}{n}\right]. \end{cases}$$

Nach 31) ist $\frac{K}{M} = nL$; lässt man in der Gleichung 40) $u$ um $K$ zunehmen, so geht die linke Seite über in:

$$\frac{l}{kM}\operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M}+nL,\,l\right] = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{l}{kM}\frac{\operatorname{cos\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}{\Delta\operatorname{am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}.$$

Durch die bemerkte Aenderung des Arguments ergiebt sich aus der Gleichung 40) die folgende:

$$45)\quad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{cos\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}{M\,\Delta\operatorname{am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]} =$$

$$\frac{k\operatorname{cos\,am}u}{\Delta\operatorname{am}u}+2k\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\operatorname{cos\,am}u\;\Delta\operatorname{am}u\;\operatorname{sin\,coam}\frac{4rK}{n}}{1-k^2\operatorname{sin^2\,am}u\;\operatorname{sin^2\,coam}\frac{4rK}{n}}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{k\operatorname{cos\,am}u}{\Delta\operatorname{am}u} = \frac{1}{2}\frac{d\log\frac{1+k\operatorname{sin\,am}u}{1-k\operatorname{sin\,am}u}}{du},$$

folglich:

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{cos\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}{M\,\Delta\operatorname{am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]} = \frac{1}{2}\frac{d\log\frac{1+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}}{du}.$$

Durch Integration und Uebergang von den Logarithmen zu den Zahlen erhält man aus 45):

$$\sqrt{\frac{1+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,l\operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M},\,l\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+k\operatorname{sin\,am}u}{1-k\operatorname{sin\,am}u}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1+k\operatorname{sin\,am}u\operatorname{sin\,coam}\frac{4rK}{n}}{1-k\operatorname{sin\,am}u\operatorname{sin\,coam}\frac{4rK}{n}}.$$

Man bilde das Quadrat der vorstehenden Gleichung, lasse $u$ um $iK'$, also $\frac{u}{M}$ um $iL'$, zunehmen. Es folgt dann:

$$\frac{\sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] + (-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right] - (-1)^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\mathrm{am}\, u + 1}{\sin\mathrm{am}\, u - 1} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\sin\mathrm{am}\, u + \sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n}}{\sin\mathrm{am}\, u - \sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n}} \right)^2$$

oder auch:

$$\frac{1 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right]}{1 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right]}$$

$$= \frac{1 + \sin\mathrm{am}\, u}{1 - \sin\mathrm{am}\, u} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left( \frac{\sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n} + \sin\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n} - \sin\mathrm{am}\, u} \right)^2.$$

Durch Ausziehung der Quadratwurzel folgt:

47)
$$\sqrt{\frac{1 + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right]}{1 - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\mathrm{am}\left[\frac{u}{M}, l\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \sin\mathrm{am}\, u}{1 - \sin\mathrm{am}\, u}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n} + \sin\mathrm{am}\, u}{\sin\mathrm{coam}\frac{4rK}{n} - \sin\mathrm{am}\, u}.$$

In dem Vorstehenden sind die wesentlichsten Resultate enthalten, welche *Jacobi* unter dem Titel „Formulae pro transformatione reali prima“ (Fund. p. 51) aufgestellt hat. Ausser den von *Jacobi* gegebenen Gleichungen sind noch weitere hinzugefügt, deren Anzahl sich mittelst der Entwickelungen des § 24 ohne Schwierigkeit vermehren lässt.

## § 38. Die Theta-Functionen, für welche $q$ durch $\alpha q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt ist, wo $\alpha^n = 1$.

Die Beziehungen zwischen den Theta-Functionen mit reellen und imaginären Argumenten, enthalten in den Gleichungen 18) von § 17, gestatten mit einer bemerkenswerthen Leichtigkeit die im vorhergehenden § enthaltenen Resultate zu weiteren Untersuchungen zu verwenden. Wird die Gleichung 7) des § 17 nämlich:

$$1) \quad \log q . \log q' = \pi^2$$

mit $n$ multiplicirt und durch $n$ dividirt, so lässt sich dieselbe schreiben:

$$2) \quad \log q^n . \log q'^{\frac{1}{n}} = \pi^2.$$

Geht also $q$ in $q^n$ über, so geht $q'$ in $q'^{\frac{1}{n}}$ über. Führt man in die Gleichungen des § 37 imaginäre Argumente ein, so ist das zweite Argument der vorkommenden Theta-Functionen respective $q'^{\frac{1}{n}}$ und $q'$. Setzt man darauf wieder $q$ statt $q'$, so folgt, dass sich $\vartheta(x, q^{\frac{1}{n}})$ durch ein Product von Factoren von der Form $\vartheta(x+a, q)$ ausdrücken lässt, wo $a$ unabhängig von $x$ ist. Diese Behauptung lässt sich auf folgende Art sehr einfach darthun und erweitern.

Es ist:

$$3) \quad \vartheta_2(x, q) = \sqrt{\frac{\pi}{\log \frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\, \vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log \frac{1}{q}}, q'\right).$$

Setzt man $nx$ statt $x$ und $q^n$ statt $q$, also $q'^{\frac{1}{n}}$ statt $q'$, so folgt:

$$4) \quad \vartheta_2(nx, q^n) = \sqrt{\frac{\pi}{n \log \frac{1}{q}}}\, e^{\frac{nx^2}{\log q}}\, \vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log \frac{1}{q}}, q'^{\frac{1}{n}}\right).$$

In der Gleichung 3) werde $x$ mit $x + \frac{r\pi}{n}$ vertauscht. Da $\frac{\pi^2}{\log q} = \log q'$ in Folge der Gleichung 1), so ist:

$$\vartheta_2\left[x+\frac{r\pi}{n},\ q\right] = \sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\ q'^{\frac{r^2}{n^2}}\ e^{\frac{x^2}{\log q}+\frac{2r\pi x}{n\log q}}\ \vartheta_2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}-\frac{ir}{n}\log q',\ q'\right).$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich die Gleichungen 11) und 12) des § 17) auf folgende Formen bringen:

$$\vartheta_2(nx,\ q^n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\prod_1^{n-1}\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\ q'^{\frac{r^2}{n^2}}\ e^{\frac{x^2}{\log q}+\frac{2r\pi x}{n\log q}}\times$$

$$\prod_0^{n-1}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}-\frac{ir}{n}\log q',\ q'\right).$$

$$\vartheta_2(nx,\ q^n) = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\ q'^{\frac{r^2}{n^2}}\ e^{\frac{x^2}{\log q}+\frac{2r\pi x}{n\log q}}\times$$

$$\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}-\frac{ir\log q'}{n},\ q'\right),$$

oder:

$$\vartheta_2(nx,\ q^n) =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n}{2}}\ q'^{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}}\ e^{\frac{nx^2+(n-1)\pi x}{\log q}}\times$$

$$\prod_0^{n-1}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}-\frac{ir}{n}\log q',\ q'\right),$$

$$\vartheta_2(nx,\ q^n) =$$

$$\frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{n}\ q'^{\frac{n^2-1}{12n}}\ e^{\frac{nx^2}{\log q}}\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}-\frac{ir\log q'}{n},\ q'\right).$$

Diese beiden Werthe von $\vartheta_2(nx,\ q^n)$ vergleiche man mit dem entsprechenden Werthe aus der Gleichung 4). Setzt man zur Vereinfachung:

$$5)\quad \begin{cases} \psi_1(q) = \dfrac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\left(\dfrac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n-1}{2}} q'^{\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}}\cdot\sqrt{n}, \\ \psi(q) = \dfrac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\left(\dfrac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n-1}{2}} q'^{\frac{n^2-1}{12n}}\cdot\sqrt{n}, \end{cases}$$

so erhält man unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

$$6)\quad \vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'^{\frac{1}{n}}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\psi_1(q)\, e^{\frac{(n-1)\pi x}{\log q}} \times \prod_{0}^{n-1}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}} - \frac{ir}{n}\log q', q'\right),$$

$$7)\quad \vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'^{\frac{1}{n}}\right) = \psi(q)\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}} - \frac{ir}{n}\log q', q'\right).$$

Die beiden Constanten $\psi(q)$ und $\psi_1(q)$ lassen sich auf Formen bringen, welche für die folgenden Untersuchungen übersichtlicher, wie die in 5) aufgestellten Definitionen sind. Die vierte der Gleichungen 18) von § 17, nämlich:

$$\vartheta_1(x,q) = -i\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\, e^{\frac{x^2}{\log q}}\vartheta_1\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)$$

werde nach $x$ differentiirt und dann $x = 0$ gesetzt. Hierdurch folgt:

$$8)\quad \vartheta'_1(0,q) = \left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{3}{2}}\vartheta'_1(0,q').$$

Es ist nun nach § 20, oder auch in Folge der Gleichungen 10) von § 15 und 2) von § 16):

$$\vartheta'_1(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2s})^3,$$

oder da:

$$9) \quad \varphi(q) = \prod_{1} (1-q^{2s}),$$

so ist:

$$\vartheta'_1(0,q) = 2q^{\frac{1}{4}}\varphi(q)^3.$$

Die Gleichung 8) nimmt hierdurch folgende Form an:

$$q^{\frac{1}{4}}\varphi(q)^3 = \left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{3}{2}} q'^{\frac{1}{4}}\varphi(q')^3.$$

Durch Ausziehung der Cubikwurzel folgt:

$$10) \quad q^{\frac{1}{12}}\varphi(q) = \left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{2}} q'^{\frac{1}{12}}\varphi(q').$$

In dieser Gleichung ersetze man $q$ durch $q^n$, also $q'$ durch $q'^{\frac{1}{n}}$. Es ist dann:

$$11) \quad q^{\frac{n}{12}}\varphi(q^n) = \left(\frac{\pi}{n\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{2}} q'^{\frac{1}{12n}}\varphi(q'^{\frac{1}{n}}).$$

Die Gleichung 10) zur $n$ten Potenz erhoben giebt:

$$q^{\frac{n}{12}}\varphi(q)^n = \left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n}{2}} q'^{\frac{n}{12}}\varphi(q')^n.$$

Aus der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 11) leitet man durch Division die folgende ab:

$$\frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n}\left(\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}\right)^{\frac{n-1}{2}} q'^{\frac{n^2-1}{12n}}\sqrt{n} = \frac{\varphi(q'^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q')^n}.$$

Nach 5) ist die linke Seite dieser Gleichung $\psi(q)$, folglich:

$$12) \quad \psi(q) = \frac{\varphi(q'^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q')^n}.$$

Die Gleichungen 5) dividirt geben:

$$\frac{\psi_1(q)}{\psi(q)} = q'^{\frac{(n-1)^2}{4n}}.$$

Mit Rücksicht auf 12) ist also:

$$13) \quad \psi_1(q) = q^{\frac{(n-1)^2}{4n}} \frac{\varphi(q'^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q')^n}.$$

Die Werthe von $\psi_1(q)$ und $\psi(q)$ aus 13) und 12) substituire man in die Gleichungen 6) und 7); ferner werde einfach $x$ statt $\frac{\pi x i}{\log \frac{1}{q}}$, also $xi$ statt $\frac{\pi x}{\log q}$ gesetzt. In den vorkommenden Theta-Functionen ist $q'$ das zweite Argument. Vertauscht man $q'$ mit $q$, so nehmen die Gleichungen 6) und 7) folgende Formen an:

$$14) \quad \vartheta(x, q^{\frac{1}{n}}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{\frac{(n-1)^2}{4n}} \frac{\varphi(q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n} e^{(n-1)xi} \prod_{0}^{n-1} \vartheta(x - \frac{ir}{n} \log q, q).$$

$$15) \quad \vartheta(x, q^{\frac{1}{n}}) = \frac{\varphi(q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(x - \frac{ir}{n} \log q, q).$$

Die Gleichung 15) gilt auch für die Functionen $\vartheta_3$, $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$. Setzt man $x + \frac{\pi}{2}$ statt $x$, so erscheint auf beiden Seiten die Function $\vartheta_3$.

Aus den Gleichungen 8) des § 16 folgt für $n = 2m + 1$:

$$\vartheta(x + \frac{ni}{2} \log q, q) = (-i)^n q^{-\frac{n^2}{4}} e^{nxi} \vartheta_1(x, q),$$

oder $q^{\frac{1}{n}}$ statt $q$ gesetzt:

$$\vartheta(x + \frac{i}{2} \log q, q^{\frac{1}{n}}) = (-i)^n q^{-\frac{n}{4}} e^{nxi} \vartheta_1(x, q^{\frac{1}{n}}).$$

Lässt man in der Gleichung 15) $x$ um $\frac{1}{2} \log q$ zunehmen, so folgt, dass $\vartheta$ durch $\vartheta_1$ ersetzt werden kann. Durch Aenderung des Arguments um $\frac{\pi}{2}$ erhält man dann weiter die Gleichung für $\vartheta_2(x, q^{\frac{1}{n}})$. Da diese vier Gleichungen besondere Fälle allgemeinerer Gleichungen sind, so soll ihre weitere Ausführung unterbleiben.

Die Gleichung 15) schreibe man auf folgende Art, welche eine directe Verification dieser Gleichung gestattet.

$$16) \quad \vartheta(x, q^{\frac{1}{n}}) = \frac{\varphi(q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(x - ir\log q^{\frac{1}{n}}, q).$$

Diese Gleichung lässt sich auf folgende Art erweitern. Es sei $t$ eine positive oder negative, ganze Zahl, welche nicht durch $n$ theilbar ist. Nimmt man:

$$q^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{2t\pi i}{n}} p^{\frac{1}{n}},$$

so ist $\log q^{\frac{1}{n}} = \frac{2t\pi i}{n} + \frac{1}{n}\log p$ und $q = p$. In der Gleichung 16) vertausche man $q^{\frac{1}{n}}$ mit $e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}$, dann ist:

$$17) \quad \vartheta(x, e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}) = Q_1 \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + r\frac{2t\pi - i\log q}{n}, q\right),$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$18) \quad Q_1 = \frac{\varphi(e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n}.$$

Nach der obigen Bemerkung gilt die Gleichung 17) für jede der vier Theta-Functionen. Hierdurch ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$19) \quad \begin{cases} \vartheta(x, e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}) = Q_1 \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + r\frac{2t\pi - i\log q}{n}, q\right), \\ \vartheta_1(x, e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}) = Q_1 \prod \vartheta_1\left(x + r\frac{2t\pi - i\log q}{n}, q\right), \\ \vartheta_2(x, e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}) = Q_1 \prod \vartheta_2\left(x + r\frac{2t\pi - i\log q}{n}, q\right), \\ \vartheta_3(x, e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}) = Q_1 \prod \vartheta_3\left(x + r\frac{2t\pi - i\log q}{n}, q\right). \end{cases}$$

Die Herstellung dieser Gleichungen basirt auf der einfachen Betrachtung, dass bei dem Uebergange von $q$ in $q^{\frac{1}{n}}$ die letztere

Quantität $n$ verschiedene Werthe hat, welche sämmtlich enthalten sind in:

$$e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}} \text{ für } t = 0, 1, 2, \ldots n-1.$$

Die Gleichungen 19) lassen sich direct beweisen, wenn die rechts stehenden Theta-Functionen in Form unendlicher Producte dargestellt werden. Sowohl mit Rücksicht auf die grosse Bedeutung der Gleichungen 19), wie auch einer allgemeinern Darstellung derselben, soll der Beweis auf die angegebene Art ausgeführt werden. Das anzuwendende Verfahren ist von *Jacobi* angegeben worden. Die erste gedruckte Notiz hierüber findet sich bei *Sohnke*: Aequationes modulares pro transformatione Functionum Ellipticarum. (Crelle. Journ. t. 16 p. 104 u. f.).

Mit Rücksicht auf die in 9) gebrauchte Bezeichnung $\varphi(q)$ ist:

$$\vartheta(z, q) = \varphi(q) \prod_1^\infty (1 - q^{2s-1} e^{2zi})(1 - q^{2s-1} e^{-2zi}).$$

Man setze hierin:

$$z = x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n},$$

wo $\mu$ eine ganze Zahl bedeutet, welche nicht durch $n$ theilbar ist; dasselbe finde für die Zahl $t$ statt. Es ist dann:

$$20) \quad \vartheta\left(x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right) =$$

$$\varphi(q) \prod_1^\infty (1 - q^{2s-1+\frac{2r}{n}} e^{\frac{2r\mu\pi i}{n}+2xi})(1 - q^{2s-1-\frac{r}{n}} e^{-\frac{2r\mu\pi i}{n}-2xi}).$$

Es ist nun:

$$q^{2s-1\pm\frac{2r}{n}} = \left(q^{\frac{1}{n}}\right)^{n(2s-1)\pm 2r},$$

oder:

$$q^{2s-1\pm\frac{2r}{n}} = \left(e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}\right)^{n(2s-1)\pm 2r} e^{\pm\frac{4rt\pi i}{n}},$$

da $e^{2t(2s-1)\pi i} = 1$. Die vorstehende Gleichung mit $e^{\pm\frac{2r\mu\pi i}{n}}$ multiplicirt giebt:

$$21) \quad q^{2s-1\pm\frac{2r}{n}} e^{\pm\frac{2r\mu\pi i}{n}} = \left(e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}\right)^{n(2s-1)\pm 2r} e^{\pm\frac{2r(2t-\mu)\pi i}{n}}.$$

Es lässt sich für ein gegebenes $\mu$ immer $t$ so bestimmen, dass $2t-\mu$ durch $n$ theilbar ist, also:

$$22) \quad 2t \equiv \mu \pmod{n}.$$

Man kann z. B. $2t = \mu + n\mu = (n+1)\mu$ nehmen. In diesem Falle ist:

$$e^{\pm\frac{2r(2t-\mu)\pi i}{n}} = 1.$$

Hierdurch wird die Gleichung 21) einfacher:

$$q^{2s-1\pm\frac{2r}{n}} e^{\pm\frac{2r\mu\pi i}{n}} = (e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}})^{n(2s-1)\pm 2r}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$23) \quad e^{\frac{2t\pi i}{n}} = \alpha,$$

so ist:

$$q^{2s-1\pm\frac{2r}{n}} e^{\pm\frac{2r\mu\pi i}{n}} = (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{n(2s-1)\pm 2r}.$$

Die Gleichung 20) lässt sich hierdurch auf folgende Form bringen:

$$24) \quad \vartheta\left(x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right) =$$

$$\varphi(q) \prod_1^\infty [1-(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{n(2s-1)+2r} e^{2xi}][1-(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{n(2s-1)-2r} e^{-2xi}].$$

Ist $n$ eine ungrade Zahl, nimmt $s$ alle ganzzahligen, positiven Werthe an, ferner $r$ alle ganzzahligen Werthe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n-1}{2}$, so durchläuft jeder der Ausdrücke $n(2s-1)\pm 2r$ alle ungraden, positiven Zahlen. Man findet dieses leicht, wenn in $n(2s-1)+2r$ successive $s = 1, 2, \ldots$ gesetzt wird und in jedem der so erhaltenen Ausdrücke $r$ die ganzzahligen Werthe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n-1}{2}$ annimmt. Auf diese Art ergiebt sich folgendes Schema:

Werthe von $n(2s-1)+2r$.

$$r = -\frac{n-1}{2}, \ldots 0, \ldots \frac{n-1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
s &= 1, \quad n+2r = 1, 3, \ldots 2n-1, \\
s &= 2, \quad 3n+2r = 2n+1, 2n+3, \ldots 4n-1, \\
s &= 3, \quad 5n+2r = 4n+1, 4n+3, \ldots 6n-1, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Legt man in der Gleichung 24) $r$ alle ganzzahligen Werthe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n-1}{2}$ bei, bildet das Product der erhaltenen Gleichungen, so ist:

$$\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right) =$$

$$\varphi(q)^n \prod_{\sigma=1}^{\sigma=\infty} [1-(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{2\sigma-1} e^{2xi}][1-(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{2\sigma-1} e^{-2xi}].$$

Abgesehn vom Factor $\varphi(\alpha q^{\frac{1}{n}})$ ist das unendliche Product auf der rechten Seite dieser Gleichung $\vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}})$. Hierdurch ergiebt sich folgende Gleichung:

$$25) \quad \vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = \frac{\varphi(\alpha q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right).$$

Diese Gleichung wird mit der ersten Gleichung 19) identisch, wenn links der Werth von $\alpha$ aus 23) substituirt wird und man als Lösung der Congruenz 22) einfach $\mu = 2t$ nimmt. Ganz analog lassen sich die übrigen in 19) enthaltenen Gleichungen darstellen, oder einfacher, durch Aenderung des Arguments $x$ aus der Gleichung 25). Um Wiederholungen zu vermeiden, sollen die Gleichungen für

$$\vartheta_3(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}), \quad \vartheta_1(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}), \quad \vartheta_2(x, \alpha q^{\frac{1}{n}})$$

weiter unten aufgestellt werden, da die rechte Seite der Gleichung 25) sich mit Hülfe sehr einfacher Betrachtungen auf eine allgemeinere Form bringen lässt. Es sei $g$ eine ganze Zahl, welche nicht durch $n$ theilbar ist. Zur Vereinfachung werde $n = 2m+1$ genommen. Das Product $P$ definirt durch die Gleichung:

$$26) \quad P = \prod_{r=-m}^{r=m} \vartheta\left(x + gr\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right)$$

ist gleich dem Producte der Theta-Functionen auf der rechten Seite der Gleichung 25), multiplicirt mit einem Factor, welcher von $x$ unabhängig ist.

Die kleinsten Reste der Multipla in Beziehung auf $2m+1$ sind zwischen $-m$ und $m$ enthalten. Bezeichnet man diese Reste durch $\pm\varrho_1, \pm\varrho_2, \ldots \pm\varrho_m$, so kann man setzen:

$$27)\quad \begin{cases} g = (2m+1)h_1 + \varrho_1, & -g = -(2m+1)h_1 - \varrho_1, \\ 2g = (2m+1)h_2 + \varrho_2, & -2g = -(2m+1)h_2 - \varrho_2, \\ \quad\vdots \\ mg = (2m+1)h_m + \varrho_m, & -mg = -(2m+1)h_m - \varrho_m. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen sind $h_1, h_2, \ldots h_m$ ganze, positive oder negative Zahlen. Es stellen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ die Zahlen 1, 2, $\ldots m$ in beliebiger Reihenfolge dar.

Wegen der Gleichungen 27) ist:

$$\vartheta\left(x + g_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right) = \vartheta\left(x + \varrho_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1} + h_p\mu\pi - h_p i\log q, q\right)$$

$$= \vartheta\left(x + \varrho_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1} - h_p i\log q, q\right).$$

$$\vartheta\left(x - g_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right) = \vartheta\left(x - \varrho_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1} + h_p i\log q, q\right).$$

Man bilde das Product dieser beiden Gleichungen. Da nun:
$\vartheta(z - hi\log q, q)\,\vartheta(z_1 + hi\log q, q) = q^{-2h^2} e^{-2h(z-z_1)i}\,\vartheta(z, q)\,\vartheta(z_1, q)$,
so folgt:

$$28)\quad \vartheta\left(x + g_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right)\vartheta\left(x - g_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right) =$$

$$q^{-2h^2 p - 4\frac{\varrho_p h_p}{2m+1}}\, e^{-4\frac{\varrho_p h_p \mu\pi i}{2m+1}} \times$$

$$\vartheta\left(x + \varrho_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right)\vartheta\left(x - \varrho_p\frac{\mu\pi - i\log q}{2m+1}, q\right).$$

Der Ausdruck für $P$ in der Gleichung 26) lässt sich hierdurch auf eine Form bringen, welche der rechten Seite der Gleichung 25) analog ist. Da in der Gleichung 28) $\varrho_p$ die Werthe $1, 2, \ldots m$ annimmt, so nehme man einfach $r$ statt $\varrho_p$. Ferner werde:

$$h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_m^2 = \Sigma h^2,\ \ldots \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2 + \ldots + \varrho_m h_m = \Sigma\varrho h,$$

$$\varrho_1^2 + \varrho_2^2 + \ldots + \varrho_m^2 = \Sigma\varrho^2,$$

gesetzt. Die Gleichung 26) wird dann:

29) $$P = q^{-2\Sigma\left(h^2+\frac{2h\varrho}{2m+1}\right)} e^{-4\Sigma\frac{\varrho h\mu\pi i}{2m+1}} \prod_{r=-m}^{r=m} \vartheta\left(x+r\frac{\mu\pi-i\log q}{2m+1}, q\right).$$

Es ist nun:

30) $$\Sigma\left[h^2+\frac{2h\varrho}{2m+1}\right] = \Sigma\frac{[h(2m+1)+\varrho]^2}{(2m+1)^2} - \Sigma\frac{\varrho^2}{(2m+1)^2}.$$

In Folge der Gleichungen 28) ist:

$$\Sigma[h(2m+1)+\varrho]^2 = g^2[1^2+2^2+..+m^2] = g^2\frac{(2m+1)(m+1)m}{6}.$$

Es ist ferner:

$$\Sigma\varrho^2 = 1^2+2^2+..+m^2 = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6}.$$

Die Gleichung 30) wird hierdurch:

31) $$\Sigma\left[h^2+\frac{2h\varrho}{2m+1}\right] = \frac{(g^2-1)(m+1)m}{6(2m+1)}.$$

Die Gleichungen 27) quadrirt und addirt geben:

$$g^2(1^2+2^2+..+m^2) = (2m+1)^2\Sigma h^2 + 2(2m+1)\Sigma h\varrho + \Sigma\varrho^2.$$

Da nun $\Sigma\varrho^2 = 1^2+2^2+..+m^2$, so folgt:

$$\frac{(g^2-1)(2m+1)m(m+1)}{6} = (2m+1)^2\Sigma h^2 + 2(2m+1)\Sigma h\varrho.$$

Diese Gleichung giebt:

$$2\Sigma\frac{h\varrho}{2m+1} = \frac{(g^2-1)m(m+1)}{6(2m+1)} - \Sigma h^2.$$

Mit Rücksicht hierauf ist:

32) $$e^{-4\Sigma\frac{\varrho h\pi\mu i}{2m+1}} = e^{\frac{\mu(g^2-1)m(m+1)\pi i}{3(2m+1)}},$$

da $e^{-2\Sigma\mu h^2\pi i} = 1$. Wegen der Gleichungen 31) und 32) nimmt die Gleichung 29) folgende Form an:

$$P = (e^{\frac{\mu\pi i}{2m+1}} q^{\frac{1}{2m+1}})^{\frac{-m(m+1)(g^2-1)}{3}} \prod_{-m}^{m} \vartheta\left(x+r\frac{\mu\pi-i\log q}{2m+1}, q\right).$$

Substituirt man für $P$ seinen Werth aus 26), nimmt wieder $2m+1 = n$, also $m = \frac{n-1}{2}$, so folgt:

$$\prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + gr\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right) =$$

$$(e^{\frac{\mu\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}})^{\frac{-(n^2-1)(g^2-1)}{12}} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + r\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right).$$

Diese Gleichung endlich in Verbindung mit der Gleichung 25) giebt:

$$33)\quad \vartheta(x, aq^{\frac{1}{n}}) = Q \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + gr\frac{\mu\pi - i\log q}{n}, q\right),$$

wo:

$$34)\quad Q = (e^{\frac{\mu\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}})^{\frac{(n^2-1)(g^2-1)}{12}} \cdot \frac{\varphi(aq^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n}.$$

Nun ist $2t \equiv \mu \pmod{n}$, also nach 23)

$$e^{\frac{\mu\pi i}{n}} = \pm e^{\frac{2t\pi i}{n}} = \pm\alpha.$$

Mit Ausnahme der Zahl 3 ist jede ungrade Primzahl in der Form $6a+1$ oder $6a-1$ enthalten. Es ist:

$$\frac{(6a\pm 1)^2 - 1}{12} = 2a^2 + a(a\pm 1).$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist offenbar eine grade Zahl. Für $n = 3$ ist:

$$\frac{(n^2-1)(g^2-1)}{12} = \frac{2(g^2-1)}{3}.$$

Da nun $g$ nicht durch 3 theilbar ist, so lässt $g$ einen der Reste 1 oder 2, in beiden Fällen ist dann $g^2-1$ durch 3 theilbar, also $\frac{2(g^2-1)}{3}$ eine grade Zahl. Für eine ungrade Primzahl $n$ und eine nicht durch $n$ theilbare Zahl $g$ ist also immer $\frac{(n^2-1)(g^2-1)}{12}$ eine grade Zahl. Nimmt man folglich in 34):

$$e^{\frac{\mu\pi i}{n}} = \pm\alpha$$

so folgt:

$$35)\quad Q = (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{(n^2-1)(g^2-1)}{12}} \cdot \frac{\varphi(\alpha q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n}.$$

Da $g$ und $\mu$ nicht durch $n$ theilbar sind, so kann man $g\mu = \nu n + m$ setzen, wo $m < n$ ist. Mit Beziehung hierauf folgt:

$$\vartheta(x + gr\frac{\mu\pi - i\log q}{n},\ q) = \vartheta(x + \nu\pi + r\frac{m\pi - gi\log q}{n},\ q) =$$

$$\vartheta(x + r\frac{m\pi - gi\log q}{n},\ q).$$

Die Gleichungen $2l \equiv \mu \pmod n$, $g\mu = m + \nu n$ zeigen, dass $2gt \equiv m \pmod n$ ist. Der Symmetrie halber bezeichne man $g$ durch $m'$, so dass also $2m't \equiv m \pmod n$ ist und:

$$\vartheta(x + gr\frac{\mu\pi - i\log q}{n},\ q) = \vartheta(x + r\frac{m\pi - m'i\log q}{n},\ q).$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 23), 33) und 35) giebt:

$$36)\quad \vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = Q \cdot \prod_{r=-\frac{n-1}{2}}^{r=\frac{n-1}{2}} \vartheta(x + r\frac{m\pi - m'i\log q}{n},\ q).$$

$$37)\quad \left\{ \begin{array}{c} Q = (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{(n^2-1)(m'^2-1)}{12}} \cdot \frac{\varphi(\alpha q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n},\ \alpha = e^{\frac{2t\pi i}{n}}, \\ 2m't \equiv m \pmod n. \end{array} \right.$$

Die Gleichung 36) lässt sich noch auf verschiedene Formen bringen, von denen die beiden folgenden erwähnt werden mögen. In der Gleichung:

$$\vartheta(z, q) = (-1)^{m'} q^{m'^2} e^{2m'zi} \vartheta(z + m\pi - m'i\log q,\ q)$$

setze man $z = x - r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}$, lege $r$ die Werthe $1, 2, .. \frac{n-1}{2}$ bei und bilde das Product aller so erhaltenen Gleichungen. Eine leichte Rechnung führt dann auf folgende Relation:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x - r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q\right) = \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{-1} \vartheta\left[x + r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}\right]$$

$$= (-1)^{\frac{m'(n-1)}{2}} e^{m'(n-1)xi} q^{\frac{m'^2(n-1)^2}{4n}} e^{-\frac{mm'(n^2-1)\pi i}{4n}} \times$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta[x + (n-r)\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q].$$

Da nun allgemein für eine beliebige Function $\Phi(t)$ von $t$:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \Phi(n-r) = \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \Phi(r),$$

so lässt sich die Gleichung 36) auch schreiben:

38) $$\vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = F(q) e^{m'(n-1)xi} \prod_{0}^{n-1} \vartheta\left(x + r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q\right).$$

39) $$F(q) = (-1)^{\frac{m'(n-1)}{2}} q^{\frac{m'^2(n-1)^2}{4n}} e^{-\frac{mm'(n^2-1)\pi i}{4n}} . Q.$$

In dem Product auf der rechten Seite der Gleichung 39) trenne man die graden Werthe und die ungraden Werthe von $r$. Es ist dann, auf beiden Seiten mit $e^{-m'(n-1)xi}$ multiplicirt,:

40) $$\vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) . e^{-m'(n-1)xi} =$$

$$F(q) \prod_{0}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x + 2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q\right) \times$$

$$\prod_{0}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta[x + (2r-1)\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q].$$

In der Gleichung:

$$\vartheta(z, q) = (-1)^{m'} q^{m'^2} e^{-2m'zi} \vartheta(z - m\pi + m'i\log q, q)$$

nehme man $z = x + (2r-1)\frac{m\pi - m'i\log q}{n}$, lege $r$ die Werthe

1, 2, .. $\frac{n-1}{2}$ bei und bilde das Product der so erhaltenen Gleichungen. Hierdurch folgt:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta[x+(2r-1)\frac{m\pi-m'i\log q}{n}, q] =$$

$$(-1)^{\frac{m'(n-1)}{2}} e^{-m'(n-1)xi} q^{\frac{m'^2(n-1)}{2n}} e^{\frac{-mm'(n-1)^2\pi i}{2n}} \times$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta[x-(n-2r+1)\frac{m\pi-m'i\log q}{n}, q].$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \Phi(n-2r+1) = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \Phi\left(2\frac{n-2r+1}{2}\right) = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \Phi(2r),$$

geht die Gleichung 40) in folgende über:

$$41) \quad \vartheta(x, aq^{\frac{1}{n}}) = f(q) \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(x+2r\frac{m\pi-m'i\log q}{n}, q),$$

wo:

$$f(q) = (-1)^{\frac{m'(n-1)}{2}} q^{\frac{m'^2(n-1)}{2n}} e^{-\frac{mm'(n-1)^2}{2n}\pi i} F(q).$$

Für $F(q)$ werde der Werth aus 39) substituirt. Da $n-1$ eine grade Zahl, also:

$$(-1)^{m'(n-1)} = 1$$

ist, so folgt:

$$42) \quad f(q) = Q q^{\frac{m'^2(n^2-1)}{4n}} e^{-mm'\left[\frac{(n-1)^2}{2n}+\frac{n^2-1}{4n}\right]\pi i}.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{(n-1)^2}{2n}+\frac{n^2-1}{4n} = \frac{(n-1)^2}{2n}+\frac{n^2-1}{2n}-\frac{n^2-1}{4n} = n-1-\frac{n^2-1}{4n},$$

also, da $n-1$ grade:

$$e^{-mm'\left[\frac{(n-1)^2}{2n}+\frac{n^2-1}{4n}\right]\pi i} = e^{-mm'\left[n-1-\frac{n^2-1}{4n}\right]\pi i}$$

$$= e^{mm'\frac{n^2-1}{4n}\pi i}.$$

In Folge der Gleichung 37) ist aber $m \equiv 2m't \pmod{n}$, ferner ist $\frac{n^2-1}{4}$ eine grade Zahl, wenn $n$ ungrade ist. Hieraus erhält man:

$$e^{-mm'\left[\frac{(n-1)^2}{2n}+\frac{n^2-1}{4n}\right]\pi i} = e^{\frac{2m'^2(n^2-1)t\pi i}{4n}} = \alpha^{\frac{m'^2(n^2-1)}{4}}.$$

Der Werth von $f(q)$ aus 42) lässt sich nun einfacher schreiben:

$$f(q) = (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{m'^2(n^2-1)}{4}} \cdot Q,$$

d. i. nach 37):

$$43) \quad f(q) = (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{(n^2-1)(4m'^2-1)}{12}} \cdot \frac{\varphi(\alpha q^{\frac{1}{n}})}{\varphi(q)^n}.$$

Die Gleichung 41) lässt sich auch direct aus der Gleichung 36) ableiten, wenn man $m$ und $m'$ nicht ohne gemeinschaftlichen Factor annimt. Setzt man $2m$ und $2m'$ statt $m$ und $m'$, so wird die Congruenz $2m't \equiv m \pmod{n}$ nicht geändert. Die Constante $Q$ in 37) nimmt dann die Form $f(q)$, bestimmt durch 43) an, während in dem Producte der Theta-Functionen auf der rechten Seite der Gleichung 36) $r$ in $2r$ übergeht.

Man kann die Gleichungen 36) und 41) in Formen darstellen, welche etwas einfacher wie die angegebenen sind und zu ähnlichen einfachen Betrachtungen Veranlassung geben, wie die Untersuchungen von § 37.

Es ist nach 37) $m \equiv 2m't \pmod{n}$, also wenn $h$ eine ganze Zahl bedeutet: $m = 2m't + hn$, mithin:

$$\frac{m\pi - m'i\log q}{n} = h\pi + m'\frac{2t\pi - i\log q}{n} =$$

$$h\pi - m'i\frac{\log q + 2t\pi i}{n} = h\pi + m'i\log(e^{\frac{2t\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}),$$

oder da:

$$e^{\frac{2t\pi i}{n}} = \alpha,$$

so folgt:

$$\frac{m\pi - m'i\log q}{n} = h\pi - m'i\log(\alpha q^{\frac{1}{n}}).$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$44) \quad \alpha q^{\frac{1}{n}} = q_1,$$

so ist:

$$45) \quad \frac{m\pi - m' i \log q}{n} = h\pi - m' i \log q_1.$$

In die Gleichung 41) führe man aus 44) $q_1$ statt $q$ ein, so dass $q = q_1^n$, wegen der Gleichung 45) ist dann:

$$46) \quad \vartheta(x, q_1) = f(q) \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(x - 2rm' i \log q_1, q_1^n).$$

Zu einer analogen Gleichung giebt die Gleichung 36) Veranlassung, welche auch direct aus 46) durch Vertauschung von $f(q)$ mit $Q$ und $2r$ mit $r$ folgt, nämlich:

$$47) \quad \vartheta(x, q_1) = Q \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(x - rm' i \log q_1, q_1^n).$$

In 41) $x + \frac{\pi}{2}$ statt $x$ gesetzt giebt:

$$48) \quad \vartheta_3(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = f(q) \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_3\left(x + 2r \frac{m\pi - m' i \log q}{n}, q\right).$$

Es ist:

$$\vartheta_3\left(x + \frac{i}{2} \log q, \alpha q^{\frac{1}{n}}\right) = \vartheta_3\left(x + \frac{ni}{2} \log q^{\frac{1}{n}}, \alpha q^{\frac{1}{n}}\right) =$$

$$\vartheta_3\left[x - \frac{ni}{2} \log \alpha + \frac{ni}{2} \log\left(\alpha q^{\frac{1}{n}}\right), \alpha q^{\frac{1}{n}}\right].$$

Da nun $\alpha = e^{\frac{2t\pi i}{n}}$, also $\log \alpha = \frac{2t\pi i}{n}$, so ist allgemein

$$\vartheta_3\left(z - \frac{ni}{2} \log \alpha\right) = \vartheta_3(z),$$

mithin:

$$\vartheta_3(x + \frac{i}{2}\log q, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = \vartheta_3(x + \frac{ni}{2}\log(\alpha q^{\frac{1}{n}}), \alpha q^{\frac{1}{n}}) =$$
$$(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{-\frac{n^2}{4}} e^{nxi}\, \vartheta_2(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}).$$

Wegen $\alpha^n = 1$ folgt schliesslich:

$$\vartheta_3(x + \frac{i}{2}\log q, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = q^{-\frac{n}{4}} e^{nxi}\, \vartheta_2(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}).$$

Mit Rücksicht auf die vorstehende Gleichung giebt die Gleichung 48) durch Zunahme von $x$ um $\frac{i}{2}\log q$:

$$49)\quad \vartheta_2(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = f(q) \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_2(x + 2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q).$$

Lässt man hierin $x$ um $\frac{\pi}{2}$ wachsen, so folgt, da $(-1)^{n-1} = 1$,

$$50)\quad \vartheta_1(x, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = f(q) \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1(x + 2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q).$$

Analog der Gleichung 36) kann man die rechten Seiten der Gleichungen 48), 49) und 50) ausdrücken, wenn $f(q)$ mit $Q$ vertauscht wird und $r$ an die Stelle von $2r$ unter dem Productenzeichen tritt.

## § 39. Die $n$ Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen, welche dem Uebergange von $q$ in $\alpha q^{\frac{1}{n}}$ der Theta-Functionen entsprechen. Die zweite reelle Transformation von Jacobi. Uebergang vom kleinern zum grösseren Modul.

Die Resultate des vorhergehenden § geben zu allgemeinen Transformationsgleichungen der elliptischen Functionen Veranlassung, wenn man die unnöthige Beschränkung, dass der Modul einer reelle Quantität sei, wegfallen lässt. Die Begründung der Lehre von den elliptischen Functionen mit Hülfe der Theta-Functionen, setzt nur voraus, dass die in der Rechnung auftretenten Reihen

convergent sind. In Folge der Bemerkungen auf pag. 80 ist die hinreichende und nöthige Bedingung der Convergenz von $\vartheta(x, q)$, dass für einen complexen Werth von $q$, der reelle Theil desselben kleiner wie die Einheit ist. Die allgemeine Transformation der elliptischen Functionen beruht auf der Gleichung 11) von § 36, wenn man nicht, wie es *Abel* thut, diese Gleichung durch Trennung der reellen und imaginären Theile in zwei Gleichungen zerlegt. Uebrigens hat *Abel* in andern Arbeiten die sämmtlichen Transformationen betrachtet, welche den Formeln des § 38 entsprechen.

Es bedeute $n$ eine ungrade Primzahl, ferner sei $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung:

$$1) \quad \alpha^n = 1.$$

Den Gleichungen:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}, \quad \sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0, q),$$

entsprechend setze man:

$$2) \quad \begin{cases} \sqrt{l} = \dfrac{\vartheta_2(0, \alpha q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(0, \alpha q^{\frac{1}{n}})} = \dfrac{\sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\left(\frac{2s-1}{2}\right)^2}}{\sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{s^2}}, \\ \sqrt{l'} = \dfrac{\vartheta(0, \alpha q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta_3(0, \alpha q^{\frac{1}{n}})} = \dfrac{\sum (-1)^s (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{s^2}}{\sum (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{s^2}}, \\ \sqrt{\dfrac{2L}{\pi}} = \vartheta_3(0, \alpha q^{\frac{1}{n}}) = \sum (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{s^2}. \end{cases}$$

$$3) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 w}} = L, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{1 - l'^2 \sin^2 w}} = L'.$$

Jeder Wurzel $\alpha$ der Gleichung 1) entsprechen nach 2) bestimmte Werthe von $l$ und $l'$, und wiederum diesen Werthen bestimmte Werthe von $L$ und $L'$ aus 3).

Die Gleichungen 50) und 41) des vorhergehenden § geben durch Division:

$$\frac{\vartheta_1(x, \alpha q^{\frac{1}{n}})}{\vartheta(x, \alpha q^{\frac{1}{n}})} = \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1(x + 2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q)}{\vartheta(x + 2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n}, q)} =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1(x, q)}{\vartheta(x, q)} \times$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta_1(2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n} + x, q)\ \vartheta_1(2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n} - x, q)}{\vartheta(2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n} + x, q)\ \vartheta(2r\frac{m\pi - m'i\log q}{n} - x, q)}.$$

Wendet man auf diese Gleichung die Principien des § 16 an, sowie die in 2) und 3) enthaltenen Bezeichnungen, so folgt:

$$4)\quad \sqrt{l}\,\mathrm{sin\,am}\left(\frac{2Lx}{\pi}, l\right) =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{k^n}\,\mathrm{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{sin\,am}\left(4rK\frac{m\pi - m'i\log q}{n} + \frac{2Kx}{\pi}\right) \times$$

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{sin\,am}\left(4rK\frac{m\pi - m'i\log q}{n} - \frac{2Kx}{\pi}\right).$$

In dieser Gleichung setze man $\log q = -\pi\frac{K'}{K}$, also:

$$K\frac{m\pi' - m'i\log q}{n\pi} = \frac{mK + m'iK'}{n}.$$

Zur Abkürzung führe man folgende Bezeichnung ein:

$$5)\quad \frac{mK + m'iK'}{n} = \omega.$$

Setzt man weiter $\frac{2Kx}{\pi} = u$, so nimmt die Gleichung 4) die einfachere Form an:

$$6)\quad \sqrt{l}\,\mathrm{sin\,am}\left(\frac{Lu}{K}, l\right) =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{k^n}\,\mathrm{sin\,am}\,u \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{sin\,am}(4r\omega + u)\,\mathrm{sin\,am}(4r\omega - u).$$

Nimmt man statt der Gleichung 41) die Gleichung 36) von

§ 38 und die entsprechende Gleichung für $\vartheta_1(x, aq^{\frac{1}{n}})$, so erhält man analog wie die Gleichung 6):

$$7)\quad \sqrt{l}\,\sin\mathrm{am}\left(\frac{Lu}{K},\ l\right) =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k^n}\,\sin\mathrm{am}\,u\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\mathrm{am}\,(2r\omega+u)\,\sin\mathrm{am}\,(2r\omega-u).$$

Ebenso wie für Sinus Amplitudinis lassen sich aus den Gleichungen 41), 49) und 48) des vorhergehenden § die entsprechenden Gleichungen für Cosinus und $\Delta$ Amplitudinis herleiten. Man erhält so ohne die geringste Schwierigkeit:

$$8)\quad \sqrt{\frac{l}{l'}}\cos\mathrm{am}\left(\frac{Lu}{K},\ l\right) =$$

$$\sqrt{\frac{k^n}{k'^n}}\cos\mathrm{am}\,u\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\mathrm{am}\,(4r\omega+u)\cos\mathrm{am}\,(4r\omega-u),$$

$$9)\quad \frac{\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{Lu}{K},\ l\right)}{\sqrt{l'}} =$$

$$\frac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\sqrt{k'^n}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\Delta\,\mathrm{am}\,(4r\omega+u)\,\Delta\,\mathrm{am}\,(4r\omega-u).$$

In dieser Gleichung kann man ähnlich wie in der Gleichung 7) unter dem Productenzeichen auf den rechten Seiten $2r$ durch $r$ ersetzen. Mit Rücksicht hierauf geben die Gleichungen 8) und 9), wenn $u = 0$ gesetzt wird:

$$10)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{l}{l'}} = \sqrt{\frac{k^n}{k'^n}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\mathrm{am}\,4r\omega = \sqrt{\frac{k^n}{k'^n}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\mathrm{am}\,2r\omega, \\ \frac{1}{\sqrt{l'}} = \frac{1}{\sqrt{k'^n}}\prod\Delta^2\mathrm{am}\,4r\omega = \frac{1}{\sqrt{k'^n}}\prod\Delta^2\mathrm{am}\,2r\omega. \end{cases}$$

Die Gleichungen 6) und 7) dividire man auf beiden Seiten durch $\sin\mathrm{am}\,u$ und setze $u = 0$. Für:

$$11)\quad \frac{L}{K} = \frac{1}{M}$$

ergiebt sich dann folgende Doppelgleichung:

$$12)\quad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{l}}{M} = \sqrt{k^n}\,\Pi\,\sin^2\mathrm{am}\,4r\omega = \sqrt{k^n}\,\Pi\,\sin^2\mathrm{am}\,2r\omega.$$

Durch Combination der Gleichung 10) und 12) folgt:

$$13)\quad \begin{cases} \sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\cos\mathrm{am}\,4r\omega}{\Delta\,\mathrm{am}\,4r\omega}\right)^2 = \prod_1^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\cos\mathrm{am}\,2r\omega}{\Delta\,\mathrm{am}\,2r\omega}\right)^2, \\ \sqrt{\frac{l'}{k'^n}} = \Pi\,\frac{1}{(\Delta\,\mathrm{am}\,4r\omega)^2} = \Pi\,\frac{1}{(\Delta\,\mathrm{am}\,2r\omega)^2}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M} = \Pi\left(\frac{\sin\mathrm{am}\,4r\omega}{\sin\mathrm{coam}\,4r\omega}\right)^2 = \Pi\left(\frac{\sin\mathrm{am}\,2r\omega}{\sin\mathrm{coam}\,2r\omega}\right)^2. \end{cases}$$

In der letzten Gleichung ist zur Vereinfachung $\sin\mathrm{coam}\,u$ statt $\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}$ gesetzt. Die Gleichungen 6), 8) und 9) lassen sich mittelst der Gleichungen 10), 11) und 12) auf folgende Formen bringen:

$$14)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u}{M}\prod_1^{\frac{n-1}{2}}\frac{\sin\mathrm{am}(4r\omega+u)\sin\mathrm{am}(4r\omega-u)}{\sin^2\mathrm{am}\,4r\omega}, \\ \cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \cos\mathrm{am}\,u\,\Pi\,\frac{\cos\mathrm{am}(4r\omega+u)\cos\mathrm{am}(4r\omega-u)}{\cos^2\mathrm{am}\,4r\omega}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Pi\,\frac{\Delta\,\mathrm{am}(4r\omega+u)\,\Delta\,\mathrm{am}(4r\omega-u)}{\Delta^2\,\mathrm{am}\,4r\omega}. \end{cases}$$

Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen kann man auch $r$ statt $2r$ nehmen. Für einige Entwickelungen scheinen indessen die Gleichungen 14) sich am einfachsten verwenden zu lassen. Die Gleichungen 7), 8) und 9) von § 24 auf die Gleichungen 14) angewandt geben:

$$15)\quad \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = y,\quad \sin\mathrm{am}\,u = x$$

gesetzt:

$$16)\quad \begin{cases} y = \dfrac{x}{M} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \dfrac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} 4r\omega}}{1-k^2x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4r\omega}, \\ \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-x^2} \prod \dfrac{1-\dfrac{x^2}{\sin^2 \operatorname{coam} 4r\omega}}{1-k^2x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4r\omega}, \\ \sqrt{1-l^2y^2} = \sqrt{1-k^2x^2} \prod \dfrac{1-k^2x^2 \sin^2 \operatorname{coam} 4r\omega}{1-k^2x^2 \sin^2 \operatorname{am} 4r\omega}. \end{cases}$$

Die Producte auf den rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen lassen sich in Beziehung auf $x^2$ in Partialbrüche zerlegen. Statt hierbei ein ähnliches Verfahren anzuwenden wie bei den Gleichungen 28) von § 37 um schliesslich auf die dort erhaltenen Gleichungen 44) zu kommen, möge der umgekehrte Weg eingeschlagen werden. Es werden bei diesem umgekehrten Verfahren einige difficile Betrachtungen vermieden, deren directe Anwendung in diesem Falle die Rechnungsoperationen zu weitläufig machen würde.

Da nach 5) $n\omega = mK + m'iK'$, so ist $\sin \operatorname{am}(z + 4n\omega) = \sin \operatorname{am} z$, also auch:

$$\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \operatorname{am}(u - 4r\omega) = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \operatorname{am}[u + 4(n-r)\omega]$$

oder einfach:

$$17)\quad \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \sin \operatorname{am}(u - 4r\omega) = \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \sin \operatorname{am}(u + 4r\omega).$$

Die Gleichung 6) wird hierdurch:

$$\sqrt{\frac{l}{k^n}} \sin \operatorname{am}\left(\frac{Lu}{K}, l\right) = \sqrt{\frac{l}{k^n}} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \prod_{0}^{n-1} \sin \operatorname{am}(u + 4r\omega).$$

Auf diese Art lassen sich die Gleichungen 6), 8) und 9) durch die folgenden ersetzen:

$$18)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \sqrt{\dfrac{k^n}{l}} \prod_0^{n-1} \sin\mathrm{am}\,(u + 4r\omega), \\ \cos\mathrm{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \sqrt{\dfrac{k^n l'}{k'^n l}} \prod \cos\mathrm{am}\,(u + 4r\omega), \\ \Delta\mathrm{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \sqrt{\dfrac{l'}{k'^n}} \prod \Delta\mathrm{am}\,(u + 4r\omega). \end{cases}$$

Wegen $n\omega = mK + m'iK'$ bleiben die rechten Seiten dieser Gleichungen ungeändert, wenn $u$ ersetzt wird durch:

$$u + 4\omega,\ u + 8\omega,\ \ldots,\ u + 4(n-1)\omega.$$

Aus den Gleichungen 13) folgt:

$$\prod_1^{\frac{n-1}{2}} k^2 \sin^4\mathrm{am}\,4r\omega = k^{n-1} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \sin^4\mathrm{am}\,4r\omega = \frac{l}{kM^2}.$$

Hierdurch lässt sich die erste Gleichung 16) für $y = \sin\mathrm{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right)$ wie folgt darstellen:

$$19)\quad x \prod_1^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - \sin^2\mathrm{am}\,4r\omega) - \frac{l}{kM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) \times \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{k^2\sin^2\mathrm{am}\,4r\omega}\right) = 0.$$

Diese Gleichung wird identisch für $x = \sin\mathrm{am}u$. Da nun $\sin\mathrm{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right)$ unverändert bleibt, wenn $u + 4g\omega$ statt $u$ gesetzt wird, wo $g$ eine ganze Zahl bedeutet, so wird die linke Seite von 19) auch identisch für die $n$ verschiedenen Werthe von $x$

$$\sin\mathrm{am}u,\ \sin\mathrm{am}(u + 4\omega),\ \ldots \sin\mathrm{am}[u + 4(n-1)\omega].$$

Man kann demgemäss setzen:

$$x \prod_1^{\frac{n-1}{2}} (x^2 - \sin^2\mathrm{am}\,4r\omega) - \frac{l}{kM}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) \times \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \left(x^2 - \frac{1}{k^2\sin^2\mathrm{am}\,4r\omega}\right) = \prod_0^{\frac{n-1}{2}} [x - \sin\mathrm{am}\,(u + 4r\omega)].$$

Die Vergleichung der Factoren von $x^{n-1}$ giebt:

$$20) \quad \frac{l}{kM} \operatorname{sin\,am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \sum_{0}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega).$$

Behandelt man die beiden andern Gleichungen 16) auf ähnliche Art, so folgt:

$$21) \quad \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{kM} \operatorname{cos\,am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \displaystyle\sum_{0}^{n-1} \operatorname{cos\,am}(u + 4r\omega), \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M} \Delta\operatorname{am}\left(\dfrac{u}{M}, l\right) = \displaystyle\sum_{0}^{n-1} \Delta\operatorname{am}(u + 4r\omega). \end{cases}$$

Es ist:

$$22) \quad \sum_{0}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) = \operatorname{sin\,am} u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) + \sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega).$$

Wegen der Gleichung $\operatorname{sin\,am}(z - 4n\omega) = \operatorname{sin\,am} z$, ist auch:

$$\sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) = \sum_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,am}[u + 4(u - r)\omega] = \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,am}(u - 4r\omega).$$

Die Gleichung 22) wird hierdurch:

$$\sum_{0}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) = \operatorname{sin\,am} u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} [\operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) + \operatorname{sin\,am}(u - 4r\omega)],$$

oder, wenn man rechts das Additionstheorem der elliptischen Functionen anwendet:

$$\sum_{0}^{n-1} \operatorname{sin\,am}(u + 4r\omega) =$$

$$\operatorname{sin\,am} u + 2 \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} 4r\omega \ \Delta \operatorname{am} 4r\omega}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} 4r\omega}.$$

Setzt man die links stehende Summe auf die rechte Seite der Gleichung 20), so erhält man $\operatorname{sin\,am}\left(\frac{u}{M}, l\right)$ rational durch $\operatorname{sin\,am} u$ ausgedrückt. Diese Methode ist von *Jacobi* (Fund. p. 47 u. 48) angegeben worden. Es leuchtet ein, dass man die rechten Seiten der Gleichungen 21) ganz ähnlich transformiren kann. Auf diesem Wege ergeben sich die folgenden Gleichungen, welche der angedeuteten Zerlegung in Partialbrüche der rechten Seiten der Gleichungen 16) entsprechen:

$$23) \quad \begin{cases} \frac{l}{kM} \operatorname{sin\,am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \\ \qquad \operatorname{sin\,am} u + 2 \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} 4r\omega \, \Delta \operatorname{am} 4r\omega}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} 4r\omega}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} l}{kM} \operatorname{cos\,am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \\ \qquad \operatorname{cos\,am} u + 2 \sum \frac{\operatorname{cos\,am} u \operatorname{cos\,am} 4r\omega}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} 4r\omega}, \\ \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{M} \Delta \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \\ \qquad \Delta \operatorname{am} u + 2 \sum \frac{\Delta \operatorname{am} u \, \Delta \operatorname{am} 4r\omega}{1 - k^2 \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} u \operatorname{sin}^2 \operatorname{am} 4r\omega}. \end{cases}$$

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen kann man leicht eine neue Gleichung ableiten, welche der Relation 46) des § 37 entspricht. Nach 11) ist $\frac{1}{M} = \frac{L}{K}$, nimmt also $u$ um $K$ zu, so geht $\frac{u}{M}$ über in $\frac{u}{M} + L$. Durch Zunahme von $u$ um $K$ geht die erste Gleichung 23) über in:

$$\frac{l}{M}\frac{\cos\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},l\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},l\right)} =$$

$$\frac{k\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u} + 2k\sum\frac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u\sin\operatorname{coam}4r\omega}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{coam}4r\omega}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung sind vollständige Differentialquotienten in Beziehung auf $u$. Durch Integration folgt ähnlich wie in § 37:

$$24)\qquad \sqrt{\frac{1+l\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},l\right)}{1-l\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},l\right)}} =$$

$$\sqrt{\frac{1+k\sin\operatorname{am}u}{1-k\sin\operatorname{am}u}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1+k\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{coam}4r\omega}{1-k\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{coam}4r\omega}.$$

Für einen gegebenen Modul $k$ entsprechen nach 2) den $n$ Wurzeln von $\alpha^n = 1$ eine gleich grosse Anzahl von Werthen von $l$ und $l'$. Es ergeben sich also mit Rücksicht auf die erste Gleichung 16) $n$ verschiedene Werthe von $y$ in Form rationaler, gebrochener Functionen von $x$, welche gleichzeitig mit $x$ verschwinden und der Differentialgleichung genügen:

$$25)\qquad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Diese $n$ Werthe von $y$ entsprechen den verschiedenen Werthen von $\omega$ enthalten in:

$$26)\qquad \omega = \frac{mK+m'iK'}{n}.$$

Es haben $m$ und $m'$ weder unter einander noch mit $n$ einen gemeinschaftlichen Factor. In Folge der Betrachtungen in § 38 (z. B. Gleichung 26) kann $m$ verschwinden, aber nicht $m'$. Nimmt man $m' = 1$, so kann in 26) $m$ die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-1$ annehmen. Die verschiedenen Werthe von $\omega$ sind dann in folgender Reihe enthalten:

$$\frac{iK'}{n},\quad \frac{K+iK'}{n},\quad \frac{2K+iK'}{n},\quad \ldots\quad \frac{(n-1)K+iK'}{n}.$$

Die letzten $\frac{n-1}{2}$ dieser Argumente in umgekehrter Ordnung geschrieben sind:

$$\frac{(n-1)K+iK'}{n}, \quad \frac{(n-2)K+iK'}{n}, \ldots \quad \frac{\frac{n+1}{2}K+iK'}{n},$$

oder:

$$K-\frac{K-iK'}{n}, \quad K-\frac{2K-iK'}{n}, \ldots \quad K-\frac{\frac{n-1}{2}K-iK'}{n}.$$

Da nun allgemein $\sin^2 \mathrm{am}(4K-v) = \sin^2 \mathrm{am} v$, so lassen sich statt der letzten $\frac{n-1}{2}$ Werthe von $\omega$ der obigen Reihe in den Gleichungen 2) und 16) die folgenden annehmen:

$$\frac{K-iK'}{n}, \quad \frac{2K-iK'}{n}, \ldots \quad \frac{\frac{n-1}{2}K-iK'}{n}.$$

Die $n$ Werthe des Arguments $\omega$ sind also auch in folgender Reihe enthalten:

$$\frac{iK}{n}, \quad \frac{K\pm iK'}{n}, \quad \frac{2K\pm iK'}{n}, \ldots \quad \frac{\frac{n-1}{2}K\pm iK'}{n}.$$

Man kann die Werthe von $\omega$ auch noch auf andere Art darstellen, welche natürlich zu denselben Functionalwerthen der vorkommenden elliptischen Functionen führen, wie die eben bemerkten. In 26) nehme man $m = 1$ und $m' = 1, 2, \ldots n-1$. Hierzu tritt noch der Werth für $m = 0$. Die Reihe der Werthe von $\omega$ ist dann folgende:

$$\frac{iK'}{n}, \quad \frac{K+iK'}{n}, \quad \frac{K+2iK'}{n}, \ldots, \quad \frac{K+(n-1)iK'}{n}.$$

Durch eine ähnliche Betrachtung wie vorhin lassen sich statt der letzten $\frac{n-1}{2}$ Werthe die folgenden nehmen:

$$\frac{K-iK'}{n}, \quad \frac{K-2iK'}{n}, \ldots \quad \frac{K-\frac{n-1}{2}iK'}{n}.$$

Es ist dann die Gesammtheit der $n$ Werthe von $\omega$ der Gleichungen 2) und 16) in folgender Reihe enthalten:

$$\frac{iK'}{n}, \quad \frac{K \pm iK'}{n}, \quad \frac{K \pm 2iK'}{n}, \ldots \quad \frac{K \pm \frac{n-1}{2} iK'}{n}.$$

Die elliptischen Functionen, welche Multipla dieser Werthe von $\omega$ zu Argumenten haben, sind mit einer Ausnahme complexe Grössen. Nur in einem Falle geben die Gleichungen 2) für $l$ und $l'$, also auch für $L$ und $L'$, reelle Werthe, wenn nämlich $\alpha = 1$ ist. Dann ist $\omega = \frac{iK'}{n}$, wie z. B. aus den Gleichungen 19) von § 38 für $t = 0$ folgt. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 7) von § 8 geben die Gleichungen 13) und 16), wenn $\omega = \frac{iK'}{n}$ gesetzt wird,:

$$\sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2rK'}{n}, k'\right)}.$$

$$\sqrt{\frac{l'}{k'^n}} = \Pi \frac{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)} = \Pi \frac{\cos^2 \operatorname{am}\left(\frac{2rK'}{n}, k'\right)}{\Delta^2 \operatorname{am}\left(\frac{2rK'}{n}, k'\right)}.$$

$$\frac{1}{M} = \Pi \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)}{\sin^2 \operatorname{coam}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)} = \Pi \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{2rK'}{n}, k'\right)}{\sin^2 \operatorname{coam}\left(\frac{2rK'}{n}, k'\right)}.$$

$$y = \frac{x}{M} \Pi \frac{1 + x^2 \cot^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)}{1 + k^2 x^2 \operatorname{tang}^2 \operatorname{am}\left(\frac{4rK'}{n}, k'\right)}.$$

Die vorstehenden Gleichungen constituiren nach *Jacobi* die zweite reelle Transformation. Nach Gleichung 4) des § 22 ist:

$$\sqrt{k'} = \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2r-1}}{1 + q^{2r-1}}\right)^2.$$

Nimmt man $q^{\frac{1}{n}}$ statt $q$, so folgt:

$$\sqrt{l'} = \prod_{1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{\frac{2r-1}{n}}}{1 + q^{\frac{2r-1}{n}}}\right).$$

Die vorstehende Gleichung zeigt, dass für ein wachsendes $n$ der Complementärmodul $l'$ unbegränzt abnimmt, mithin der Modul

$l$ gegen die Einheit convergirt. Aus diesem Grunde bezeichnet *Jacobi* die Transformation als diejenige des kleineren in den grösseren Modul, im Gegensatz zu der in § 37 behandelten Transformation.

Die Vereinigung der Resultate des vorstehenden § und des § 37 zeigt, dass für eine ungrade Primzahl $n$, der Differentialgleichung 25) durch $n+1$ Werthe von $y$ in Form rationaler, gebrochener Functionen von $x$ genügt wird. Die $n+1$ Werthe von $l$ werden aus $k$ erhalten, wenn $q$ ersetzt wird durch:

$$q^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\ \ldots\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

wo $\alpha$ eine Wurzel von $\alpha^n = 1$ ist.

Dieses schöne Resultat findet sich zuerst in einem Briefe von *Jacobi* an *Crelle* vom Jahre 1828, welcher unter dem Titel: „Note sur les fonctions elliptiques" im dritten Bande von Crelle's Journal (p. 193) abgedruckt ist. In demselben Bande befindet sich, mit Beziehung auf die Mittheilungen von *Jacobi*, der Aufsatz von *Abel*: „Sur le nombre des transformations différentes, qu'on peut faire subir à une fonction elliptique par la substitution d'une fonction rationelle dont le degré est un nombre premier donné. (p. 394—401. Oeuvr. t. I. p. 309—316). *Abel* giebt Beweise der von *Jacobi* einfach aufgestellten Theoreme, wobei die schon früher erwähnten meisterhaften Untersuchungen in Nr. 138 der „Astr. Nachr." (Band 6. p. 365—388, Oeuv. t. I. p. 253—274) zur Anwendung kommen. Eine spätere Arbeit von *Abel*: „Note sur quelques formules elliptiques" (Crelle J. t. 4 p. 91, Oeuv. t. I. p. 305) behandelt denselben Gegenstand, für den Fall, dass der durch $l$ bezeichnete, transformirte Modul $k$ eine reelle Grösse ist.

In der Abhandlung „De functionibus ellipticis commentatio altera" (Crelle J. t. 6. p. 397—403) hat *Jacobi* eine neue Herleitung der in den Gleichungen 16) enthaltenen Transformationsformeln gegeben, welche auf Betrachtung der drei Reihen basirt ist, welche die rechten Seiten der Gleichungen 20) und 21) bilden. Auch in diesem Falle enthalten die Untersuchungen, wie die „*Fundamenta*" nur eine Verification der aufgestellten Formeln. Die beiden reellen

Transformationen *Jacobi's* hat *Legendre* im ersten und zweiten Supplement zum Gegenstande sehr eingehender Untersuchungen gemacht. Die Substitutionsgleichungen werden ähnlich wie bei *Jacobi* verificirt. Ungeachtet einer Menge sehr nützlicher Detailuntersuchungen bleiben die Resultate innerhalb der Gränzen der „Fundamenta". Auf pag. 32 des „Premier Supplément" wird die Relation zwischen $k$ und $l$ durch die ganzen elliptischen Integrale gegeben, davon aber keine Anwendung auf die Transformation selbst gemacht. Nur auf pag. 127 (Deuxième Supplément) wird eine sehr kurze Anwendung des Satzes von *Cotes* gemacht, auf welche schon früher *Jacobi* hingewiesen hatte. (Crelle J. t. 3. p. 305). Die grosse Allgemeinheit der von *Jacobi* gefundenen Transformationsgleichungen veranlasste bald nach ihrer Publication mehrere Beweise und Darstellungen derselben, von denen die folgenden angemerkt werden mögen, welche die ersten Versuche sind, die Wichtigkeit der Lehre der elliptischen Functionen in verschiedenen Ländern hervorzuheben.

Plana: Méthode élémentaire pour découvrir et démontrer la possibilité des nouveaux théorèmes sur la théorie des transcendantes elliptiques p. p. *Mr. Jacobi* dans le Nr. 123 du journal allemand intitulé *„Astronomische Nachrichten"* (Memorie della reale Academia delle scienze di Torino. 1829. t. XXXII p. 333—356).

Als Fortsetzung dieser Abhandlung, welche nur reelle Transformationen in Betracht zieht, enthalten die „Memorie d. r. Ac. d. s. di Torino. Serie seconda. Toms XX. 1863. (p. 207 u. f.) von demselben Verfasser „Mémoire sur la théorie des transcendantes elliptiques".

*Poisson*: Rapport sur un ouvrage de *Mr. Jacobi*, intitulé: Fundamenta nova functionum ellipticarum. (Mémoires de l'Académie. 1830 t. X. p. 73—117.)

*Ivory* On the Theory of Elliptic Transcendentes. (Philosophical Transactions. 1831. p. 349—377).

Diese Abhandlung, welche nur reelle Transformationen zu Grunde legt, zeichnet sich durch Untersuchungen der Transformationen

*grader Ordnung* aus. Es ergiebt sich, dass in dem bemerkten Falle der Differentialgleichung 25) durch einen Werth von $y$ genügt werden kann, welcher in Beziehung auf $x$ nicht rational ist.

Die Darstellung der *Fundamenta* findet sich ziemlich vollständig reproducirt in dem Artikel „Elliptische Functionen“ von *Sohnke*, enthalten in dem Werke; Allgemeine Encyclopaedie der Wissenschaften und Künste herausg. v. *Ersch* u. *Gruber*. Erste Section A—G. Vierzigster Theil. Nachträge. Leipzig 1844. (p. 77—135).

## § 40. Die Theta-Functionen, in welchen $q$ durch $q^2$ oder $\sqrt{q}$ ersetzt ist und die entsprechenden elliptischen Functionen. Die Theta-Functionen mit dem zweiten Argumente $e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}$.

Aehnlich wie in den § 37) und 38) lassen sich mittelst des Satzes von *Cotes* die Theta-Functionen, in denen das zweite Argument $q$ durch $q^2$ oder $\sqrt{q}$ ersetzt ist, durch die ursprünglichen Functionen ausdrücken. Man kann hierbei verschiedene Wege einschlagen z. B. sich der Gleichungen 14) und 16) des § 18 bedienen, welche die Darstellung der Theta-Functionen in Form unendlicher Producte nicht voraussetzen. Dieses Verfahren bietet indessen keine Vortheile gegen die Anwendung unendlicher Producte. Für die folgenden Untersuchungen mögen einige Gleichungen vorangesetzt werden, welche auch in weiterer Beziehung sich als sehr nützlich erweisen werden.

In den Gleichungen 1), 2), 3) und 4) auf pag. 104 nehme man $w = x = y = z$, also $w' = 2x$, $x' = y' = z' = 0$. Man verbinde darauf die Gleichungen 1) und 2) durch Addition und Subtraction, ebenso verfahre man mit den Gleichungen 3) und 4). Hierdurch folgt:

1) $2\vartheta_3(x)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta_3(2x) + \vartheta_2(0)^3\vartheta_2(2x) + \vartheta(0)^3\vartheta(2x)$,

2) $2\vartheta_2(x)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta_3(2x) + \vartheta_2(0)^3\vartheta_2(2x) - \vartheta(0)^3\vartheta(2x)$,

3) $2\vartheta(x)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta_3(2x) - \vartheta_2(0)^3\vartheta_2(2x) + \vartheta(0)^3\vartheta(2x)$,

4) $2\vartheta_1(x)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta_3(2x) - \vartheta_2(0)^3\vartheta_2(2x) - \vartheta(0)^3\vartheta(2x)$,

Für $x = \frac{\pi}{4}$ geben die vorstehenden Gleichungen:

$$2\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = 2\vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta(0) + \vartheta(0)^3\vartheta_3(0),$$

$$2\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = 2\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \vartheta_3(0)^3\vartheta(0) - \vartheta(0)^3\vartheta_3(0),$$

Nimmt man hierin $\vartheta(0) = \vartheta_3(0)\sqrt{k'}$, so folgt:

5)
$$\begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}\,\vartheta_3(0)^4, \\ \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 = \frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}\,\vartheta_3(0)^4. \end{cases}$$

Für $x = \frac{i}{2}\log q$, $\vartheta_2(0) = \vartheta_3(0)\sqrt{k}$, leitet man aus den Gleichungen 1)—4) die folgenden ab:

6)
$$\begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{i}{4}\log q\right)^4 = \vartheta_2\left(\frac{i}{4}\log q\right)^4 = q^{-\frac{1}{4}}\frac{1+k}{2}\sqrt{k}\,\vartheta_3(0)^4, \\ \vartheta_1\left(\frac{i}{4}\log q\right)^4 = \vartheta\left(\frac{i}{4}\log q\right)^4 = q^{-\frac{1}{4}}\frac{1-k}{2}\sqrt{k}\,\vartheta_3(0)^4. \end{cases}$$

In den Gleichungen 5) sind die vorkommenden Theta-Functionen sämmtlich reell und positiv, dasselbe ist mit den Functionen $\vartheta_3$, $\vartheta_2$ und $\vartheta$ in den Gleichungeu 6) der Fall. Was die Function $\vartheta_1$ betrifft, so ist dieselbe imaginär für imaginäre Argumente. Die Gleichung (§ 17 Gl. 18):

$$\vartheta_1(x, q) = -i\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,e^{\frac{x^2}{\log q}}\,\vartheta_1\left(\frac{\pi x i}{\log\frac{1}{q}}, q'\right)$$

giebt $x = \frac{i}{m}\log q$ gesetzt:

7)
$$\vartheta_1\left(\frac{i}{m}\log q, q\right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{\log\frac{1}{q}}}\,q^{-\frac{1}{m^2}}\vartheta_1\left(\frac{\pi}{m}, q'\right),$$

wo $\log q \log q' = \pi^2$. Da $\vartheta_1\left(\frac{\pi}{m}, q'\right)$ positiv, so ist in dem Werthe von $\vartheta_1\left(\frac{i}{4}\log q\right)$ aus 6) die vierte Wurzel der Einheit gleich $-i$ zu nehmen.

Die Gleichungen 10) von § 22 geben:

$$\vartheta(2x, q^2) = \Pi(1-q^{4r})\,\Pi(1-2q^{2(2r-1)}\cos 4x + q^{4(2r-1)}).$$

Man wende rechts auf jeden Factor die Relation:

$$1-2p^2\cos 4x + p^4 = (1-2p\cos 2x + p^2)(1+2p\cos 2x + p^2)$$

an. Mit Rücksicht auf die Bedeutungen von $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_3(x)$ lässt sich die obige Gleichung schreiben:

$$\vartheta(2x, q^2) = \Pi\frac{1-q^{4r}}{(1-q^{2r})^2}\,\vartheta(x, q)\,\vartheta_3(x, q).$$

Nimmt man zur Abkürzung:

$$8)\quad \Pi\frac{1-q^{4r}}{(1-q^{2r})^2} = \Pi\frac{1+q^{2r}}{1-q^{2r}} = Q,$$

so ist, wenn rechts das zweite Argument $q$ der Einfachheit halber nicht angemerkt wird:

$$9)\quad \vartheta(2x, q^2) = Q\,\vartheta(x)\,\vartheta_3(x) = Q\,\vartheta(x)\,\vartheta(x+\frac{\pi}{2}).$$

Ganz auf dieselbe Weise folgt:

$$10)\quad \vartheta_1(2x, q^2) = Q\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x) = Q\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_1(x+\frac{\pi}{2}),$$

wo $Q$ wieder durch die Gleichung 8) bestimmt ist. In den Gleichungen 9) und 10) lasse man $x$ um $\frac{\pi}{4}$ zunehmen. Nun ist:

$$\vartheta\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \vartheta(\pi-\frac{\pi}{4}+x) = \vartheta\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

$$\vartheta_1\left(x+\frac{3\pi}{4}\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}-x\right),$$

folglich:

$$11)\quad \begin{cases} \vartheta_3(2x, q^2) = Q\,\vartheta\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\,\vartheta\left(\frac{\pi}{4}-x\right). \\ \vartheta_2(2x, q^2) = Q\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}-x\right). \end{cases}$$

Auf die rechten Seiten dieser Gleichungen wende man die auf p. 108 unter 6) und 8) aufgestellten Relationen an, nämlich die folgenden:

$$12)\quad \begin{cases} \vartheta(0)^2\,\vartheta(x+y)\,\vartheta(x-y) = \vartheta(x)^2\,\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(x)^2\,\vartheta_1(y)^2, \\ \vartheta(0)^2\,\vartheta_1(x+y)\,\vartheta_1(x-y) = \vartheta_1(x)^2\,\vartheta(y)^2 - \vartheta(x)^2\,\vartheta_1(y)^2. \end{cases}$$

Die Gleichungen 11) lassen sich dann auf nachstehende Formen bringen:

$$\vartheta_3(2x, q^2) = \frac{Q}{\vartheta(0)^2}\left[\vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \vartheta(x)^2 - \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \vartheta_1(x)^2\right],$$

$$\vartheta_2(2x, q^2) = \frac{Q}{\vartheta(0)^2}\left[\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \vartheta(x)^2 - \vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \vartheta_1(x)^2\right].$$

Setzt man hierin $\vartheta(0) = \vartheta_3(0)\sqrt{k'}$, ferner für $\vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ihre Werthe aus 5), so erhält man schliesslich:

13)
$$\begin{cases} k'\vartheta_3(2x, q^2) = Q\left[\vartheta(x^2) - \vartheta_1(x)^2\sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}}\right]\sqrt{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}}, \\ k'\vartheta_2(2x, q^2) = Q\left[\vartheta(x)^2 - \vartheta_1(x)^2\sqrt{\frac{1+k'}{1-k'}}\right]\sqrt{\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Geht $q$ in $q^2$ über, so mögen $k$, $k'$, $K$ und $K'$ respective in $l$, $l'$ $L$ und $L'$ übergehen. Es ist dann also:

14) $$\sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0, q^2)}{\vartheta_3(0, q^2)},\ \sqrt{l'} = \frac{\vartheta(0, q^2)}{\vartheta_3(0, q^2)},\ \frac{2L}{\pi} = \vartheta_3(0, q^2)^2.$$

Aus den Gleichungen 13) folgt für $x = 0$:

15)
$$\begin{cases} k'\vartheta_3(0, q^2) = Q\vartheta(0)^2\sqrt{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}}, \\ k'\vartheta_2(0, q^2) = Q\vartheta(0)^2\sqrt{\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}}. \end{cases}$$

Durch Division folgt hieraus, mit Rücksicht auf 14):

16) $$\sqrt{l} = \sqrt{\frac{1-k'}{1+k'}} \text{ oder } l = \frac{1-k'}{1+k'}.$$

In der ersten Gleichung 15) nehme man wieder $\vartheta(0)^2 = k'\vartheta_3(0)^2 = \frac{2K}{\pi}k'$. Dann ist:

17) $$\vartheta_3(0, q^2) = Q\frac{2K}{\pi}\sqrt{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}}.$$

Die letzte Gleichung 6) auf pag. 121 giebt:

$$\sqrt{\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}} = \Pi\frac{1-q^{2r}}{1+q^{2r}},$$

d. i. nach 8):

$$\frac{1}{Q} = \sqrt{\frac{2K\sqrt{k'}}{\pi}}.$$

Man setze hieraus $Q$ in die Gleichung 17), ferner nach 16) $\vartheta_3(0, q^2) = \sqrt{\frac{2L}{\pi}}$. Es folgt so:

$$\sqrt{\frac{2L}{\pi}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \sqrt{\frac{1+k'}{2}}$$

oder einfacher:

$$18) \quad \frac{L}{K} = \frac{1+k'}{2}.$$

Die Gleichungen 9) und 10) dividirt geben:

$$\frac{\vartheta_1(2x, q^2)}{\vartheta(2x, q^2)} = \frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)},$$

d. i.

$$\sqrt{l}\,\mathrm{sin\,am}\left(\frac{4Lx}{\pi}, l\right) = k\,\frac{\mathrm{sin\,am}\,\frac{2Kx}{\pi}\,\mathrm{cos\,am}\,\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}},$$

oder $\frac{2Kx}{\pi} = u$ gesetzt:

$$19) \quad \sqrt{l}\,\mathrm{sin\,am}\left(\frac{2Lu}{K}, l\right) = k\,\frac{\mathrm{sin\,am}\,u\,\mathrm{cos\,am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}.$$

Substituirt man noch links für $l$ und $L$ die Werthe aus 16) und 18), so folgt:

$$\mathrm{sin\,am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\,\mathrm{sin\,am}\,u\,\mathrm{cos\,am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}.$$

Auf dieselbe Art leitet man aus den Gleichungen 9), 11) und 13) die folgenden ab:

$$20) \quad \begin{cases} \mathrm{sin\,am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\,\mathrm{sin\,am}\,u\,\mathrm{cos\,am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \mathrm{cos\,am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\,\mathrm{sin}^2\,\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1-k')\,\mathrm{sin}^2\,\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \end{cases}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen kann man auch die beiden folgenden direct herleiten, man muss dann die Gleichung 19) zu Grunde legen. Setzt man $u = \frac{K}{2}$, so folgt die Gleichung 16).

Differentiirt man ferner nach $u$, setzt darauf $u = 0$, so folgt $\frac{2L}{K} = \frac{k}{\sqrt{l}}$ und hieraus der in 18) gefundene Werth für $L$.*)

Man kann sich der Gleichungen 20) bedienen um die Transformationsgleichungen herzuleiten, welche dem Uebergange von $q$ in $\sqrt{q}$ der Theta-Functionen entsprechen. Wird $u$ durch $ui$ ersetzt, führt man ferner darauf statt der elliptischen Functionen mit imaginärem Argument die entsprechenden Functionen mit reellem Argument und dem Complementärmodul ein, so ergeben sich schliesslich durch Vertauschung von $k'$ mit $k$ die in Rede stehenden Relationen. Für manche Zwecke ist es besser von den Theta-Functionen auszugehn, da sich hierbei Gleichungen ergeben, die nicht bei der Transformation allein ihre Verwendung finden.

Die in den Gleichungen 10) von § 22 enthaltenen Producte geben:

$$\vartheta(x)\,\vartheta_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin x\, \Pi(1-q^{2r})^2\, \Pi(1-2q^r \cos 2x + q^{2r}).$$

Nun ist aber:

$$\Pi(1-2q^r \cos 2x + q^{2r}) = \Pi[1-2(\sqrt{q})^{2r} \cos 2x + (\sqrt{q})^{4r}].$$

Das Product der beiden Theta-Functionen lässt sich hierdurch auf folgende Art darstellen:

$$21) \quad \vartheta(x)\,\vartheta_1(x) = q^{\frac{1}{8}} \frac{\Pi(1-q^{2r})^2}{\Pi(1-q^r)}\, \vartheta_1(x, \sqrt{q}).$$

Trennt man die graden und ungraden Werthe von $r$, so ist:

$$\Pi(1-q^r) = \Pi(1-q^{2r})\, \Pi(1-q^{2r-1}),$$

folglich:

$$\frac{\Pi(1-q^{2r})^2}{\Pi(1-q^r)} = \Pi \frac{1-q^{2r}}{1-q^{2r-1}}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$22) \quad \frac{1}{q^{\frac{1}{8}}}\, \Pi \frac{1-q^{2r-1}}{1-q^{2r}} = Q_1,$$

---

*) Die Gleichnng $\Delta \operatorname{am} u\, \Delta \operatorname{am}(K-u) = k'$ giebt $u = \frac{K}{2}$ gesetzt: $\Delta^2 \operatorname{am} \frac{K}{2} = k'$, hieraus $\sin^2 \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{1-k'}{k^2} = \frac{1}{1+k'}$, $\cos^2 \operatorname{am} \frac{K}{2} = \frac{k'}{1+k'}$. Mit Hülfe dieser Gleichungen findet man ohne Schwierigkeit die Relation zwischen $k$ und $l$.

so erhält man aus der Gleichung 21):

$$23)\quad \vartheta_1(x, \sqrt{q}) = Q_1\, \vartheta(x)\, \vartheta_1(x).$$

Die Vertauschung von $x$ mit $\frac{\pi}{2} + x$ giebt:

$$24)\quad \vartheta_2(x, \sqrt{q}) = Q_1\, \vartheta_3(x)\, \vartheta_2(x).$$

Es ist:

$$\vartheta_1(x + \frac{i}{2}\log q) = -iq^{-\frac{1}{4}} e^{xi}\, \vartheta(x),$$

oder $x - \frac{i}{4}\log q$ statt $x$ gesetzt:

$$\vartheta_1(x + \frac{i}{4}\log q) = -ie^{xi}\, \vartheta(x - \frac{i}{4}\log q).$$

In der Gleichung 23) werde $x$ mit $x + \frac{i}{4}\log q$ vertauscht. Die rechte Seite lässt sich nach dem Vorstehenden schreiben:

$$-iQ_1\, e^{xi}\, \vartheta(x + \frac{i}{4}\log q)\, \vartheta(x - \frac{i}{4}\log q).$$

Die linke Seite geht über in:

$$\vartheta_1(x + \frac{i}{4}\log q, \sqrt{q}) = \vartheta_1(x + \frac{i}{2}\log\sqrt{q}, \sqrt{q}) = -iq^{-\frac{1}{8}} e^{xi}\, \vartheta(x, \sqrt{q}).$$

Durch die bemerkte Aenderung des Argumentes leitet man aus 23) folgende Gleichung ab:

$$25)\quad \vartheta(x, \sqrt{q}) = q^{\frac{1}{8}}\, Q_1\, \vartheta(x + \frac{i}{4}\log q)\, \vartheta(x - \frac{i}{4}\log q).$$

Hierin $x + \frac{\pi}{2}$ statt $x$ gesetzt giebt:

$$26)\quad \vartheta_3(x, \sqrt{q}) = q^{\frac{1}{8}}\, Q_1 \vartheta_3(x + \frac{i}{4}\log q)\, \vartheta_3(x - \frac{i}{4}\log q).$$

In der ersten Gleichung 12) nehme man $y = \frac{i}{4}\log q$ und $y = \frac{\pi}{2} + \frac{i}{4}\log q$, wendet man die erhaltenen Resultate auf die Gleichungen 25) und 26) an, so lassen sich dieselben auf folgende Formen bringen:

$$\vartheta(x, \sqrt{q}) = \frac{q^{\frac{1}{8}}\, Q_1}{\vartheta(0)^2}\left[\vartheta(x)^2\, \vartheta(\tfrac{i}{4}\log q)^2 - \vartheta_1(x)^2\, \vartheta_1(\tfrac{i}{4}\log q)^2\right],$$

$$\vartheta_3(x, \sqrt{q}) = \frac{q^{\frac{1}{8}}\, Q_1}{\vartheta(0)^2}\left[\vartheta(x)^2\, \vartheta_3(\tfrac{i}{4}\log q)^2 - \vartheta_1(x)^2\, \vartheta_2(\tfrac{i}{4}\log q)^2\right].$$

Nimmt man $\vartheta(0) = \sqrt{k'}\,\vartheta_3(0)$, reducirt die vorstehenden Gleichungen mittelst der Gleichungen 6) und 7), so ergiebt sich einfacher:

$$27)\quad \begin{cases} k'\vartheta(x,\sqrt{q}) = Q_1[\vartheta(x)^2 + \vartheta_1(x)^2]\sqrt{\frac{1-k}{2}}\sqrt{k}, \\ k'\vartheta_3(x,\sqrt{q}) = Q_1[\vartheta(x)^2 - \vartheta_1(x)^2]\sqrt{\frac{1+k}{2}}\sqrt{k}. \end{cases}$$

Geht $q$ in $\sqrt{q}$ über, so mögen $k$, $k'$, $K$ und $K'$ respective übergehn in $l_1$, $l'_1$, $L_1$ und $L'_1$, so dass also:

$$28)\quad \sqrt{l_1} = \frac{\vartheta_2(0,\sqrt{q})}{\vartheta_3(0,\sqrt{q})}, \sqrt{l'_1} = \frac{\vartheta(0,\sqrt{q})}{\vartheta_3(0,\sqrt{q})}, \frac{2L_1}{\pi} = \vartheta_3(0,\sqrt{q})^2.$$

In den Gleichungen 27) werde $x = 0$ gesetzt, der Quotient der so erhaltenen Gleichungen giebt nach 28):

$$\sqrt{l'_1} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}},\ l'_1 = \frac{1-k}{1+k},$$

mithin:

$$29)\quad l_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}.$$

Die zweite Gleichung 27) giebt $x = 0$ und $\vartheta(0)^2 = k'\vartheta_3(0)^2$ gesetzt:

$$\vartheta_3(0,\sqrt{q}) = Q_1\vartheta_3(0)^2\sqrt{\frac{1+k}{2}}\sqrt{k}.$$

Die durch 22) bestimmte Quantität $Q_1$ lässt sich in Folge der Gleichungen 6) von § 22 auch definiren:

$$30)\quad \frac{1}{Q_1} = \sqrt{\frac{K\sqrt{k}}{\pi}}.$$

Da nun $\vartheta_3(0,\sqrt{q}) = \sqrt{\frac{2L_1}{\pi}}$, $\vartheta_3(0,q) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$, so erhält man:

$$\sqrt{\frac{2L_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}\sqrt{1+k},$$

oder:

$$31)\quad \frac{L_1}{K} = 1+k.$$

Die Quotienten der Gleichungen 23), 24) und 27) führen auf elliptische Functionen mit den Argumenten $\frac{2L_1x}{\pi}$, $\frac{2Kx}{\pi}$, den Moduln

$k$ und $l_1$. Zur Vereinfachung setze man $\frac{2Kx}{\pi} = u$, werden die Werthe von $l_1$ und $L_1$ aus 29) und 31) substituirt, so ergiebt sich folgendes System von Transformationsgleichungen:

$$32)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{(1+k)\sin\mathrm{am}u}{1+k\sin^2\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{\cos\mathrm{am}u\ \Delta\mathrm{am}u}{1+k\sin^2\mathrm{am}u}, \\ \Delta\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \frac{1-k\sin^2\mathrm{am}u}{1+k\sin^2\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

Aehnlich wie die Gleichungen 20) lassen sich die vorstehenden Gleichungen aus einer derselben herleiten, oder besser, aus dem Quotienten der beiden Gleichungen 23) und 24).

Zu den vorstehenden Darstellungen über einige besondere Theta-Functionen mögen noch die folgenden Formeln angemerkt werden, welche sich leicht aus den bisherigen Resultaten ergeben.

Trennt man die graden und ungraden Werthe von $r$, so ist

$$\Pi(1-q^{2r}) = \Pi(1-q^r)(1+q^r) =$$
$$\Pi(1-q^{2r})(1-q^{2r-1})(1+q^{2r})(1+q^{2r-1})$$

also:

$$\frac{\Pi(1-q^{2r})}{\Pi(1-q^{2r-1})} = \Pi(1-q^{2r})(1+q^{2r})(1+q^{2r-1}),$$

d. i. nach 22):

$$\frac{1}{Q_1} = q^{\frac{1}{8}}\Pi(1-q^{2r})(1+q^{2r})(1+q^{2r-1}).$$

Geht $q$ über in $qe^{\pi i} = -q$, so geht $\frac{1}{Q_1}$ über in:

$$e^{\frac{i\pi}{8}} q^{\frac{1}{8}}\Pi(1-q^{2r})(1+q^{2r})(1-q^{2r-1}).$$

In Folge der Gleichungen 10) von § 22 ist dieser Ausdruck gleich:

$$e^{\frac{i\pi}{8}}\sqrt{\frac{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}{2}} = e^{\frac{i\pi}{8}}\frac{\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\vartheta_3(0).$$

Geht $q$ über in $qe^{\pi i}$, so geht $\vartheta_3(x)$ über in $\vartheta(x)$ und umgekehrt. Die Functionen $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$ kehren in sich zurück, multiplicirt

mit $e^{\frac{i\pi}{4}}$. Durch diese Aenderung von $q$ geben die Gleichungen 23) und 24):

$$33)\quad \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_1(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}) = e^{\frac{\pi i}{8}}\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(x), \\ \frac{\sqrt[4]{kk'}}{\sqrt{2}}\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_2(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}) = e^{\frac{\pi i}{8}}\,\vartheta(x)\,\vartheta_2(x). \end{cases}$$

In den Gleichungen 27) substituire man den Werth von $Q_1$ aus 30), setze $\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \vartheta_3(0)$ und $k' = \sqrt{1-k}\,\sqrt{1+k}$. Dann ist:

$$34)\quad \begin{cases} \sqrt{1+k}\,\vartheta_3(0)\,\vartheta(x, \sqrt{q}) = \vartheta(x)^2 + \vartheta_1(x)^2, \\ \sqrt{1-k}\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(x, \sqrt{q}) = \vartheta(x)^2 - \vartheta_1(x)^2. \end{cases}$$

Lässt man nun $q$ in $qe^{\pi i} = -q$ übergehn, so gehn in Folge der Gleichungen 4) von § 22 $k'$ und $k$ respective über in $\frac{1}{k'}$ und $\frac{ik}{k'}$. Es geht $\vartheta_3(0)$ über in $\vartheta(0) = \sqrt{k'}\,\vartheta_3(0)$. An Stelle der Gleichungen 34) treten:

$$35)\quad \begin{cases} \sqrt{k'+ik}\,\vartheta_3(0)\;\vartheta(x, e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q}) = \vartheta_3(x)^2 + i\,\vartheta_1(x)^2, \\ \sqrt{k'-ik}\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(x, e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q}) = \vartheta_3(x)^2 - i\,\vartheta_1(x)^2. \end{cases}$$

## § 41. Die Transformationen zweiter Ordnung. Historische und literarische Bemerkungen. Landen, Legendre, Lagrange, Gauss, Jacobi. Lineare Relationen zwischen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung. Küpper, Richelot, Schröter.

Die im vorhergehenden § behandelten Transformationen gehören zu den sogenannten *Transformationen zweiter Ordnung*. Dieselben sind die ältesten Resultate, was die Transformation elliptischer Integrale im Allgemeinen betrifft. Beinah ein halbes Jahrhundert vor den bahnbrechenden Arbeiten von *Abel* und *Jacobi* sind diese ebenso einfachen wie nützlichen Formeln zuerst entdeckt und bald darauf Gegenstand der Untersuchung der ausgezeichnetesten Mathematiker geworden.

In den Gleichungen 20) und 32) des vorhergehenden § setze man $\operatorname{am} u = \varphi$,

$$\operatorname{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \varphi_1, \quad \operatorname{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \psi.$$

Die bemerkten Gleichungen lassen sich dann auf folgende Formen bringen:

$$1) \quad \begin{cases} \sin\varphi_1 = \dfrac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}, & \cos\varphi_1 = \dfrac{1-(1+k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)}, \\ \sqrt{1-\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin^2\varphi_1} = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\varphi}{\Delta(\varphi)}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ gesetzt ist. Die Winkel $\varphi$ und $\varphi_1$ als obere Gränzen elliptischer Integrale sind durch folgende Gleichung verbunden:

$$2) \quad \int_0^{\varphi_1} \frac{dw}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-k'}{1+k'}\right)^2\sin^2 w}} = (1+k')\int_0^{\varphi} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}.$$

Zwischen den Winkeln $\psi$ und $\varphi$ finden die Gleichungen statt:

$$3) \quad \begin{cases} \sin\psi = \dfrac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}, & \cos\psi = \dfrac{\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1+k\sin^2\varphi}, \\ \sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\sin^2\psi} = \dfrac{1-k\sin^2\varphi}{1+k\sin^2\varphi}. \end{cases}$$

$$4) \quad \int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\sin^2 w}} = (1+k)\int_0^{\varphi} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}.$$

Wegen $k^2 = 1-k'^2$ ist $\dfrac{1-k'}{1+k'} = \dfrac{k^2}{(1+k')^2} = k\cdot\dfrac{k}{(1+k')^2}$,

also $\dfrac{1-k'}{1+k'} < k$. Es ist ferner:

$$\frac{2\sqrt{k}}{1+k} > k \text{ oder } 2 > \sqrt{k}+k\sqrt{k},$$

da $k < 1$ ist. Werden die Winkel $\varphi_1$ und $\psi$ mittelst der Gleichungen 1) und 3) berechnet, so lässt sich das elliptische Integral mit dem Modul $k$ auf doppelte Art in ein ähnliches transformiren. In der Gleichung 2) nimmt der Modul des transformirten Integrals ab, dagegen zu in der Gleichung 4).

Die Gleichungen 1) enthalten die sogenannte Transformation von *Landen*. Die erste dieser Gleichungen in etwas anderer Form hat zuerst *Landen* in den „Philosophical Transactions“ (Vol. LXV p. 283) 1775 aufgestellt, das geometrische Theorem, welches zu der analytischen Rechnung Veranlassung gegeben, findet sich indessen schon in den „Philosph. Transact.“ für 1771 ausgesprochen. (Man vergleiche auch *John Landen*: Mathematical Memoirs Vol. I. p. 32. London 1780). Es ist wohl wesentlich das Verdienst von *Legendre* in der kurzen Abhandlung von *Landen* das eigentliche Princip der Transformation elliptischer Integrale herausgefunden und verwerthet zu haben. In der „Histoire de l'Académie“ (Année MDCCLXXXVI. Paris MDCCLXXXVIII) hat *Legendre* unter dem Titel: „Mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse“ (pag. 616—643) Untersuchungen über elliptische Integrale gegeben, welche die ersten Spuren seiner späteren bedeutenden Forschungen enthalten. An diese Abhandlung schliesst sich unmittelbar (pag. 644—683) eine weitere an unter dem Titel: „Second mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse“, welche sich nur mit dem von *Landen* gefundenen Theoreme beschäftigt und dasselbe aus eigenen Formeln herleitet. In dieser zweiten Abhandlung erscheint auch zum ersten Male bei *Legendre* der Name *Lagrange* in Verbindung mit Untersuchungen über elliptische Integrale. In seinem grossen „Traité“ erwähnt *Legendre* der tiefen und klaren Untersuchungen des grossen Mathematikers nur sehr vorübergehend und in Worten, welche mit dem reichen Inhalte der Arbeit von *Lagrange* in keinem rechten Verhältniss stehn.

„Enfin Lagrange se signala de nouveau dans la même carrière en donnant une méthode générale pour trouver par approximation les intégrales de la forme $\int \frac{P dx}{R}$.“ (Fonct. ell. Introduction p. 3).

So sehr auch *Legendre* die Entdeckung von *Landen* bewundert, kann er nicht umhin zu bemerken, dass derselbe nur einen unbedeutenden Gebrauch von derselben gemacht habe. (— qui d'ailleurs n'en a tiré qu'un médiocre parti). Am Schlusse von Chap. XIX (Fonct. ell. t. 1. p. 89) bemerkt *Legendre*:

„En terminant ces observations nous signalerons comme un fait digne de remarque, qu'Euler n'ait rien écrit à l'occasion du Mémoire de Landen, imprimé dans les Transactions philosophiques de 1775, d'où il faut conclure que ce Mémoire n'est pas parvenu à sa connaissance; car dans l'hypothèse contraire, cet illustre Géomètre aurait sans doute suivant son usage, publié ses propres réflexions sur une découverte analytique qui devait particulièrement l'intéresser".

Es lässt sich wohl ziemlich sicher annehmen, das dem ebenso gründlichen wie gewissenhaften *Lagrange* die Arbeit von *Landen* unbekannt geblieben war, da sich dieselbe nicht citirt findet in der Abhandlung „Sur une nouvelle méthode de calcul intégral, pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré". (Mémoire de l'Académie des sciences. Années MDCCLXXXIV — MDCCLXXXV. Seconde Partie. Turin 1786, p. 218—290. Oeuvres t. II p. 253—312).*) In Nr. 7 giebt *Lagrange* folgendes Resultat über die Transformation elliptischer Integrale: Man nehme:

$$p' = p + \sqrt{p^2 - q^2}, \qquad q' = p - \sqrt{p^2 - q^2},$$
$$p'' = p' + \sqrt{p'^2 - q'^2}, \qquad q'' = p' - \sqrt{p'^2 - q'^2},$$
$$p''' = p'' + \sqrt{p''^2 - q''^2}, \qquad q''' = p'' - \sqrt{p''^2 - q''^2},$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

*) Am Schluss von Nr. 17 finden sich die Worte:

„Comme cette méthode est d'un genre assez nouveau, et qu'on pourrait rencontrer encore quelques difficultés dans son usage, nous allons l'appliquer en détail à la rectification des arcs elliptiques et hyperboliques".

In der oben erwähnten zweiten Abhandlung *Legendre's* vom Jahre 1786 ist der von *Lagrange* gefundenen Resultate in der Einleitung kurz gedacht worden. Hierdurch erledigt sich die Bemerkung von *Richelot* im Vorwort zur Schrift: Die Landen'sche Transformation. (Königsberg 1868).

„Dass Lagrange in seiner Abhandlung (Turiner Memoiren 1788 p. 218), worin er die später nach Gauss genannte Transformation der elliptischen Integrale und den Algorithmus der arithmetisch geometrischen Mittel angegeben hat, nirgend der Arbeit Landens erwähnt, dürfte weniger auffallend sein, als dass Legendre nirgend der Abhandlung von Lagrange erwähnt, obgleich er den Zusammenhang der Lagrange'schen und Landen'schen Transformationsformeln (Théorie d. f. e. p. 89) angiebt."

*Legendre*, welcher eigentlich *Landen* endeckt hat, scheint diesem Mathematiker gegenüber, fast mit Absicht die Arbeit seines eminenten Zeitgenossen später ignorirt zu haben.

ferner:

$$y' = \frac{yR}{1 \pm q^2y^2}, \quad y'' = \frac{y'R'}{1 \pm q'^2y'^2}, \quad y''' = \frac{y''R''}{1 \pm q''^2y''^2}, \ldots.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$R = \sqrt{(1 \pm p^2y^2)(1 \pm q^2y^2)}, \quad R' = \sqrt{(1 \pm p'^2y'^2)(1 \pm q'^2y'^2)},$$
$$R'' = \sqrt{(1 \pm p''^2y''^2)(1 \pm q''^2y''^2)}, \ldots.$$

Es finden dann die folgenden Gleichungen statt:

$$y^2 = \frac{\pm q^2y'^2 - 1 + R'}{\pm 2p^2}, \quad y'^2 = \frac{\pm q'^2y''^2 - 1 + R''}{\pm 2p'^2},$$
$$y''^2 = \frac{\pm q''^2y'''^2 - 1 + R'''}{\pm 2p''^2}, \ldots.$$

und:

$$\frac{dy}{R} = \frac{dy'}{R'} = \frac{dy''}{R''} = \ldots.$$

Es ist $q < p$ angenommen. Die Reihe der Quantitäten $p, p', p'' \ldots$ nimmt zu, da $p' > p$, $p'' > p'$ etc. Wegen $q < p$ ist um so mehr $q < p'$. Nun ist $q' = \frac{q^2}{p'} = q.\frac{q}{p'}$, folglich $q' < q$. Ebenso findet man $q'' < q'$, $q''' < q''$ etc., so dass also $q$, $q'$, $q'' \ldots$ eine Reihe unbegränzt abnehmender Quantitäten ist.

Diese Gleichungen von *Lagrange* sind im Grunde genommen eine Wiederholung der Gleichungen 1). Setzt man nämlich $y = \frac{z}{p}$ und $y' = \frac{z'}{p'}$, so folgt:

$$\frac{q'}{p'} = \frac{p - \sqrt{p^2 - q^2}}{p + \sqrt{p^2 - q^2}}, \quad z' = \frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{p}.\frac{z\sqrt{1 \pm z^2}}{\sqrt{1 \pm \frac{q^2}{p^2}z^2}}.$$

$$\frac{dz'}{\sqrt{(1 \pm z'^2)(1 \pm \frac{q'^2}{p'^2}z'^2)}} = \frac{p + \sqrt{p^2 - q^2}}{p} \frac{dz}{\sqrt{(1 \pm z^2)(1 \pm \frac{q^2}{p^2}z^2)}}.$$

Die vorstehenden Differentiale lassen sich nach der Tabelle auf p. 15 immer auf die Normalform elliptischer Differentiale bringen. Nimmt man die unteren Zeichen, so folgen die Gleichungen 1) unmittelbar für $q = pk$, $z = \sin\varphi$ und $z' = \sin\varphi_1$.

In Nr. 11 und 12 hat *Lagrange* ein zweites System von Reductionsgleichungen aufgestellt, welches aus dem ersten folgt, indem

die Reihen der $p, p' \ldots$ und $q, q' \ldots$ über $p$ und $q$ hinaus nach den entgegengesetzten Seiten weiter fortgesetzt werden, so dass diese Reihen folgende sind:

$$\ldots . p_2, p_1, p, p', p'' \ldots .$$
$$\ldots . q_2, q_1, q, q', q'' \ldots .$$

Zur Bestimmung von $p_1, p_2, \ldots$ und $q_1, q_2, \ldots$ dienen die Gleichungen:

$$p = p_1 + \sqrt{p_1^2 - q_1^2}, \quad q = p_1 - \sqrt{p_1^2 - q_1^2},$$
$$p_1 = p_2 + \sqrt{p_2^2 - q_2^2}, \quad q_1 = p_2 - \sqrt{p_2^2 - q_2^2}.$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

Diese Gleichungen geben umgekehrt:

$$p_1 = \frac{p+q}{2}, \quad q_1 = \sqrt{pq},$$
$$p_2 = \frac{p_1+q_1}{2}, \quad q_2 = \sqrt{p_1 q_1},$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

Da $q < p$, so ist $p_1 < q$, ferner ist $q_1 < p$, also $p_2 < p_1$. Die Quantitäten $p, p_1, p_2 \ldots$ nehmen ab. Da $p > q$, so ist $q_1 > q$. Es ist ferner $p_1 - q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$, also $p_1 > q_1$, mithin auch $q_2 > q_1$. Die Quantitäten $q, q_1, q_2 \ldots$ nehmen zu.

Man setze nun:

$$y = \frac{y_1 R_1}{1 \pm q_1^2 y_1^2}, \quad y_1 = \frac{y_2 R_2}{1 \pm q_2^2 y_2^2}, \ldots$$

wo:

$$R_1 = \sqrt{(1 \pm p_1^2 y_1^2)(1 \pm q_1^2 y_1^2)},$$
$$R_2 = \sqrt{(1 \pm p_2^2 y_2^2)(1 \pm q_2^2 y_2^2)}, \ldots .$$

Diese Gleichungen geben:

$$y_1^2 = \frac{\pm q_1^2 y^2 - 1 + R}{\pm 2 p_1^2}, \quad y_2^2 = \frac{\pm q_2^2 y_2^2 - 1 + R_1}{\pm 2 p_2^2}, \ldots .$$

und:

$$\frac{dy}{R} = \frac{dy_1}{R_1} = \frac{dy_2}{R_2} = \ldots$$

Um diese Gleichungen mit den Gleichungen 3) und 4) in Verbindung zu bringen, setze man $y = \frac{z}{p}$, $y_1 = \frac{z_1}{p_1}$ und $\frac{q}{p} = k$. Es ist dann:

$$\frac{q'}{p'} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad \frac{p'}{p} = \frac{1+k}{2}, \quad \frac{q'}{p} = \sqrt{k}.$$

Nimmt man in den Ausdrücken für $R$, $R_1$ ... die unteren Zeichen, so folgt:

$$5) \quad \frac{dz_1}{\sqrt{(1-z_1^2)\left[1-\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2 z_1^2\right]}} = \frac{1+k}{2} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

$$6) \quad z_1^2 = \frac{-kz^2-1+\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{-2}.$$

Für $z = \sin\varphi$ ist:

$$z_1^2 = \frac{1+k\sin^2\varphi-\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{2}.$$

Wenn $z = \mathrm{am}\,u$ genommen wird, so giebt die Differentialgleichung zwischen $z$ und $z_1$:

$$z_1 = \sin\mathrm{am}\left[\frac{1+k}{2}u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right].$$

Nun ist aber:*)

$$\sin^2\mathrm{am}\,w = \frac{1-\cos\mathrm{am}\,2w}{1+\Delta\mathrm{am}\,2w},$$

folglich:

$$z_1^2 = \frac{1-\cos\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}{1+\Delta\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right]}.$$

Setzt man hierin rechts $\mathrm{am}\left[(1+k)u, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \psi$, so folgt mittelst der Gleichungen 3):

$$z_1^2 = \frac{1+k\sin^2\varphi-\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{2},$$

welche Gleichung mit der obigen für $z_1^2$ übereinstimmt. Die zweite Methode von *Lagrange* kommt auf eine indirecte Anwendung der Gleichungen 3) und 4) heraus.

Die Gleichungen 3) und 4) tragen den Namen der Transformation von *Gauss*. In nur unwesentlich verschiedener Darstellung

*) Die bemerkte Gleichung ergiebt sich ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen 2) und 3) von § 24 für $u = v = w$.

finden sich dieselben in der inhaltreichen Abhandlung: Determinatio Attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exercet planeta si ejus massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita. (Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis, t. IV. p. 21—48. Gottingae MDCCCXVIII. Werke t. III p. 333 u. f.).

In den Gleichungen 3) und 4) setze man $k = \frac{m-n}{m+n}$ und $\varphi = \psi_1$. Dieselben gehn dann über in:

$$7) \qquad \sin\psi = \frac{2m\sin\psi_1}{(m+n)\cos^2\psi_1 + 2m\sin^2\psi_1}.$$

$$\int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{4m^2\cos^2 w + 4n^2\sin^2 w}} = \int_0^{\psi_1} \frac{dw}{\sqrt{(m+n)^2\cos^2 w + 4mn\sin^2 w}}.$$

Setzt man zur Vereinfachung $\frac{m+n}{2} = m'$, $\sqrt{mn} = n'$, so lässt sich die Integralgleichung auch schreiben:

$$8) \qquad \int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{m^2\cos^2 w + n^2\sin^2 w}} = \int_0^{\psi_1} \frac{dw}{\sqrt{m'^2\cos^2 w + n'^2\sin^2 w}}$$

$$m' = \frac{m+n}{2}, \; n' = \sqrt{mn}.$$

In der Form der Gleichungen 7) und 8) hat *Gauss* seine berühmte Reduction elliptischer Integrale gegeben, über welche in Nr. 16 sich folgende Bemerkung findet:

„Lectoribus autem gratum fore speramus, si hacce occasione determinationem harum aliarumque transcendentium per algorithmum peculiarem expeditissimum explicemus, quo per multos jam abhinc annos frequenter usi sumus, et de quo alio loco copiosius agere propositum est.“ (Werke III. p. 352.)

Bildet man die Reihe der Quantitäten:

$$m' = \frac{m+n}{2}, \; n' = \sqrt{mn},$$

$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \; n'' = \sqrt{m'n'},$$

. . . . . .

so ist $m^{(r+1)}$ das arithmetische, $n^{(r+1)}$ das geometrische Mittel der entsprechenden vorhergehenden Quantitäten $m^{(r)}$ und $n^{(r)}$.

Es ist $m'-n' = \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{2}$, $m''-n'' = \frac{m'+n'}{2} - \sqrt{m'n'}$ oder $m''-n'' = \frac{m'-n'}{2} - (\sqrt{m'}-\sqrt{n'})\sqrt{n'}$. Hieraus folgt $m''-n'' < \frac{m'-n'}{2}$, d. i. $m''-n'' < \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{4}$. Ebenso findet man $m'''-n''' < \frac{m''-n''}{2}$, mithin um so mehr $m'''-n''' < \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{8}$, allgemein:

$$m^{(r)}-n^{(r)} < \frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^2}{2^r}.$$

Für wachsende $r$ ist folglich $\lim(m^{(r)}-n^{(r)}) = 0$ d. h. $m^{(r)}$ und $n^{(r)}$ convergiren gegen eine gemeinschaftliche Gränze $\mu$, welche *Gauss* das *arithmetisch-geometrische Mittel* der beiden Quantitäten $m$ und $n$ nennt. Ueber dieses arithmetisch-geometrische Mittel enthält der dritte Band der Werke von *Gauss* p. 361—404 aus dem Nachlasse des grossen Mathematikers eine Reihe ungemein scharfsinniger und interessanter kleiner Aufsätze und Notizen. Durch fortgesetzte Transformation wird die Integralgleichung hergestellt:

$$9) \quad \int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{m^2\cos^2 w + n^2 \sin^2 w}} = \int_0^{\psi'} \frac{dw}{\sqrt{\mu^2\cos^2 w + \mu^2 \sin^2 w}} = \frac{\psi'}{\mu},$$

wo $\psi'$ der Werth ist gegen welchen der Winkel $\psi_r$ convergirt, wenn:

$$\sin\psi = \frac{m\sin\psi_1}{m'\cos^2\psi_1 + m\sin^2\psi_1}, \quad \sin\psi_1 = \frac{m'\sin\psi_2}{m''\cos^2\psi_2 + m'\sin^2\psi_2}, \ldots$$

Zu der Methode von *Gauss* hat *Jacobi* auf pag. 96 und 97 der „Fundamenta“ folgende weitere Ausführungen gegeben.

In den Gleichungen 3) setze man $\varphi = \psi_1$ und $k = \frac{m-n}{m+n}$, also

$$\sin\psi = \frac{2m\sin\psi_1}{(m+n)\cos^2\psi_1 + 2m\sin^2\psi_1},$$

$$\cos\psi = \frac{\cos\psi_1\sqrt{(m+n)^2\cos^2\psi_1 + 4mn\sin^2\psi_1}}{(m+n)\cos^2\psi_1 + 2m\sin^2\psi_1},$$

$$\sqrt{m^2\cos^2\psi + n^2\sin^2\psi} = m\frac{m+n-(m-n)\sin^2\psi_1}{m+n+(m-n)\sin^2\psi_1}.$$

Aus der letzten der vorstehenden Gleichungen ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$m \cdot \operatorname{tang}^2 \psi_1 = \frac{m+n}{2} \cdot \frac{m - \sqrt{m^2 \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi}}{\sqrt{m^2 \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi} - n},$$

oder auch:

$$m \cdot \operatorname{tang}^2 \psi_1 = \frac{m+n}{2} \operatorname{tang}^2 \psi \, \frac{n + \sqrt{m^2 \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi}}{m + \sqrt{m^2 \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi}}.$$

Für $\frac{m+n}{2} = m'$ und $\sqrt{m \cos^2 \psi + n^2 \sin^2 \psi} = \Delta$ ist einfacher:

$$\operatorname{tang} \psi_1 = \frac{\operatorname{tang} \psi}{m} \sqrt{m m' \frac{n + \Delta}{m + \Delta}}.$$

Setzt man mit *Jacobi*:

$$m' = \frac{m+n}{2}, \quad n' = \sqrt{mn}, \quad \Delta' = \sqrt{m m' \frac{n + \Delta}{m + \Delta}},$$

$$m'' = \frac{m'+n'}{2}, \quad n'' = \sqrt{m' n'}, \quad \Delta'' = \sqrt{m' m'' \frac{n' + \Delta'}{m' + \Delta'}},$$

. . . . . .

ferner:

$$\operatorname{tang} \psi_1 = \frac{\operatorname{tang} \psi}{m} \Delta', \quad \operatorname{tang} \psi_2 = \frac{\operatorname{tang} \psi_1}{m'} \Delta'' \ldots,$$

$$\operatorname{tang} \psi_r = \frac{\operatorname{tang} \psi_{r-1}}{m^{(r-1)}} \Delta^{(r-1)},$$

so giebt das Product dieser Gleichungen:

$$10) \qquad \operatorname{tang} \psi_r = \frac{\Delta' \Delta'' \ldots \Delta^{(r)}}{m m' \ldots m^{(r-1)}} \operatorname{tang} \psi.$$

Nun ist aber nach Gleichung 9) für ein unbegränzt zunehmendes $r$: $\lim \psi_r = \psi'$. Setzt man:

$$\int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{m^2 \cos^2 \varphi + n^2 \sin^2 \varphi}} = \Phi,$$

so giebt die Gleichung 9) $\psi' = \mu \Phi$. Nimmt $r$ in der Gleichung 10) unbegränzt zu, so dass $\psi_r = \psi'$, so giebt dieselbe:

$$\operatorname{tang} \mu \Phi = \operatorname{tang} \psi \cdot \frac{\Delta' \Delta'' \Delta''' \ldots}{m m' m'' \ldots},$$

was die von *Jacobi* gegebene Gleichung ist.

Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist in Folge von 7) auch $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$. Man findet so, dass allgemein $\psi_r = \frac{\pi}{2}$, also auch $\psi' = \frac{\pi}{2}$, wenn $\psi = \frac{\pi}{2}$. Für diesen Werth von $\psi$ geht die Gleichung 9) über in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dw}{\sqrt{m^2\cos^2\varphi + n^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2\mu},$$

durch welche Gleichung das arithmetisch-geometrische Mittel der Quantitäten $m$ und $n$ allgemein definirt ist.

Im Chapitre XVII seines „Traité d. F. e." hat *Legendre* die beiden von *Lagrange* angegebenen Methoden in etwas einfacherer Form auf die Berechnung der elliptischen Integrale erster Gattung angewandt. Setzt man in der Gleichung 6) $z_1 = \sin\varphi'$, so folgt:

$$11) \quad 2\sin^2\varphi' = 1 + k\sin^2\varphi - \cos\varphi\,\Delta(\varphi)$$

und hieraus:

$$12) \quad \begin{cases} 2\cos^2\varphi' = 1 - k\sin^2\varphi + \cos\varphi\,\Delta(\varphi), \\ 2\sin\varphi'\cos\varphi' = \sin 2\varphi' = \sin\varphi\,[k\cos\varphi + \Delta(\varphi)], \\ \cos^2\varphi' - \sin^2\varphi' = \cos 2\varphi' = -k\sin^2\varphi + \cos\varphi\,\Delta(\varphi). \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen geben:

$$13) \quad \sin(2\varphi' - \varphi) = k\sin\varphi.$$

Für $z = \sin\varphi$ und $z_1 = \sin\varphi'$ wird die Gleichung 5):

$$\frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2 \sin^2\varphi'}} = \frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

Da nach 11) $\varphi' = 0$, wenn $\varphi = 0$, so folgt durch Integration:

$$14) \quad F\left(\varphi', \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{1+k}{2}\,F(\varphi, k),$$

wo wieder durch $F(\varphi, k)$ nach *Legendre* das elliptische Integral erster Gattung bezeichnet ist. Für $\varphi' = \frac{\pi}{2}$ giebt die Gleichung 13) $\varphi = \pi$. Da nun $F(\pi, k) = 2F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$, so erhält man aus der Gleichung 14):

$$15) \quad F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = (1+k)\,F\left(\frac{\pi}{2}, k\right).$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben:

16) $\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tang} \varphi, \quad F\left(\varphi_1, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = (1+k')\,F(\varphi, k).$

Setzt man nach dem Vorgange von *Legendre*:

17)
$$\begin{cases} k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}, & \operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k' \operatorname{tang} \varphi, \\ k_2 = \frac{1-k'_1}{1+k'_1}, & \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = k'_1 \operatorname{tang} \varphi_1, \\ \quad \ldots \quad \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ k_r = \frac{1-k'_{r-1}}{1+k'_{r-1}}, & \operatorname{tang}(\varphi_r - \varphi_{r-1}) = k'_{r-1} \operatorname{tang} \varphi_{r-1}, \end{cases}$$

so giebt die wiederholte Anwendung der Gleichungen 16):

18) $F(\varphi, k) = \frac{1}{1+k'} F(\varphi_1, k_1), \; F(\varphi_1, k_1) = \frac{1}{1+k'_1} F(\varphi_2, k_2) \ldots,$

folglich:

19) $F(\varphi, k) = \frac{1}{(1+k')(1+k'_1)\ldots(1+k'_{r-1})} F(\varphi_r, k_r).$

Nimmt $r$ zu, so ist $\lim k_r = 0$, also $\lim F(\varphi_r, k_r) = \varphi_r$. Für ein wachsendes $r$ ist mithin aus 19):

20) $F(\varphi, k) = \varphi_r \frac{1}{(1+k')(1+k'_1)\ldots(1+k'_{r-1})}.$

In Folge der Gleichung 18) von § 40 war $L = \frac{1+k'}{2} K$, d.h. geht $q$ über in $q^2$, so geht $K$ über in $\frac{1+k'}{2} K$ und $k$ über in $\frac{1-k'}{1+k'}$. In den Gleichungen 1) und 2) ist also $\varphi_1 = \pi$, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Sind $K_1$, $K_2$, $K_3 \ldots$ die ganzen elliptischen Integrale erster Gattung, welche den Moduln $k_1$, $k_2$, $k_3, \ldots$, definirt durch die Gleichungen 17), entsprechen, so erhält man unmittelbar aus diesen Gleichungen und den Gleichungen 18):

$$K = \frac{2}{1+k'} K_1 = (1+k_1) K_1,$$

$$K_1 = \frac{2}{1+k'_1} K_2 = (1+k_2) K_2,$$

$$\ldots \quad \ldots$$

Da nun $\lim K_r = \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$\frac{2K}{\pi} = \frac{2}{1+k'}\,\frac{2}{1+k'_1}\,\frac{2}{1+k'_2}\ldots = (1+k_1)(1+k_2)(1+k_3)\ldots$$

Diese Gleichung mit 20) combinirt giebt:

$$F(\varphi, k) = \frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\varphi_r}{2^r},$$

wo rechts $r$ unbegränzt zunimmt.

Von den Transformationsgleichungen zweiter Ordnung hat *Legendre* sehr ausgedehnte Anwendungen in den Chap. XIX—XXII auf die numerische Berechnung der elliptischen Integrale aller drei Gattungen gemacht. Bemerkenswerth ist das Problem, (Traité des fonct. ell. t. 1. p. 92), welches sich *Legendre* stellt und durch Approximation behandelt, aus dem gegebenen Werthe des Integrals $F(\varphi, k)$ die Amplitude $\varphi$ zu berechnen. Bei Anwendung der Gleichungen 12) auf elliptische Integrale zweiter Gattung, gelangt *Legendre* zu einer sehr bemerkenswerthen einfachen Relation. Die Gleichungen 12) geben:

$$1-\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\sin^2\varphi' = \frac{-k'^2+2(1-k^2\sin^2\varphi)+2k\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{(1+k)^2}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit:

$$\frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\sin^2\varphi'}} = \frac{1+k}{2}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

integrirt darauf, so folgt:

$$21)\quad E\left(\varphi', \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = \frac{-\frac{k'^2}{2}F(\varphi, k)+E(\varphi, k)+k\sin\varphi}{1+k}.$$

Das elliptische Integral erster Gattung $F(\varphi, k)$ lässt sich mittelst der vorstehenden Gleichung durch zwei elliptische Integrale zweiter Gattung ausdrücken. Setzt man:

$$22)\quad S = \operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\varphi) - E(\varphi, k) + k'^2 F(\varphi, k),$$

so lässt sich $S$ durch Substitution des Werthes von $F(\varphi, k)$ aus 21) auf die Form bringen:

$$23)\quad S = \operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\varphi) + E(\varphi, k) + 2k\sin\varphi$$
$$-2(1+k)E\left(\varphi', \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right).$$

Es sind die beiden Gleichungen 22) und 23), welche das Theorem von *Landen* enthalten, welches bei dieser Darstellung sich auf eine einfache Anwendung der von *Legendre* gegebenen Gleichung 21) reducirt.

Sind die Winkel $\varphi, \varphi'$ und $\varphi''$ durch die Gleichungen verbunden:

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = k \sin\varphi, \quad \sin(2\varphi'' - \varphi') = k_1 \sin\varphi'$$

wo:

$$k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

setzt man ferner $k_2 = \frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$, so hat man analog wie die Gleichung 21) die beiden folgenden:

$$(1+k)\,E(\varphi', k_1) = -\frac{k'^2}{2}F(\varphi, k) + E(\varphi, k) + k\sin\varphi,$$

24)

$$(1+k_1)\,E(\varphi'', k_2) = -\frac{k_1'^2}{2}F(\varphi', k_1) + E(\varphi', k_1) + k_1\sin\varphi'.$$

Mittelst der Gleichung 14):

$$F(\varphi', k_1) = \frac{1+k}{2}F(\varphi, k)$$

lässt sich $F(\varphi, k)$ zwischen den Gleichungen 24) eliminiren, es ergiebt sich dann:

$$\frac{1-k}{(1+k^2)}E(\varphi, k) - \left(2 + \frac{1-k}{1+k}\right)E(\varphi_1, k_1) + 2(1+k_1)\,E(\varphi'', k_2)$$
$$+ k\frac{1-k}{(1+k)^2}\sin\varphi - 2k_1\sin\varphi' = 0.$$

Diese Relation zwischen drei elliptischen Integralen zweiter Gattung findet sich auf pag. 85. t. 1 des „Traité des F. ell." Mittelst der Gleichungen 1)—4) lassen sich der von *Legendre* aufgestellten Gleichung 21) die folgenden an die Seite stellen:

25) $$(1+k')\,E\left(\varphi_1, \frac{1-k'}{1+k'}\right) = 2E(\varphi, k) + 2k'\,F(\varphi, k) - \frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)},$$
$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = k'\operatorname{tang}\varphi.$$

26) $$(1+k)\,E\left(\psi, \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) = 2E(\varphi, k) - k'^2\,F(\varphi, k) + \frac{2k\sin\varphi\cos\varphi\Delta(\varphi)}{1+k\sin^2\varphi},$$
$$\sin\psi = \frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}.$$

Bei der zweiten Relation zwischen elliptischen Integralen ist die Reductionsformel:

$$(1+k)^2\left(\frac{1-k\sin^2\varphi}{1+k\sin^2\varphi}\right)^2\frac{1}{\Delta(\varphi)} = 2\Delta(\varphi) - \frac{k'^2}{\Delta(\varphi)} + 2k\frac{d\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}{1+k\sin^2\varphi}}{d\varphi},$$

anzuwenden, welche sich mittelst der Gleichungen 7) und 9) auf pag. 152 ergiebt. Durch Einführung elliptischer Functionen und der auf pag. 163 unter Gleichung 16) aufgestellten Definition von $E\left(\text{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$ lassen sich die Gleichungen 25) und 26) auf andere Formen bringen. Die etwas weitläufigen Rechnungen sollen nicht weiter ausgeführt werden, nur sei bemerkt, dass bei diesem Verfahren in beiden Gleichungen die Variabeln verschwinden, ein Umstand, der sich a priori erwarten lässt. Die Relationen zwischen Constanten, welche übrig bleiben, folgen direct aus den Gleichungen 25) und 26) für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_1 = \pi$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

Eine kurze geometrische Ableitung der Transformation von *Landen* findet sich in einem Briefe von *Jacobi* an *Hermite* (Crelle J. t. 32 p. 178 und *Jacobi's* Werke t. 1. p. 359). Das von *Jacobi* angewandte Verfahren findet sich weiter ausgedehnt bei:

*Küpper*: Démonstration géométrique de cette proposition, que toute fonction elliptique de première espèce peut être remplacée par deux fonctions elliptiques de seconde espèce, et Développement d'une formule relative à la rectification de l'hyperbole (Borchardt Journal. t. 55. p. 89—93).

Die vollständigste Arbeit über die sogenannten Transformationen zweiter Ordnung ist:

*Richelot*: Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. Aus einer Correspondenz mit Herrn Professor Schröter. (Königsberg 1868).

In dieser Schrift, deren Titel den ebenso werthvollen wie reichen Inhalt nicht ganz errathen lässt, hat *Richelot* die Transformation

von *Landen* auch dazu angewandt die elliptischen Functionen in Form unendlicher Reihen darzustellen. Eine analoge interessante Anwendung der Transformation von *Gauss* hat *Schröter* auf sehr einfache Art ausgeführt.

## § 42. Die Multiplication der elliptischen Functionen. Theorem von Jacobi. Literarische Notizen.

Nimmt man in den Gleichungen 1), 2) und 3) von § 24 $u = w$, dann successive $v = w, 2w, \ldots$, setzt zur Abkürzung $\sin\mathrm{am}\, w = x$, so folgt:

$$1)\quad \begin{cases} D_2 \sin\mathrm{am}\, 2w = 2x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}, \\ D_2 \cos\mathrm{am}\, 2w = 1-2x^2+k^2x^4, \\ D_2 \Delta\mathrm{am}\, 2w = 1-2k^2x^2+k^2x^4, \\ D_2 = 1-k^2x^4. \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} D_3 \sin\mathrm{am}\, 3w = x[3-4(1+k^2)x^2+6k^2x^4-k^4x^8), \\ D_3 \cos\mathrm{am}\, 3w = (1-4x^2+6k^2x^4-4k^2x^6+k^4x^8]\sqrt{1-x^2}, \\ D_3 \Delta\mathrm{am}\, 3w = [1-4k^2x^2+6k^2x^4-4k^2x^6+k^4x^8]\sqrt{1-k^2x^2} \\ D_3 = 1-6k^2x^4+4k^2(1+k^2)x^6-3k^4x^8. \end{cases}$$

Eine weitere Fortsetzung dieser Formeln ist nicht wohl thunlich, wegen der ungemein raschen Zunahme der Anzahl der Terme. Setzt man allgemein:

$$3)\quad \sin\mathrm{am}\, nw = \frac{A_n}{D_n},\ \cos\mathrm{am}\, nw = \frac{B_n}{D_n},\ \Delta\mathrm{am}\, nw = \frac{C_n}{D_n},$$

so erhält man leicht durch Induction folgende Resultate. Bezeichnet allgemein $P(m)$ ein Polynom von $x$ vom Grade $m$, so finden für ein grades $n$ folgende Gleichungen statt:

$$4)\quad A_n = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,P(n^2-3),\quad B_n = P(n^2),$$
$$C_n = P(n^2),\quad D_n = P(n^2).$$

Für ein ungrades $n$ hat man:

$$5)\quad A_n = P(n^2),\quad B_n = P(n^2-1)\sqrt{1-x^2},$$
$$C_n = P(n^2-1)\sqrt{1-k^2x^2},\quad D_n = P(n^2-1).$$

Es ist selbstverständlich, dass die symbolisch angedeuteten Polynome $P(n^2)$ etc. für die verschiedenen Ausdrücke $A_n$, $B_n$, $C_n$ und $D_n$ verschieden sind. Die Allgemeinheit der Gleichungen 4)

und 5) lässt sich leicht darthun durch Bildung der Ausdrücke für:

$$A_{2n},\ B_{2n},\ C_{2n},\ D_{2n}.$$

$$A_{2n+1},\ B_{2n+1},\ C_{2n+1},\ D_{2n+1}.$$

Setzt man in den Gleichungen 1), 2) und 3) von § 24 $u = v = nw$, bildet also $\sin\mathrm{am}\,2nw$, $\cos\mathrm{am}\,2nw$, $\Delta\,\mathrm{am}\,2nw$, so folgt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 3):

$$\frac{A_{2n}}{D_{2n}} = \frac{2A_nB_nC_nD_n}{D^4{}_n - k^2A^4{}_n},\quad \frac{B_{2n}}{D_{2n}} = \frac{B^2{}_nD^2{}_n - A^2{}_nC^2{}_n}{D^4{}_n - k^2A^4{}_n}$$

$$\frac{C_{2n}}{D_{2n}} = \frac{C^2{}_nD^2{}_n - k^2A^2{}_nB^2{}_n}{D^4{}_n - k^2A^4{}_n},$$

oder:

$$6)\quad \begin{cases} A_{2n} = 2A_nB_nC_nD_n,\ B_{2n} = B_n{}^2D_n{}^2 - A_n{}^2C_n{}^2, \\ C_{2n} = C_n{}^2D_n{}^2 - k^2A_n{}^2B_n{}^2,\ D_{2n} = D_n{}^4 - k^2A_n{}^4. \end{cases}$$

In den Gleichungen 1), 2) und 3) von § 24 nehme man $u = nw$, $v = (n+1)w$, bilde also $\sin\mathrm{am}(2n+1)w$, $\cos\mathrm{am}(2n+1)w$ und $\Delta\,\mathrm{am}(2n+1)w$. Ganz analog wie die Gleichungen 6) findet man unter Zuziehung der Gleichungen 3):

$$7)\quad \begin{cases} A_{2n+1} = A_nB_{n+1}C_{n+1}D_n + A_{n+1}B_nC_nD_{n+1}, \\ B_{2n+1} = B_nB_{n+1}D_nD_{n+1} - A_nA_{n+1}C_nC_{n+1}, \\ C_{2n+1} = C_nC_{n+1}D_nD_{n+1} - k^2A_nA_{n+1}B_nB_{n+1}, \\ D_{2n+1} = D_n^2D_{n+1}^2 - k^2A_n^2A_{n+1}^2. \end{cases}$$

Ist nun $n$ eine ungrade Zahl, so reduciren sich die Gleichungen 6) nach 5) auf:

$$A_{2n} = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\,P(4n^2-3),\ B_{2n} = P(4n^2),$$

$$C_{2n} = P(4n^2),\ D_{2n} = P(4n^2).$$

Diese Gleichungen folgen auch direct aus 4) durch Vertauschung von $n$ mit $2n$. Zu demselben Resultate gelangt man für ein grades $n$.

Nimmt man wieder $n$ ungrade, so geben die Gleichungen 7) unter Zuziehung der Gleichungen 4) und 5):

$$A_{2n+1} = P[(2n+1)^2],\ B_{2n+1} = P(4n^2+4n)\sqrt{1-x^2},$$

$$C_{2n+1} = P(4n^2+4n)\sqrt{1-k^2x^2},\ D_{2n+1} = P(4n^2+4n).$$

Diese Gleichungen folgen direct aus 5) durch Vertauschung von $n$ mit $2n$. Zu demselben Resultate führt die Annahme für ein grades $n$,

Finden also die Gleichungen 4) und 5) für eine Zahl $n$ statt, so bleiben dieselben allgemein gültig. Ist nämlich $n = 2m$, so gelten die Gleichungen für $2n = 4m$ und $2n + 1 = 4m + 1$, ist $n = 2m + 1$, so ist die Gültigkeit für $2n = 4m + 2$ und $2n + 1 = 4m + 3$ nachgewiesen. Wegen 1) und 2) gelten die Gleichungen 3) und 4) für $n = 2$ und $n = 3$, also auch für 4, 5, 6 und 7. Durch wiederholte Anwendung ergiebt sich auf diese Art die Allgemeinheit der Gleichungen 4) und 5). Der vorstehende Beweis findet sich bei *Sohnke* (Allgemeine Encyclopaedie. Erste Section. Theil 40. Artikel *Elliptische Functionen*).

Geht man von den Additionsgleichungen der elliptischen Functionen aus, so kann man $\sin\mathrm{am} nu$ als besondern Fall von $\sin\mathrm{am}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)$ für $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = u$ auffassen, dasselbe gilt auch für $\cos\mathrm{am} nu$ und $\Delta\mathrm{am} nu$. Untersuchungen über eine derartige Erweiterung der Additionsgleichungen von zwei Argumenten auf eine beliebige Anzahl von Argumenten finden sich bei *Cayley*: „Note sur l'addition des fonctions elliptiques“ (Crelle. Journal t. 41 p. 57—65).

Um die Ausdrücke für $\sin\mathrm{am} nu$, $\cos\mathrm{am} nu$ und $\Delta\mathrm{am} nu$ allgemein darstellen zu können, oder, was dasselbe ist, um $y$ als algebraische Function von $x$ auszudrücken, wenn:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{ndx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

reicht die blosse Anwendung des Additionstheorems von *Euler* nicht aus. Die vollständige Lösung des Problems lässt sich nur ermöglichen durch Einführung elliptischer Functionen, mit besonderer Rücksicht auf das Princip der doppelten Periodicität. Sehr bezeichnend für das Problem sind die folgenden Worte von *Lejeune-Dirichlet* aus seiner Gedächtnissrede auf *Carl, Gustav, Jacob Jacobi* (Crelle. Journal. t. 52 p. 199):

„Die Theorie, wie *Abel* und *Jacobi* sie vorfanden, bot mehrere höchst räthselhafte Erscheinungen dar, zu deren Aufklärung die damals bekannten Principien nicht ausreichten. So hatte man,

um nur einer dieser Erscheinungen zu erwähnen, gefunden, dass der Grad der mit Hülfe des Euler'schen Satzes gebildeten Gleichung, von deren Lösung die Theilung des elliptischen Integrals abhängt, nicht wie in der analogen Frage der Kreistheilung, der Anzahl der Theile, sondern dem Quadrate dieser Anzahl gleich ist. Die Bedeutung der reellen Wurzeln war leicht ersichtlich, wogegen die zahlreichern imaginären ganz unerklärlich erscheinen mussten. Aber, dass hier ein Geheimniss verborgen liege, darüber hatte man vor *Abel* und *Jacobi* kein Bewusstsein; und ihnen war es vorbehalten, sich zuerst über diese und ähnliche Erscheinungen zu wundern; was in der Mathematik, wie in anderen Gebieten, oft schon eine halbe Entdeckung ist."

Die Multiplication der elliptischen Functionen hat *Abel* zuerst in seinen „Recherches sur les fonctions elliptiques" (Crelle. Journ. t. 2 p. 114—125 u. 146—154, Oeuvr. t. 1 p. 154—165 u. 186—194) behandelt. Die Untersuchungen von *Jacobi* über diesen Gegenstand enthalten eine sehr schöne und feine Bemerkung, dass nämlich die Multiplication der elliptischen Functionen sich durch Transformationen bewerkstelligen lässt. Auf p. 60 der „Fundamenta" findet sich folgendes Theorem:

„Itaque post transformationem primam abhibita secunda seu post secundam abhibita prima, Modulus $k$ in se redit, seu transformationes prima et secunda successive adhibitae, utro ordine placet, Multiplicationem praebent".

Zur Vereinfachung sei $n$ in $\sin\mathrm{am} nu$ eine ungrade Primzahl, auf diesen einfachsten Fall lassen sich alle andern reduciren, in Verbindung, wenn nöthig, mit den leicht zu bildenden Ausdrücken für $\sin\mathrm{am}\, 2u$, $\cos\mathrm{am}\, 2u$ und $\Delta\mathrm{am}\, 2u$.

In den Gleichungen 19) von § 38 setze man $t = 0$ und $-m'$ statt $r$. Ist zur Abkürzung:

$$8)\quad \varphi(q) = \prod_{s=1}^{s=\infty} (1-q^{2s}),$$

so geben die bemerkten Gleichungen:

9)
$$\begin{cases} \varphi(q)^n\,\vartheta(x, q^{\frac{1}{n}}) = \varphi(q^{\frac{1}{n}}) \prod_{m'=-\frac{n-1}{2}}^{m'=\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x+\frac{m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^n\,\vartheta_3(x, q^{\frac{1}{n}}) = \varphi(q^{\frac{1}{n}}) \prod \vartheta_3\left(x+\frac{m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^n\,\vartheta_1(x, q^{\frac{1}{n}}) = \varphi(q^{\frac{1}{n}}) \prod \vartheta_1\left(x+\frac{m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^n\,\vartheta_2(x, q^{\frac{1}{n}}) = \varphi(q^{\frac{1}{n}}) \prod \vartheta_2\left(x+\frac{m' i\log q}{n}\right). \end{cases}$$

In Folge der Gleichung 6) von § 37 ist:

$$\varphi(q)^n\,\vartheta(nx, q^n) = \varphi(q^n) \prod_{m=-\frac{n-1}{2}}^{m=\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(x+\frac{m\pi}{n}\right),$$

oder $q^{\frac{1}{n}}$ statt $q$ gesetzt:

10)
$$\varphi(q^{\frac{1}{n}})^n\,\vartheta(nx, q) = \varphi(q) \prod_{m=-\frac{n-1}{2}}^{m=\frac{n-1}{2}} \vartheta(x+\frac{m\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}).$$

In der ersten Gleichung 9) werde $x+\frac{m\pi}{n}$ statt $x$ gesetzt; legt man darauf $m$ alle ganzzahligen Werthe von $-\frac{n-1}{2}$ bis $\frac{n-1}{2}$ bei, bildet das Product sämmmtlicher Gleichungen, so folgt:

$$\varphi(q)^{n^2} \prod \vartheta(x+\frac{m\pi}{n}, q^{\frac{1}{n}}) = \varphi(q^{\frac{1}{n}})^n \prod\prod \vartheta\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right),$$

d. i. nach 10):

$$\varphi(q)^{n^2-1}\,\vartheta(nx) = \prod\prod \vartheta\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right).$$

Auf ähnliche Art erhält man aus den Gleichungen 9):

11)
$$\begin{cases} \varphi(q)^{n^2-1}\,\vartheta(nx) = \prod\prod \vartheta\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^{n^2-1}\,\vartheta_1(nx) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod\prod \vartheta_1\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^{n^2-1}\,\vartheta_2(nx) = \prod\prod \vartheta_2\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right), \\ \varphi(q)^{n^2-1}\,\vartheta_3(nx) = \prod\prod \vartheta_3\left(x+\frac{m\pi+m' i\log q}{n}\right). \end{cases}$$

Wird zur Vereinfachung $\frac{2Kx}{\pi} = u$ gesetzt, so geben die drei letzten Gleichungen 11) durch die erste dividirt:

$$12)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am} nu = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \sin\mathrm{am}\left(u + 2\frac{mK - m'iK'}{n}\right), \\ \cos\mathrm{am} nu = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \cos\mathrm{am}\left(u + 2\frac{mK - m'iK'}{n}\right), \\ \Delta\mathrm{am} nu = \frac{1}{k'^{\frac{n^2-1}{2}}} \prod \Delta\mathrm{am}\left(u + 2\frac{mK - m'iK}{n}\right). \end{cases}$$

Um die rechten Seiten passend zu transformiren hat man ähnlich wie bei den Transformationsgleichungen in § 37 und § 39 zu verfahren, nämlich die factoriellen Elemente $m$ und $m'$ auf die Gränzen 1 und $\frac{n-1}{2}$ zu reduciren, durch Trennung der negativen und positiven Werthe.

Da $n$ ungrade, so sind $n-1$ und $\frac{(n-1)^2}{2}$ grade Zahlen. Die erste Gleichung 12), auf die angegebene Weise umgeformt, wird:

$$13)\quad \sin\mathrm{am} nu =$$

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \sin\mathrm{am} u \prod \sin\mathrm{am}\left(\frac{2mK}{n} + u\right) \sin\mathrm{am}\left(\frac{2mK}{n} - u\right) \times$$

$$\prod \sin\mathrm{am}\left(\frac{2m'iK'}{n} + u\right) \sin\mathrm{am}\left(\frac{2m'iK'}{n} - u\right) \times$$

$$\prod\prod \sin\mathrm{am}\left(2\frac{mK + m'iK'}{n} + u\right) \sin\mathrm{am}\left(2\frac{mK + m'iK'}{n} - u\right) \times$$

$$\prod\prod \sin\mathrm{am}\left(2\frac{mK - m'iK'}{n} + u\right) \sin\mathrm{am}\left(2\frac{mK - m'iK'}{n} - u\right).$$

In den beiden einfachen und den beiden Doppelproducten nehmen $m$ und $m'$ unabhängig von einander die ganzzahligen Werthe von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ an. Die Gleichung 13) nach $u$ differentiirt, darauf $u = 0$ gesetzt, führt auf die Relation:

$$14)\quad n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \sin^2\mathrm{am}\frac{2mK}{n} \prod \sin^2\mathrm{am}\frac{2m'iK'}{n} \times$$

$$\prod\prod \sin^2\mathrm{am} 2\frac{mK + m'iK'}{n} \sin^2\mathrm{am} 2\frac{mK - m'iK'}{n}.$$

Die Gleichung 13) werde mittelst der Gleichung 7) in § 24 transformirt. Mit Rücksicht auf die Gleichung 14) lässt sich dann $\sin \operatorname{am} nu$ auf folgende Art als rationale, gebrochene Function von $\sin \operatorname{am} u$ darstellen:

$$15)\quad \sin \operatorname{am} nu =$$

$$n \sin \operatorname{am} u \prod \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2mK}{n}}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2mK}{n} \sin^2 \operatorname{am} u} \times$$

$$\prod \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2m' iK'}{n}}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2m' iK'}{n} \sin^2 \operatorname{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} 2\dfrac{mK + m' iK'}{n}}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\dfrac{mK + m' iK'}{n} \sin^2 \operatorname{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1 - \dfrac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} 2\dfrac{mK - m' iK'}{n}}}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} 2\dfrac{mK - m' iK'}{n} \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

Die beiden letzten Gleichungen 12) geben nach einigen leichten Umformungen $u = 0$ gesetzt:

$$16)\quad 1 = \left(\frac{k}{k'}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} \prod \cos^2 \operatorname{am} \frac{2mK}{n} \prod \cos^2 \operatorname{am} \frac{2m' iK'}{n} \times$$

$$\prod\prod \cos^2 \operatorname{am} 2\frac{mK + m' iK'}{n} \cos^2 \operatorname{am} 2\frac{mK - m' iK'}{n}.$$

$$17)\quad k'^{\frac{n^2-1}{2}} = \prod \Delta^2 \operatorname{am} \frac{2mK}{n} \prod \Delta^2 \operatorname{am} 2\frac{2m' iK'}{n} \times$$

$$\prod\prod \Delta^2 \operatorname{am} 2\frac{mK + m' iK'}{n} \Delta^2 \operatorname{am} 2\frac{mK - m' iK'}{n}.$$

Unter Zuziehung der Gleichungen 8) und 9) von § 24, sowie der vorstehenden Gleichungen 16) und 17), ergeben sich aus 12) für $\cos\mathrm{am} nu$ und $\Delta\mathrm{am} nu$ die folgenden Gleichungen:

$$18)\quad \cos\mathrm{am} nu =$$

$$\cos\mathrm{am} u \prod \frac{1-\frac{\sin^2\mathrm{am} u}{\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{2mK}{n}}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2mK}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod \frac{1-\frac{\sin^2\mathrm{am} u}{\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{2m'iK'}{n}}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1-\frac{\sin^2\mathrm{am} u}{\sin^2\mathrm{coam}\,2\frac{mK+m'iK'}{n}}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\frac{mK+m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1-\frac{\sin^2\mathrm{am} u}{\sin^2\mathrm{coam}\,2\frac{mK-m'iK'}{n}}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\frac{mK-m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u}.$$

$$19)\quad \Delta\mathrm{am} nu =$$

$$\Delta\mathrm{am} u \prod \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{2mK}{n}\sin^2\mathrm{am} u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2mK}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{2m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{coam}\,2\frac{mK+m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\frac{mK+m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u} \times$$

$$\prod\prod \frac{1-k^2\sin^2\mathrm{coam}\,2\frac{mK-m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,2\frac{mK-m'iK'}{n}\sin^2\mathrm{am} u}.$$

Die rechten Seiten der Gleichungen 15), 18) und 19) lassen sich auch in Form von Summen darstellen, durch Anwendung des obigen Theorems von *Jacobi* auf die Resultate von § 37 und § 39. In den Gleichungen 44) von § 37 setze man für $M$ seinen Werth aus 19) nämlich:

$$\frac{1}{M} = \frac{nL}{K}.$$

Die bemerkten Gleichungen werden dann:

$$20)\quad \begin{cases} \dfrac{nlL}{kK}\operatorname{sin\,am}\left[\dfrac{nuL}{K}, l\right] = \displaystyle\sum_{m=0}^{m=n-1} \operatorname{sin\,am}\left[u+\frac{4mK}{n}, k\right], \\ \dfrac{nlL}{kK}\operatorname{cos\,am}\left[\dfrac{nuL}{K}, l\right] = \displaystyle\sum \operatorname{cos\,am}\left[u+\frac{4mK}{n}, k\right], \\ \dfrac{nL}{K}\Delta\operatorname{am}\left[\dfrac{nuL}{K}, l\right] = \displaystyle\sum \Delta\operatorname{am}\left[u+\frac{4mK}{n}, k\right]. \end{cases}$$

Es sind $l$ und $L$ die entsprechenden Werthe von $k$ und $K$, wenn $q^n$ an Stelle von $q$ tritt.

Wird $q$ durch $q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt, so mögen $k$ und $K$ respective in $\lambda$ und $\Lambda$ übergehn. In den Gleichungen 20) und 21) von § 39 setze man aus 11) für $M$ seinen Werth ein, ferner $\omega = iK'$ und $r = m'$. Werden darauf $l$ und $L$ respective durch $\lambda$ und $\Lambda$ ersetzt, so lassen sich die bemerkten Gleichungen auf folgende Art darstellen:

$$21)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda\Lambda}{kK}\operatorname{sin\,am}\left[\dfrac{u\Lambda}{K}, \lambda\right] = \displaystyle\sum_{m'=0}^{m'=n-1} \operatorname{sin\,am}\left[u+\frac{4m'iK'}{n}, k\right], \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\lambda\Lambda}{kK}\operatorname{cos\,am}\left[\dfrac{u\Lambda}{K}, \lambda\right] = \displaystyle\sum \operatorname{cos\,am}\left[u+\frac{4m'iK'}{n}, k\right], \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\dfrac{\Lambda}{K}\Delta\operatorname{am}\left[\dfrac{u\Lambda}{K}, \lambda\right] = \displaystyle\sum \Delta\operatorname{am}\left[u+\frac{4m'iK'}{n}, k\right]. \end{cases}$$

In den Gleichungen 20) werde $q$ mit $q^{\frac{1}{n}}$ vertauscht, wodurch $k$, $K$, $l$, $L$ respective übergehn in $\lambda$, $\Lambda$, $k$, $K$. Nimmt man noch $\frac{u\Lambda}{K}$ statt $u$, so erhält man:

$$22)\quad \begin{cases} \dfrac{nkK}{\lambda\Delta}\,\mathrm{sn\,am}(nu,k) = \sum\limits_{m=0}^{m=n-1} \mathrm{sn\,am}\left[\left(u+\dfrac{4mK'}{n}\right)\dfrac{\Delta}{K},\lambda\right], \\ \dfrac{nkK}{\lambda\Delta}\,\mathrm{cn\,am}(nu,k) = \sum \mathrm{cn\,am}\left[\left(u+\dfrac{4mK'}{n}\right)\dfrac{\Delta}{K},\lambda\right], \\ \dfrac{nK}{\Delta}\,\Delta\mathrm{am}(nu,k) = \sum \Delta\mathrm{am}\left[\left(u+\dfrac{4mK'}{n}\right)\dfrac{\Delta}{K},\lambda\right]. \end{cases}$$

Auf die rechten Seiten der vorstehenden Gleichungen lassen sich die Gleichungen 21) anwenden, wenn in denselben $u+\frac{4mK}{n}$ an Stelle von $u$ gesetzt wird. Da auf beiden Seiten derselbe Modul $k$ vorkommt, so erhält man mit Weglassung desselben:

$$23)\quad \begin{cases} n\,\mathrm{sn\,am}nu = \sum\limits_{m=0}^{m=n-1}\sum\limits_{m'=0}^{m'=n-1} \mathrm{sn\,am}\left[u+4\dfrac{mK+m'iK'}{n}\right], \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n\,\mathrm{cn\,am}nu = \sum\sum \mathrm{cn\,am}\left[u+4\dfrac{mK+m'iK'}{n}\right], \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,n\,\Delta\mathrm{am}nu = \sum\sum \Delta\,\mathrm{am}\left[u+4\dfrac{mK+m'iK'}{n}\right]. \end{cases}$$

Auf p. 62 und 63 der „Fundamenta“ hat *Jacobi* ähnliche Gleichungen gegeben wie die Gleichungen 22). Die für einige Zwecke sehr brauchbaren Gleichungen 23) hat *Abel* aufgestellt. (Crelle. Journ. t. 2 p. 149, Oeuv. t. 1 p. 189).

Wegen $\mathrm{sn\,am}(v-4K) = \mathrm{sn\,am}v$, $\mathrm{sn\,am}(v-4iK') = \mathrm{sn\,am}v$, ist:

$$\sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{m=n-1} \mathrm{sn\,am}\left[v+\frac{4mK}{n}\right] = \sum_{m=\frac{n+1}{2}}^{m=n-1} \mathrm{sn\,am}\left[v-4\frac{n-m}{n}K\right] = \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{sn\,am}\left[v-\frac{4mK}{n}\right].$$

Mit Hülfe dieser Gleichung folgt:

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \mathrm{sn\,am}\left[v+\frac{4mK}{n}\right] =$$

$$\mathrm{sn\,am}v + \sum_{m=1}^{m=\frac{n-1}{2}} \left[\mathrm{sn\,am}\left(v+\frac{4mK}{n}\right)+\mathrm{sn\,am}\left(v-\frac{4mK}{n}\right)\right].$$

Nimmt man hierin $v = u + \frac{4m'K'i}{n}$, wendet auf das summirende Element $m'$, wenn $m'$ die Werthe 0, 1, 2, .. $n-1$ annimmt, dieselbe Transformation wie für $m$ an, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit, dass die erste Gleichung 23) auf folgende Form gebracht werden kann:

$$24) \quad n \sin\mathrm{am}\, nu = \sin\mathrm{am}\, u$$
$$+ \sum \left[ \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4mK}{n}\right) + \sin\mathrm{am}\left(u - \frac{4mK}{n}\right)\right]$$
$$+ \sum \left[ \sin\mathrm{am}\left(u + \frac{4m'iK'}{n}\right) + \sin\mathrm{am}\left(u - \frac{4m'iK'}{n}\right)\right]$$
$$+ \sum\sum \left[ \sin\mathrm{am}\left(u + 4\frac{mK + m'iK'}{n}\right) + \sin\mathrm{am}\left(u - 4\frac{mK + m'iK'}{n}\right)\right]$$
$$+ \sum\sum \left[ \sin\mathrm{am}\left(u + 4\frac{mK - m'iK'}{n}\right) + \sin\mathrm{am}\left(u - 4\frac{mK - m'iK'}{n}\right)\right].$$

In dieser Gleichung nehmen $m$ und $m'$, unabhängig von einander, alle ganzzahligen Werthe von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ an. Die rechte Seite lässt sich als rationale Function von $\sin\mathrm{am}\, u$ wie folgt schreiben:

$$25) \quad n \sin\mathrm{am}\, nu =$$
$$\sin\mathrm{am}\, u + 2\sum \frac{\sin\mathrm{am}\, u \cos\mathrm{am}\frac{4mK}{n} \Delta\mathrm{am}\frac{4mK}{n}}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, u \sin^2\mathrm{am}\frac{4mK}{n}}$$
$$+ 2\sum \frac{\sin\mathrm{am}\, u \cos\mathrm{am}\frac{4m'iK'}{n} \Delta\mathrm{am}\frac{4m'iK'}{n}}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, u \sin^2\mathrm{am}\frac{4m'iK'}{n}}$$
$$+ 2\sum\sum \frac{\sin\mathrm{am}\, u \cos\mathrm{am}\, 4\frac{mK + m'iK'}{n} \Delta\mathrm{am}\, 4\frac{mK + m'iK'}{n}}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, u \sin^2\mathrm{am}\, 4\frac{mK + m'iK'}{n}}$$
$$+ 2\sum\sum \frac{\sin\mathrm{am}\, u \cos\mathrm{am}\, 4\frac{mK - m'iK'}{n} \Delta\mathrm{am}\, 4\frac{mK - m'iK'}{n}}{1 - k^2 \sin^2\mathrm{am}\, u \sin^2\mathrm{am}\, 4\frac{mK + m'iK'}{n}}.$$

Die beiden Werthe von $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n.\cos\mathrm{am}nu$ und $(-1)^{\frac{n-1}{2}} n \times \Delta\mathrm{am}nu$ aus 23) lassen sich ähnlich wie $n\sin\mathrm{am}nu$ in 24) und 25) darstellen. Setzt man in der Gleichung 25) $u+K$ statt $u$, so geht $n\sin\mathrm{am}nu$ über in:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n\cos\mathrm{am}nu}{\Delta\mathrm{am}nu} = \frac{1}{2k} \frac{d\log\frac{1+(-1)^{\frac{n-1}{2}} k\sin\mathrm{am}nu}{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}} k\sin\mathrm{am}nu}}{du}.$$

Es lassen sich so beide Seiten der neuen Gleichung als Differentialquotienten nach $u$ von Logarithmen darstellen, durch deren Integration:

$$\sqrt{\frac{1+(-1)^{\frac{n-1}{2}} k\sin\mathrm{am}nu}{1-(-1)^{\frac{n-1}{2}} k\sin\mathrm{am}nu}}$$

in Function von $\sin\mathrm{am}u$ folgt. Da der resultirende Ausdruck etwas weitläufig ist, seine Darstellung weitere Schwierigkeiten nicht darbietet, so soll eine Ausführung desselben unterbleiben. Es ergeben sich weitere integrabele Ausdrücke, wenn in jeder der Gleichungen 23) $u$ durch $u+K$ oder $u+iK'$ ersetzt wird.

Combinirt man die Gleichungen 1) mit den Gleichungen 15), 18) und 19), oder den Gleichungen 23), so lassen sich allgemeine Relationen für $\sin\mathrm{am}nu$, $\cos\mathrm{am}nu$ und $\Delta\mathrm{am}nu$ aufstellen, in denen $n$ eine beliebige Zahl bedeutet.

Das Problem der Multiplication involvirt naturgemäss das umgekehrte Problem der Division, d. h. $\sin\mathrm{am}u$ algebraisch durch $\sin\mathrm{am}nu$ auszudrücken. Die Untersuchung kommt auf die Lösung der Gleichung 15) hinaus, welche in Beziehung auf $\sin\mathrm{am}u$ vom Grade $n^2$ ist. Für den Fall, dass $n = 2$, giebt die erste Gleichung 1):

$$26) \quad (1-k^2x^4)\sin\mathrm{am}2w = 2x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

wo $x = \sin\mathrm{am}w$. Da nun $\sin\mathrm{am}2w = \sin\mathrm{am}(2K-2w) = \sin\mathrm{am}(2iK'+2w) = \sin\mathrm{am}(2iK'+2K-2w)$, so folgt, dass in:

$$\sin\mathrm{am}2w = \frac{2x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^4}$$

die linke Seite ungeändert bleibt, wenn $w$ durch $K-w$, $iK'+w$, $iK'+K-w$ ersetzt wird. Sind also $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ Werthe von $x$, welche der Gleichung 26) genügen, so hat man:

$$x_1 = \sin\mathrm{am}\, w,$$

$$x_2 = \sin\mathrm{am}(K-w) = \frac{\cos\mathrm{am}\, w}{\Delta\mathrm{am}\, w},$$

$$x_3 = \sin\mathrm{am}(iK'+w) = \frac{1}{k\sin\mathrm{am}\, w},$$

$$x_4 = \sin\mathrm{am}(iK'+K-w) = \frac{\Delta\mathrm{am}\, w}{k\cos\mathrm{am}\, w}.$$

Setzt man $y = \sin\mathrm{am}\, 2w$, so findet man:

$$x_1 = \sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{am}\, 2w}{1+\Delta\mathrm{am}\, 2w}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-k^2y^2}}},$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1+\cos\mathrm{am}\, 2w}{1+\Delta\mathrm{am}\, 2w}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-k^2y^2}}},$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{1+\cos\mathrm{am}\, 2w}{1-\Delta\mathrm{am}\, 2w}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-k^2y^2}}},$$

$$x_4 = \sqrt{\frac{1-\cos\mathrm{am}\, 2w}{1-\Delta\mathrm{am}\, 2w}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-k^2y^2}}}.$$

Zu ähnlichen Betrachtungen giebt die Gleichung 15) Veranlassung. Ist $\sin\mathrm{am}\, nv = \sin\mathrm{am}\, nu$, so hat man allgemein:

$$nv = nu + 4mK + 2m'iK',$$

oder:

$$v = u + \frac{4mK + 2m'iK'}{n},$$

wo $m$ und $m'$ ganze Zahlen sind. Die linke Seite der Gleichung 15) bleibt ungeändert, wenn $u$ durch $u + \frac{4mK + 2m'iK'}{n}$ ersetzt wird. Ist also $\sin\mathrm{am}\, nu$ gegeben, setzt man $x$ statt $\sin\mathrm{am}\, u$, so sind die verschiedenen Werthe von $x$ in der Gleichung enthalten:

$$27) \quad x = \sin\mathrm{am}\left[u + \frac{4mK + 2m'iK'}{n}\right].$$

Legt man $m$ und $m'$ alle ganzzahligen Werthe bei, so kann die rechte Seite der Gleichung 27) nur $n^2$ Werthe annehmen, welchen die $n^2$ Werthe von $x$ entsprechen. Was die algebraische

Lösung der Gleichung 15) in Beziehung auf $\sin\mathrm{am} u$ betrifft, so würde eine Ausführung dieses Gegenstandes zu weit führen. Die ersten und einfachsten Untersuchungen über die Theilung der elliptischen Functionen hat *Abel* in seinen „Recherches sur les fonctions elliptiques" gegeben (Crelle. Journ. t. 2 p. 125—146, Oeuvr. t. 1 p. 165—186). Das Resultat, zu welchem *Abel* unter Nr. 20 seines Aufsatzes gelangt, besteht darin, dass sich $\sin\mathrm{am} u$ ausdrücken lässt durch $\sin\mathrm{am} nu$, $\sin\mathrm{am}\frac{2K}{n}$ und $\sin\mathrm{am}\frac{2iK'}{n}$. Die Bestimmung dieser letzten Ausdrücke ist aber abhängig von einer Gleichung vom Grade $n+1$ und $n+1$ Gleichungen vom Grade $\frac{n-1}{2}$. Die $n+1$ Gleichungen vom Grade $\frac{n-1}{2}$ lassen sich algebraisch lösen, mit Hülfe eines Verfahrens, welches dem analog ist, dessen sich *Gauss* zur Lösung der Gleichung $\Theta^n - 1 = 0$ bedient hat. Die Gleichung vom Grade $n+1$, von welcher schliesslich das Problem der Theilung abhängt, ist aber nicht allgemein algebraisch lösbar, ein Umstand, welcher sich wohl voraussehn liess. Für den besonderen Fall, dass der Modul $k$ bestimmt ist durch $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hat *Abel* in § VIII seiner „Recherches" (Crelle. J. t. 3 p. 160—168, Oeuvr. t. 1 p. 221—229) eine Untersuchung durchgeführt, von welcher *Gauss* (man vergleiche p. 5) eine kurze Andeutung gegeben hatte. *Abel* findet, dass für den bemerkten Modul $\sin\mathrm{am}\frac{2mK}{n}$ sich durch Quadratwurzeln ausdrücken lässt, wenn $n$ eine Potenz von 2, oder eine Primzahl von der Form $2^\mu + 1$ ist. Bei dieser Gelegenheit wendet *Abel* ein neues und sehr merkwürdiges Verfahren zur Multiplication und Division der elliptischen Functionen an, für den Fall, dass $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Lässt sich eine Zahl $g$, wie dieses bei den Primzahlen von der Form $4h+1$ der Fall ist, als Summe zweier Quadrate darstellen, so dass $g = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)$, so lässt sich $\sin\mathrm{am} gu$ auf folgende Art darstellen. Man bilde zuerst $\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta i)w$ und setze darauf $w = (\alpha-\beta i)u$. Für die Theilung bilde man $\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta i)w$, nehme dann $w = \frac{2mK}{\alpha+\beta i}$, wodurch

sich eine Gleichung für $\sin\mathrm{am}\frac{2mK}{\alpha+\beta i}$ ergiebt. Lässt sich diese Quantität bestimmen, so erhält man unmittelbar durch Vertauschung von $i$ mit $-i$ den Werth von $\sin\mathrm{am}\frac{2mK}{\alpha-\beta i}$. Die Combination beider Werthe giebt:

$$\sin\mathrm{am}\left[\frac{2mK}{\alpha+\beta i}+\frac{2mK}{\alpha-\beta i}\right]=\sin\mathrm{am}\frac{4m\alpha K}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Um den Werth von:

$$\sin\mathrm{am}\frac{2pK}{\alpha^2+\beta^2}$$

zu bestimmen, nehme man $p=2m\alpha-(\alpha^2+\beta^2)t$. Diese Gleichung ist in Beziehung auf $m$ und $t$ immer lösbar, wenn $\alpha^2+\beta^2$ eine Primzahl ist, da dann $2\alpha$ und $\alpha^2+\beta^2$ keine gemeinschaftlichen Factoren haben.

Im „Précis d'une théorie des fonctions elliptiques" hat *Abel* im Chap. I § 4 und Chap. IV § 9 und § 10 sowohl die Multiplication, wie die Division der elliptischen Functionen in etwas anderer Art, wie in dem vorhin erwähnten Aufsatze behandelt (Crelle. J. t. 4 p. 256—260 u. 337 f. Oeuv. t. 1 p. 346—350 u. 396—402).

Werden in der Gleichung 15) Zähler und Nenner nach Potenzen von $\sin\mathrm{am}u$ entwickelt, so hat *Jacobi* ein Verfahren angekündigt die Factoren dieser Potenzen in Functionen von $k$ darzustellen. (Crelle. Journ. t. 3 p. 403—405). In der kurzen, sehr bemerkenswerthen Abhandlung „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" (Crelle. J. t. 4 p. 185—193) hat *Jacobi*, angeregt durch die Untersuchungen von *Abel*, die Lösung der Probleme gegeben $\sin\mathrm{am}u$ durch $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},l\right)$ und $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},l\right)$ durch $\sin\mathrm{am}nu$ auszudrükken, wo $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},l\right)$ sich auf die in § 37 und § 39 behandelten Transformationen bezieht. *Jacobi* scheint seinen Resultaten mit Recht einen hohen Werth beigelegt zu haben, wie man aus den Worten von *Lejeune-Dirichlet* folgern muss:

„Als *Jacobi* das Resultat dieser Arbeit in einer kurzen Notiz bekannt machte, hoffte er *Abel* durch die Vervollkommnung des

Theilproblems in Verwunderung zu setzen; aber diese Hoffnung blieb unerfüllt. — *Abel* war eben gestorben, kaum 27 Jahre alt, weniger als zwei Jahre nach der Bekanntmachung seiner ersten Arbeiten über die elliptischen Functionen."

Die von *Abel* und *Jacobi* (Crelle. J. t. 3 p. 181 u. 195) bemerkte complexe Multiplication, in Verbindung mit der Theilung des Umfangs der Lemniscate, haben zu einer Reihe von Untersuchungen Veranlassung gegeben, von welchen die folgenden angeführt werden mögen.

*Liouville*: Sur la division du périmètre de la lemniscate, le diviseur étant un nombre entier, réel ou complexe quelconque. (Comptes Rendus 1843 t. XVII p. 635).

*Clausen*: Die Construction des Siebenzehnecks der Lemniscata. (Astron. Nachr. 1842 t. 19 p. 243).

*Eisenstein*: Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln (Crelle. Journ. t. 30 p. 185—210).

Weitere Untersuchungen, im Anschluss an den vorhergehenden Aufsatz, finden sich bei:

*Eisenstein*: Ueber die Irreductibilität und einige andere Eigenschaften der Gleichung, von welcher die Theilung der ganzen Lemniscate abhängt (Crelle. Journ. t. 39 p. 160—179, 224—274, 275—287).

*Kronecker*: Ueber die elliptischen Functionen, für welche complexe Multiplication stattfindet. (Monatsberichte d. Academie d. Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1857 p. 456—460, Journal de Mathém. 2e série t. 3 p. 265—270).

*Kronecker*: Ueber die complexe Multiplication der elliptischen Functionen. (Monatsb. A. d. J. 1862 p. 363—372).

Die bemerkten Abhandlungen von *Eisenstein* und *Kronecker* enthalten sehr tiefe zahlentheoretische Betrachtungen, ihrem Inhalte nach muss die Zahlentheorie gegenüber dem ursprünglich behandelten Gegenstand in den Vordergrund treten.

An die Notiz von *Clausen* schliessen sich, ihrem Inhalte nach, folgende Abhandlungen an:*)

*Wichert:* Die Fünf- u. Siebzentheilung der Lemniscate. Conitz 1846 (Programm d. Gymnnsii).

*Hoffmann*: Multiplications-Formeln für die elliptischen Functionen mit complexen Vielfachen des Arguments und dem Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (Crelle. Journ. t. 48 p. 332—347).

*Kiepert*: Siebzehntheilung des Lemniscatenumfangs durch alleinige Anwendung von Lineal und Cirkel (Borchardt. Journ. t. 75 p. 255—263, p. 348).

*Kiepert*: Ueber eine geometrische Anwendung der complexen Multiplication der elliptischen Functionen (Borchardt Journ. t. 74 p. 305—314).

Die letzte Abhandlung bezieht sich auf die Theilung des Bogens der Curve bestimmt durch die Polargleichung $r^3 = \cos 3\varphi$.

---

*) Die Untersuchungen über die Theilung der Lemniscate basiren sämmtlich auf den Arbeiten von *Abel*. Die älteste Bemerkung über diesen Gegenstand enthalten die „Disquisitiones arithmeticae" vom Jahr 1801 (*Gauss* Werke t. 1. p. 412).

„Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt, e. g. ad eas, quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ pendent; praetereaque etiam ad varia congruentiarum genera: sed quoniam de illis functionibus transcendentibus amplum opus peculiare paramus, de congruentiis autem in continuatione disquisitionum arithmeticarum copiose tractabitur, hoc loco solas functiones circulares considerare visum est."

Der dritte Band der Werke von *Gauss* enthält nur Bruchstücke (p. 170 u. f.), welche zur Erläuteruug des vorstehenden Satzes dienen können. Es scheint, dass andere Arbeiten den grossen Mathematiker gehindert haben, das „amplum opus" auszuführen. Der Herausgeber des Nachlasses, *Schering*, hat schon den relativ geringen Umfang der Arbeiten über die Theilung des Lemniscatenbogens hervorgehoben (*Gauss* W. t. 3. p. 496).

Ueber die hinterlassenen Arbeiten von *Gauss* vergleiche man:

*Schering:* Ueber den III. Band von Gauss Werken (Mathematische Annalen B. I. p. 139—140).

*Göring:* Untersuchungen über die Theilwerthe der Jacobi'schen Thetafunctionen und die im Gauss'schen Nachlasse mitgetheilten Beziehungen derselben (Mathematische Annalen Bd. 7. p. 311—386).

Algebraische Untersuchungen über die Multiplication der elliptischen Functionen, unter Zuziehung des Algorithmen der Determinanten, enthalten folgende Abhandlungen:

*Brioschi*: Sur quelques formules pour la multiplication des fonctions elliptiques (Comptes Rendus 1864 t. LIX. p. 999 — 1004).

*Kiepert*: Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen (Borchardt J. t. 76 p. 21 — 33).

*Kiepert*: Auflösung der Transformationsgleichungen und Division der elliptischen Functionen (ibid. p. 34 — 44).

Ausser diesen angeführten besondern Abhandlungen, von denen eine vollständige Zusammenstellung dem Zwecke dieser kurzen Notiz nicht entsprechen würde, ist das Problem der Multiplication in Verbindung mit der Transformation in speciellen Schriften behandelt, von denen die folgenden hier angemerkt sein mögen.

*Betti*: La teorica delle funzioni ellitiche (Annali di Matematica. Roma 1861. Tomo IV. p. 29 f.).

*Mansion*: Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. Gand 1870.

*Königsberger*: Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Leipzig 1868.

*Königsberger*: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Zweiter Theil. Leipzig 1874.

Namentlich das erstgenannte, ausgezeichnete Werk von *Königsberger* enthält die vollständigste Zusammenstellung, nebst eigenen Untersuchungen, der auf dem Titel bemerkten Gegenstände und bildet in Folge davon eine sehr hervorragende Leistung auf dem Gebiete der elliptischen Functionen.

Es liessen sich bei dieser Gelegenheit noch mehrere geometrische Abhandlungen anführen, bei welchen Multiplicationen und Divisionen elliptischer Integrale und elliptischer Functionen vorkommen. Hierbei scheint es indessen sich mehr um eine Anwendung der elliptischen Functionen auf gewisse geometrische Probleme zu

handeln, wie umgekehrt, um Erläuterung und Lösung verwickelter analytischer Probleme durch geometrische Betrachtungen.

## § 43. Die elliptischen Functionen, deren Modul grösser wie die Einheit ist. Anwendungen derselben auf verschiedene Transformationsgleichungen.

Die Untersuchungen über den Zusammenhang des primitiven Moduls einer elliptischen Function mit dem Modul der transformirten Function, wenn die Resultate von § 37 und § 39 zu Grunde liegen, veranlassten *Jacobi*, die elliptischen Functionen zu behandeln, deren Modul grösser wie die Einheit ist. Man findet hierüber auf pag. 70 der „Fundamenta" einige Gleichungen „quae ad alias etiam quaestiones usui esse possunt". Diese Gleichungen, welche sich durch ziemlich weitläufige Betrachtungen auf andere Weise herstellen lassen, sind auch von *Abel* in etwas anderer Form wie bei *Jacobi* aufgestellt worden. Man vergleiche hierüber die schon früher citirten Abhandlungen: Sur le nombre des transformations différentes etc., (Crelle. Journ. t. 3 p. 395, Oeuvres t. 1 p. 310) Précis d'une théorie des fonctions elliptiques. (Crelle. J. t. 4 p. 312, Oeuv. p. 371).

Geht der Modul $k$ über in $\frac{1}{k}$, so mögen die Integrale $K$ und $K'$ übergehn in $K_1$ und $K'_1$. Es ist dann:

$$1) \quad K_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\left(1-\frac{w^2}{k^2}\right)}},$$

oder $w = kt$ gesetzt:

$$K_1 = k \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)\,(1-k^2t^2)}}.$$

Nimmt man in den Gleichungen 2) und 4) von § 8 auf p. 26 $\sin\alpha = 1$, so erhält man unmittelbar:

$$2) \quad K_1 = k\left(K + \frac{K'}{i}\right) = k(K - K'i).$$

Der Complementärmodul von $\frac{1}{k}$ ist:

$$\sqrt{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{\sqrt{-k'^2}}{k} = \frac{ik'}{k}.$$

Mit Rücksicht hierauf folgt:

$$K'_1 = \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)\left(1+\frac{k'^2}{k^2}w^2\right)}} = k\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k^2+k'^2w^2)}}.$$

Die Substitution $w = \sqrt{1-t^2}$ giebt:

$$3)\quad K'_1 = k\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}} = kK'.$$

Für $y = kx$ folgt:

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = \frac{kdx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$, so folgt durch Integration:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = k\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Wird:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = u$$

gesetzt, so ist:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)\left(1-\frac{y^2}{k^2}\right)}} = ku.$$

Die beiden letzten Gleichungen geben $x = \sin\mathrm{am}(u, k)$ und $y = \sin\mathrm{am}(ku, \frac{1}{k})$. Da nun $y = kx$, so ist $\sin\mathrm{am}(ku, \frac{1}{k}) = k\sin\mathrm{am}(u, k)$. Man erhält so leicht die folgenden Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[ku, \frac{1}{k}\right] = k\sin\mathrm{am}(u, k), \\ \cos\mathrm{am}\left[ku, \frac{1}{k}\right] = \Delta\mathrm{am}(u, k), \\ \Delta\mathrm{am}\left[ku, \frac{1}{k}\right] = \cos\mathrm{am}(u, k). \end{cases}$$

Diese Gleichungen führen durch Combination mit den Gleichungen 8) von § 8 zu bemerkenswerthen Transformationsgleichungen. Es finden nach p. 38 die Gleichungen statt:

$$5)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(ui, k) = i\dfrac{\sin\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}, \\ \cos\mathrm{am}(ui, k) = \dfrac{1}{\cos\mathrm{am}(u, k')}, \\ \Delta\,\mathrm{am}(ui, k) = \dfrac{\Delta\,\mathrm{am}(u, k')}{\cos\mathrm{am}(u, k')}. \end{cases}$$

Zur Vereinfachung soll der Modul $k$ bei den elliptischen Functionen nicht mit angemerkt werden. Vertauscht man in den Gleichungen 5) $k$ und $k'$, so gehn dieselben über in:

$$6)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}(ui, k') = i\dfrac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}(ui, k') = \dfrac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}(ui, k') = \dfrac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 4) vertausche man $k$ und $k'$, setze $ui$ statt $u$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 6) folgt:

$$7)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[k'ui, \dfrac{1}{k'}\right] = ik'\dfrac{\sin\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[k'ui, \dfrac{1}{k'}\right] = \dfrac{\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[k'ui, \dfrac{1}{k'}\right] = \dfrac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Führt man in die vorstehenden Gleichungen links die Functionen mit reellen Argumenten und dem Complementärmodul $\frac{ik}{k'}$ von $\frac{1}{k'}$ ein, so lassen sich folgende Gleichungen herstellen:

$$8)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[k'u, \dfrac{ik}{k'}\right] = \dfrac{k'\sin\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[k'u, \dfrac{ik}{k'}\right] = \dfrac{\cos\mathrm{am}\,u}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left[k'u, \dfrac{ik}{k'}\right] = \dfrac{1}{\Delta\,\mathrm{am}\,u}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 4) wende man auf die Gleichungen 6) an, indem in den Gleichungen 6) $ku$ statt $u$ und $\frac{1}{k}$ statt $k$ gesetzt wird. Es geht dann $k'$ über in $\frac{ik'}{k}$. Auf diese Art folgt:

$$9)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[kui, \frac{ik'}{k}\right] = \frac{ik\sin\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[kui, \frac{ik'}{k}\right] = \frac{1}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[kui, \frac{ik'}{k}\right] = \frac{\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 8) und 9), in unwesentlich verschiedener Darstellung, findet man auf p. 71 der „Fundamenta".

Die Gleichungen 4)—9) hat *Hermite* auf die Substitutionsgleichungen von *Landen* und *Gauss* angewandt und ist dabei zu einem Systeme von Formeln gelangt, welche auf die Entwickelung der elliptischen Functionen nach Potenzen des Arguments eine interessante Anwendung gestatten. Ueber die nachfolgenden von *Hermite* aufgestellten Gleichungen vergleiche man:

*Hermite:* Sur la théorie des fonctions elliptiques, (Comptes Rendus 1863 t. LVII p. 613—618) etwas erweitert reproducirt unter dem Titel: Remarque sur le développement de $\cos\operatorname{am}x$. Journ. de Math. 2e. série. Année 1864 t. IX p. 289—295).

*Richelot:* Die Landen'sche Transformation p. 44 u. 45.

*Königsberger:* Die Transformation der elliptischen Functionen. Leipzig 1868. Siebenter Abschnitt p. 58—63.

Die nach *Landen* und *Gauss* benannten Gleichungen sind nach § 40 folgende:

$$10)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1+k')\sin\operatorname{am}^2u}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k)u, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{(1+k)\sin\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k)u, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k)u, \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k}\right] = \dfrac{1-k\sin^2\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 11) folgen durch Anwendung der Gleichungen 6) auf die Gleichungen 10). Nimmt man in den Gleichungen 1) $\frac{1-k'}{1+k'}$ statt $k$, ferner $(1+k')u$ statt $u$, so kann man auf die rechten Seiten die Gleichungen 10) anwenden. Die sich ergebenden neuen Gleichungen folgen aber auch direct aus 10) durch Vertauschung von $k'$ mit $-k'$, wodurch $k$ unverändert bleibt. Man erhält so:

$$12)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1-k')u, \dfrac{1+k'}{1-k'}\right] = \dfrac{(1-k')\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1-k')u, \dfrac{1+k'}{1-k'}\right] = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1-k')u, \dfrac{1+k'}{1-k'}\right] = \dfrac{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

Vertauscht man in den Gleichungen 4) $k$ mit $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, setzt $(1+k)u$ statt $u$, so giebt die Anwendung der Gleichungen 11):

$$13)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[2u\sqrt{k}, \dfrac{1+k}{2\sqrt{k}}\right] = \dfrac{2\sqrt{k}.\sin\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[2u\sqrt{k}, \dfrac{1+k}{2\sqrt{k}}\right] = \dfrac{1-k\sin^2\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[2u\sqrt{k}, \dfrac{1+k}{2\sqrt{k}}\right] = \dfrac{\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1+k\sin^2\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

Vertanscht man in den Gleichungen 11) $k$ mit $k'$ und $u$ mit $ui$, so geben dieselben:

$$14)\quad \begin{cases} \sin\operatorname{am}\left[(1+k')ui, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{i(1+k')\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}u}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \cos\operatorname{am}\left[(1+k')ui, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{\Delta\operatorname{am}u}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}u}, \\ \Delta\operatorname{am}\left[(1+k')ui, \dfrac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right] = \dfrac{1-(1-k')\sin^2\operatorname{am}u}{1-(1+k')\sin^2\operatorname{am}u}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 12) werde $u$ mit $ku$, $k$ mit $\frac{1}{k}$, also $k'$ mit $\frac{ik'}{k}$ vertauscht, die Anwendung der Gleichungen 4) giebt dann:

$$15)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[(k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right] = \frac{(k+ik')\sin\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[(k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right] = \frac{1-k(k+ik')\sin^2\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u}, \\ \Delta\mathrm{am}\left[(k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'}\right] = \frac{1-k(k-ik')\sin^2\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

In den Gleichungen 21) werde $k'u$ statt $u$ und $\frac{ik}{k'}$ statt $k$ gesetzt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 8) folgt dann:

$$16)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[(k'+ik)u, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \frac{(k'+ik)\sin\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}{1-k(k-ik')\sin^2\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[(k'+ik)u, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \frac{\cos\mathrm{am}u}{1-k(k-ik')\sin^2\mathrm{am}u}, \\ \Delta\mathrm{am}\left[(k'+ik)u, \frac{2\sqrt{ikk'}}{k'+ik}\right] = \frac{1-k(k+ik')\sin^2\mathrm{am}u}{1-k(k-ik')\sin^2\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 10) endlich geben durch Vertauschung von $k$ mit $k'$ und $u$ mit $ui$:

$$17)\quad \begin{cases} \sin\mathrm{am}\left[(1+k)ui, \frac{1-k}{1+k}\right] = \frac{i(1+k)\sin\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}, \\ \cos\mathrm{am}\left[(1+k)ui, \frac{1-k}{1+k}\right] = \frac{1+k\sin^2\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}, \\ \Delta\mathrm{am}\left[(1+k)ui, \frac{1-k}{1+k}\right] = \frac{1-k\sin^2\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}. \end{cases}$$

In dem Vorstehenden sind die wesentlichsten Anwendungen der Gleichungen 4) und 6) auf die sogenannten Transformationen zweiten Grades enthalten. Durch leichte Aenderungen lassen sich ohne Mühe weitere Gleichungen ableiten, die indessen nicht materiell von den gegebenen Gleichungen verschieden sind. An Stelle der Gleichungen 15) findet man bei *Königsberger* ein System, welches aus 15) durch Vertauschung von $i$ mit $-i$ folgt. Setzt man in den Gleichungen 15) $(k+ik')u = (k'-ik)ui$, wendet dann links die Gleichungen 6) an, so erhält man ein von *Königsberger* aufgestelltes System, welches den Gleichungen 16) entspricht.

Geht $k$ über in $\frac{1}{k}$, so geht der Ausdruck $\frac{K'}{K}$ in Folge der Gleichungen 1), 2) und 3) über in:

$$\frac{K'}{K - iK'}.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

$$18) \quad \frac{K'}{K} = w,$$

also:

$$19) \quad q = e^{-\pi w},$$

so geht $q$ durch Vertauschung von $k$ mit $\frac{1}{k}$ über in $e^{-\frac{\pi w}{1 - wi}}$. Es lässt sich umgekehrt zeigen, dass durch Vertauschung von $w$ mit $\frac{w}{1 - wi}$ in den Gleichungen 19) $k$ seinen reciproken Werth annimmt. Dieses ist nur ein specieller Fall einer allgemeinen Transformation der Theta-Functionen, welche im folgenden § weiter ausgeführt werden soll und wozu der specielle Fall als ein einfaches Beispiel dienen möge.

In den Gleichungen 18) von § 18 setze man für $q$ seinen Werth aus 19). Nach pag. 94 ist $\log q . \log q' = \pi^2$, also $\log q' = -\frac{\pi}{w}$ und:

$$20) \quad q' = e^{-\frac{\pi}{w}}.$$

Die bemerkten Gleichungen nehmen mittelst der Gleichungen 19) und 20) folgende Formen an:

$$21) \quad \begin{cases} \vartheta_3(x, e^{-\pi w}) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}} \, \vartheta_3\left[\dfrac{xi}{w}, e^{-\frac{\pi}{w}}\right], \\ \vartheta(x, e^{-\pi w}) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}} \, \vartheta_2\left[\dfrac{xi}{w}, e^{-\frac{\pi}{w}}\right], \\ \vartheta_2(x, e^{-\pi w}) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}} \, \vartheta\left[\dfrac{xi}{w}, e^{-\frac{\pi}{w}}\right], \\ \vartheta_1(x, e^{-\pi w}) = \dfrac{-ie^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}} \, \vartheta_1\left[\dfrac{xi}{w}, e^{-\frac{\pi}{w}}\right]. \end{cases}$$

In Folge der Methoden, angewandt im § 18, traten statt $q$ und $q'$ Exponentialgrössen wie in den Gleichungen 19) und 20) auf, in denen der Exponent der einzigen Beschränkung unterworfen ist, dass die Theta-Reihen convergent sind. Die Gleichungen 20) gelten also allgemein, es kann $w$ complex sein, nur muss dann der reelle Theil eine wesentlich positive Grösse sein.

Geht $w$ über in $w \pm i$, so ist:

$$e^{-\pi(w\pm i)} = -e^{-\pi w}.$$

Die Function $\vartheta_3(x)$ geht dann über in $\vartheta(x)$, umgekehrt geht $\vartheta(x)$ über in $\vartheta_3(x)$; die beiden Functionen $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta_2(x)$ kehren in sich zurück, respective multiplicirt mit $e^{\mp\frac{\pi i}{4}}$.

In der ersten Gleichung 21) vertausche man $w$ und $x$ respective mit $\frac{w}{1-wi}$ und $\frac{x}{1-wi}$, dieselbe wird dann:

$$22)\quad \vartheta_3\left(\frac{x}{1-wi}, e^{-\frac{\pi w}{1-wi}}\right) = \sqrt{\frac{1-wi}{w}}\, e^{-\frac{x^2}{\pi w(1-wi)}}\, \vartheta_3\left(\frac{xi}{w}, e^{\pi i-\frac{\pi}{w}}\right).$$

Es ist aber, mit Rücksicht auf die dritte Gleichung 21):

$$\vartheta_3\left(\frac{xi}{w}, e^{\pi i-\frac{\pi}{w}}\right) = \vartheta\left(\frac{xi}{w}, e^{-\frac{\pi}{w}}\right) = \sqrt{w}\, e^{\frac{x^2}{\pi w}}\, \vartheta_2(x, e^{-\pi w}).$$

Die Gleichung 22) wird hierdurch:

$$23)\quad \vartheta_3\left(\frac{x}{1-wi}, e^{-\frac{\pi w}{1-wi}}\right) = \sqrt{1-wi}\, e^{-\frac{x^2}{\pi(1-wi)}}\, \vartheta_2(x, e^{-\pi w}).$$

Aehnliche Relationen lassen sich aus den drei andern Gleichungen herleiten. Man findet leicht:

$$24)\quad \begin{cases} \vartheta_2\left(\frac{x}{1-wi}, e^{-\frac{\pi w}{1-wi}}\right) = M\vartheta_3(x, e^{-\pi w}), \\ \vartheta\,(\ \ ,\ \ ,\ \ ) = M\vartheta\,(\ \ ,\ \ ,\ \ )\, e^{\frac{\pi i}{4}}, \\ \vartheta_1(\ \ ,\ \ ,\ \ ) = M\vartheta_1(\ \ ,\ \ ,\ \ )\, e^{\frac{\pi i}{4}}. \end{cases}$$

$$M = \sqrt{1-wi}\, e^{-\frac{x^2}{\pi(1-wi)}}.$$

Bildet man die Quotienten der Gleichungen 23) und 24), so fällt der Factor $M$ weg, durch Einführung von elliptischen Functio-

nen erhält man wieder die Gleichungen 4). In den Gleichungen 23) und 24) werde $x = 0$ gesetzt. Geht $w$ über in $\frac{w}{1-wi}$, so mögen $k$, $k'$, $K$ übergehn in $k_1$, $k'_1$, $K_1$. Setzt man $w = \frac{K'}{K}$, so folgt:

$$\sqrt{\frac{2K_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{K-iK'}{K}}\sqrt{\frac{2kK}{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2k_1K_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{K-iK'}{K}}\sqrt{\frac{2K}{\pi}},$$

$$\sqrt{\frac{2k'_1K}{\pi}} = \sqrt{\frac{K-iK'}{K}}\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}.e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

Diese Gleichungen geben unmittelbar:

$$k_1 = \frac{1}{k},\ k'_1 = \frac{k'e^{\frac{\pi i}{2}}}{k} = \frac{ik'}{k},\ K_1 = k(K-iK'),$$

übereinstimmend mit den Resultaten zu Anfang dieses Paragraphen.

## § 44. Die allgemeine Transformation der Theta-Functionen.

Die Gleichungen 21) des vorhergehenden § gestatten die allgemeinste Transformation der Theta-Functionen auszuführen und zwar auf eine Weise, welche bei vielen mathematischen Betrachtungen den Vorzug der Einfachheit und Natürlichkeit darbietet, indem man vom Besondern zum Allgemeinen fortschreitet. Hierbei ist in Beziehung auf die Bezeichnung der Theta-Functionen eine Bemerkung zu machen, mit Rücksicht auf eine steigende Complication der Formeln, welche in den nachfolgenden Untersuchungen zu vermeiden ist. Die von *Jacobi* eingeführte Quantität $q$ ist schon in den angeführten Gleichungen durch eine Exponentialgrösse auf folgende Art ersetzt worden:

$$q = e^{-\pi w}.$$

Nimmt der Exponent $w$ eine allgemeinere Form an, so ist das zweite Argument der Theta-Functionen unter dem Functionszeichen sehr beschwerlich anzumerken. Um diesem Uebelstande zu entgehen, sollen die Theta-Functionen von *Jacobi* in der Art der Schreibweise derselben eine sehr unbedeutende Modification erleiden, welche gestattet, die Bezeichnung *Jacobi's* unmittelbar

herstellen zu können. Diese Modification bezieht sich nur auf die Position des Index, sie wird durch folgende Gleichung definirt:

$$1) \quad \vartheta_\mu(x, e^{-\pi w}) = \vartheta(x, w)_\mu,$$

wo $\mu$ die Werthe 0, 1, 2 und 3 annimmt. Für den Fall, dass $\mu = 0$, lässt *Jacobi* den Index einfach weg, auf der rechten Seite der Gleichung 1) muss derselbe indessen angemerkt werden, um Verwechslung zu vermeiden.

Durch die Verschiebung des Index lässt sich das zweite Argument der Thetafunctionen einfacher darstellen, es wird dabei ein ebenso widerwärtiges wie leider häufig vorkommendes Verfahren umgangen, welches nicht genug getadelt werden kann, mathematische Disciplinen durch unnöthige und fast immer geschmacklose neue Bezeichnungen zu verunstalten. Die andere Stellung des Index, welche übrigens *nur* bei den folgenden Untersuchungen zur Anwendung kommt, findet sich schon an andern Orten angewandt, z. B. bei *Königsberger*: „Die Transformation der elliptischen Functionen."

Nimmt $s$ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, so setze man:

$$2) \quad \begin{cases} \vartheta(x, w)_3 = \sum e^{-\pi s^2 w + 2sxi}, \\ \vartheta(x, w)_0 = \sum (-1)^s e^{-\pi s^2 w + 2sxi}, \\ \vartheta(x, w)_2 = \sum e^{-\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 w + (2s+1)xi}, \\ \vartheta(x, w)_1 = \frac{1}{i}\sum (-1)^s e^{-\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 w + (2s+1)xi}. \end{cases}$$

Bedeutet $g$ eine ganze Zahl, so geben diese Gleichungen unmittelbar:

$$3) \quad \begin{cases} \vartheta(x, w+2gi)_3 = \vartheta(x, w)_3, \ \vartheta(x, w+2gi)_0 = \vartheta(x, w)_0, \\ \vartheta(x, w+2gi)_2 = e^{-\frac{g\pi i}{2}} \vartheta(x, w)_2, \\ \vartheta(x, w+2gi)_1 = e^{-\frac{g\pi i}{2}} \vartheta(x, w)_1. \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \vartheta(x, w+i)_3 = \vartheta(x, w)_0,\ \vartheta(x, w+i)_0 = \vartheta(x, w)_3, \\ \vartheta(x, w+i)_2 = e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta(x, w)_2,\ \vartheta(x, w+i)_1 = e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta(x, w)_1. \end{cases}$$

Die Gleichungen 21) von § 43 lassen sich nun einfacher auf folgende Art schreiben:

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta(x, w)_3 = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}}\vartheta\left[\dfrac{xi}{w}, \dfrac{1}{w}\right]_3, \\ \vartheta(x, w)_0 = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}}\vartheta\left[\dfrac{xi}{w}, \dfrac{1}{w}\right]_2, \\ \vartheta(x, w)_2 = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}}\vartheta\left[\dfrac{xi}{w}, \dfrac{1}{w}\right]_0, \\ \vartheta(x, w)_1 = \dfrac{-ie^{-\frac{x^2}{\pi w}}}{\sqrt{w}}\vartheta\left[\dfrac{xi}{w}, \dfrac{1}{w}\right]_1. \end{cases}$$

Es ist nur nöthig eine der vier Theta-Functionen zu transformiren, da sich die übrigen durch einfache Aenderungen des Arguments $x$ herleiten lassen. Nimmt $x$ um grade oder ungrade Multipla von $\frac{\pi}{2}$ zu, so gelten für die Functionen $\vartheta(x, w)_\mu$ unmittelbar die auf pag. 83 aufgestellten Gleichungen 5). An Stelle der Gleichungen 7) und 8) von pag. 85 treten die folgenden:

$$6)\quad \begin{cases} \vartheta(x + m\pi w i)_3 = e^{\pi m^2 w - 2mxi}\vartheta(x)_3, \\ \vartheta(\quad\ \ )_0 = \quad\ \ \vartheta(x)_0(-1)^m, \\ \vartheta(\quad\ \ )_2 = \quad\ \ \vartheta(x)_2, \\ \vartheta(\quad\ \ )_1 = \quad\ \ \vartheta(x)_1(-1)^m. \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} \vartheta(x + \frac{2m+1}{2}\pi w i)_3 = e^{\pi\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2 w - (2m+1)xi}.\vartheta(x)_2, \\ \vartheta(\quad\ \ )_2 = \quad\ \ .\vartheta(x)_3, \\ \vartheta(\quad\ \ )_0 = \quad\ \ .\vartheta(x)_1(-1)^{m+\frac{1}{2}}, \\ \vartheta(\quad\ \ )_1 = \quad\ \ .\vartheta(x)_0(-1)^{m+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Der leichteren Uebersicht halber sind die vorstehenden Gleichungen, welche eigentlich eine Wiederholung bekannter Relationen für $\log q = -\pi w$ bilden, angeführt.

In Folge der Gleichungen 2) genügt jede der Theta-Functionen der partiellen Differentialgleichung:

$$8) \quad 4\frac{d\vartheta(x, w)\mu}{dw} = \pi\frac{d^2\vartheta(x, w)\mu}{dx^2}.$$

In Folge der Gleichungen 3) bleibt die linke Seite der ersten Gleichung 5) ungeändert, wenn $w$ durch $w + 2gi$ ersetzt wird, wo $g$ eine ganze, positive oder negative Zahl bedeutet. Es ist also:

$$9) \quad \vartheta(x, w)_3 = \frac{e^{\frac{-x^2}{\pi(w+2gi)}}}{\sqrt{w+2gi}}\vartheta\left[\frac{xi}{w+2gi}, \frac{1}{w+2gi}\right]_3.$$

Setzt man $x_1$, $w_1$ und $g_1$ statt $x$, $w$ und $g$, so folgt:

$$10) \quad \vartheta(x_1, w_1) = \frac{e^{\frac{-x_1^2}{\pi(w_1+2g_1i)}}}{\sqrt{w_1+2g_1i}}\vartheta\left[\frac{x_1 i}{w_1+2g_1 i}, \frac{1}{w_1+2g_1 i}\right]_3.$$

Es sei nun:

$$11) \quad \begin{aligned} \frac{xi}{w+2gi} &= x_1, \quad \frac{1}{w+2gi} = w_1, \\ \frac{x_1 i}{w_1+2g_1 i} &= x_2, \quad \frac{1}{w_1+2g_1 i} = w_2, \end{aligned}$$

also:

$$12) \quad \frac{1}{w+2gi} = \frac{x_1}{xi}, \quad \frac{1}{w_1+2g_1 i} = \frac{x_2}{x_1 i}.$$

Die Gleichungen 9) und 10) lassen sich dann einfacher schreiben:

$$13) \quad \begin{aligned} \vartheta(x, w)_3 &= \sqrt{\frac{x_1}{xi}}e^{\frac{-x^2 w_1}{\pi}}\vartheta(x_1, w_1)_3, \\ \vartheta(x_1, w_1)_3 &= \sqrt{\frac{x_2}{x_1 i}}e^{\frac{-x_1^2 w_2}{\pi}}\vartheta(x_2, w_2)_3. \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich auf welche Art sich diese Gleichungen weiterführen lassen. Man führe zu diesem Zwecke folgende Grössen ein:

$$14) \quad x_1 = \frac{xi}{w+2gi}, \; x_2 = \frac{x_1 i}{w_1+2g_1 i}, \ldots x_m = \frac{x_{m-1} i}{w_{m-1}+2g_{m-1} i}.$$

15) $w_1 = \frac{1}{w + 2g\,i}$, $w_2 = \frac{1}{w_1 + 2g_1\,i}$, .., $w_m = \frac{1}{w_{m-1} + 2g_{m-1}\,i}$.

In Verbindung mit den Gleichungen 13) lassen sich $m$ Gleichungen aufstellen, deren letzte folgende ist:

$$\vartheta(x_{m-1}, w_{m-1})_3 = \sqrt{\frac{x_m}{x_{m-1}\,i}}\, e^{\frac{-x^2_{m-1} w_m}{\pi}}\, \vartheta(x_m, w_m)_3.$$

Man bilde nun das Product dieser sämmtlichen Gleichungen, hierdurch folgt:

$$16) \quad \begin{cases} \vartheta(x, w)_3 = \sqrt{\frac{x_m}{x\,i^m}}\, e^{-\frac{\varrho}{\pi}}\, \vartheta(x_m, w_m)_3, \\ \varrho = x^2 w_1 + x_1{}^2 w_2 + \ldots + x^2_{m-1} w_m. \end{cases}$$

In Folge der Gleichungen 14) sind $x_1$, $x_2$, ... $x_m$ gleich $x$ multiplicirt mit Factoren, welche nur $w$ enthalten. Man kann also in 16):

$$17) \quad \frac{x_m}{x} = \frac{1}{W}, \; \varrho = x^2 W_1,$$

setzen, wo $W$ und $W_1$ näher zu bestimmende rationale Functionen von $w$ sind, wie sich durch Zuziehung der Gleichungen 15) unmittelbar ergiebt. Setzt man zur Vereinfachung:

$$18) \quad \sqrt{\frac{1}{i^m}} = \frac{1}{i^{\frac{m}{2}}} = c_1, \text{ also } c_1{}^8 = 1,$$

so lässt sich die erste Gleichung 16) in Folge von 17) und 18) einfacher schreiben:

$$19) \quad \vartheta(x, w)_3 = \frac{c_1}{\sqrt{W}}\, e^{\frac{-x^2 W_1}{\pi}}\, \vartheta(x_m, w_m)_3.$$

Für $w_m$ findet man unmittelbar aus den Gleichungen 15) folgenden Werth:

$$w_m = \cfrac{1}{2i\,g_{m-1} + \cfrac{1}{2i\,g_{m-2} + \ddots + \cfrac{1}{2gi + w}}}.$$

Es ist also:

$$w_1 = \frac{1}{w + 2gi},$$

$$w_2 = \frac{w + 2gi}{2g_1 wi - (4gg_1 - 1)} = \frac{2g - wi}{2g_1 w + (4gg_1 - 1)i},$$

$$w_3 = \frac{4gg_1 - 1 - 2g_1 wi}{(4gg_1 - 1)w + 2(4gg_1 g_2 - g_2 - g)},$$

etc.

Um eine leichte Uebersicht über die allgemeine Form von $w_m$ zu haben, multiplicire man in $w_2$, $w_4$ etc. Zähler und Nenner mit $i$. Die vorstehenden Gleichungen zeigen dann, dass allgemein:

$$20) \quad w_m = \frac{\alpha - \beta wi}{\delta w + \gamma i},$$

wo die ganzen Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ in Folge der Kettenbruchentwickelung der Bedingung genügen:

$$21) \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die Werthe von $w_1$, $w_2$, $w_3$... geben ferner für die bemerkten Zahlen die folgenden Beschränkungen:

22) $\alpha$, $\delta$ gleichzeitig grade und $\beta$, $\gamma$ gleichzeitig ungrade,
$\alpha$, $\delta$ gleichzeitig ungrade und $\beta$, $\gamma$ gleichzeitig grade.

In der partiellen Differentialgleichung 8) nehme man $\mu = 3$, substituire dann für $\vartheta(x, w)_3$ seinen Werth aus 19). In Folge der Gleichungen 17), 20) und 21) ist:

$$\frac{dx_m}{dx} = \frac{1}{W}, \quad \frac{dx_m}{dw} = -\frac{x}{W^2}\frac{dW}{dw}, \quad \frac{dw_m}{dw} = \frac{-1}{(\delta w + \gamma i)^2}.$$

Man hat mithin die Gleichungen:

$$\frac{d^2\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx^2} = \frac{1}{W^2}\frac{d^2\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx_m^2},$$

$$\frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dw} = -\frac{x}{W^2}\frac{dW}{dw}\frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx_m} - \frac{1}{(\delta w + \gamma i)^2}\frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dw_m}.$$

Die bemerkte partielle Differentialgleichung wird hierdurch:

$$23) \quad \frac{4x^2}{\pi}\left[W_1^2 + \frac{dW_1}{dw}\right]\vartheta(x_m, w_m)_3 - 2\left[W_1 - \frac{dW}{W\,dw}\right]\vartheta(x_m, w_m)_3$$
$$- \frac{4x}{W}\left[W_1 - \frac{dW}{W\,dw}\right]\frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx_m}$$
$$+ \frac{\pi}{W^2}\frac{d^2\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx_m^2} + \frac{4}{(\delta w + \gamma i)^2}\frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dw_m} = 0.$$

Man setze in die vorstehende Gleichung nach 8):

$$\pi \frac{d^2\vartheta(x_m, w_m)_3}{dx^2_m} = 4 \frac{d\vartheta(x_m, w_m)_3}{dw_m},$$

darauf $x = 0$, also auch $x_m = 0$. Es folgt dann:

$$\left[W_1 - \frac{dW}{W dw}\right]\vartheta(0, w_m)_3 =$$

$$2\left[\frac{1}{W^2} + \frac{1}{(\delta w + \gamma i)^2}\right]\frac{d\vartheta(0, w_m)_3}{dw_m}.$$

Da $W$ und $W_1$ rationale Functionen von $w$ sind, dieses aber mit $\vartheta(0, w_m)$ nicht der Fall ist, so muss die vorstehende Gleichung in die beiden folgenden zerfallen:

$$\frac{1}{W^2} + \frac{1}{(\delta w + \gamma i)^2} = 0, \quad W_1 = \frac{1}{W}\frac{dW}{dw},$$

oder:

$$24) \quad \frac{1}{W} = \frac{i}{\delta w + \gamma i}, \quad W_1 = \frac{\delta}{\delta w + \gamma i}.$$

Für die vorstehenden Werthe von $W$ und $W_1$ wird die Gleichung 23) identisch. Man substituire diese Werthe von $W$ und $W_1$ in 19), ferner in dieselbe Gleichung für $x_m$ und $w_m$ ihre Werthe aus 17) und 20). Statt der Constanten $c_1$ aus 18) führe man eine Constante $c$ ein, bestimmt durch:

$$25) \quad c = \sqrt{\frac{i}{i^m}} = \frac{1}{i^{\frac{m-1}{2}}}, \text{ also } c^8 = 1.$$

Zwischen den Theta-Functionen ergiebt sich nun folgende allgemeine Relation:

$$26) \quad \vartheta(x, w)_3 = c\sqrt{\frac{1}{\delta w + \gamma i}}\, e^{\frac{-\delta x^2}{\pi(\delta w + \gamma i)}}\vartheta\left[\frac{xi}{\delta w + \gamma i}, \frac{\alpha - \beta w i}{\delta w + \gamma i}\right]_3.$$

In Folge der ersten Gleichung 5) ist:

$$\vartheta(x', w') = \frac{e^{-\frac{x'^2}{\pi w'}}}{\sqrt{w'}}\vartheta\left[\frac{x'i}{w'}, \frac{1}{w'}\right]_3.$$

Man setze hierin:

$$w' = \frac{\gamma i + \delta w}{\alpha - \beta w i}, \quad x' = \frac{x}{\alpha - \beta w i},$$

dann ist:

$$\vartheta\left[\frac{x}{\alpha-\beta w i}, \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i}\right]_3 = \sqrt{\frac{\alpha-\beta w i}{\gamma i+\delta w}}\, e^{\frac{-x^2}{\pi(\alpha-\beta w i)(\delta w+\gamma i)}} \times \vartheta\left[\frac{x i}{\delta w+\gamma i}, \frac{\alpha-\beta w i}{\delta w+\gamma i}\right]_3.$$

Zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 26) werde die rechts stehende Theta-Function eliminirt. Da $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, so ist:

$$\frac{1}{\alpha-\beta w i}-\delta = \beta\frac{\delta w i-\gamma}{\alpha-\beta w i} = \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i}\beta i.$$

Unter Zuziehung dieser Gleichung lässt sich die Gleichung 26) durch folgende ersetzen:

$$27)\quad \vartheta(x, w)_3 = \frac{c e^{\frac{\beta x^2 i}{\pi(\alpha-\beta w i)}}}{\sqrt{\alpha-\beta w i}}\,\vartheta\left(\frac{x}{\alpha-\beta w i}, \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i}\right)_3.$$

Wird $w$ mit $w+i$ vertauscht, so geht die linke Seite über in $\vartheta(x, w)_0$. An Stelle von $\alpha$ und $\gamma$ treten $\alpha'$ und $\gamma'$, wo $\alpha' = \alpha+\beta$ und $\gamma' = \gamma+\delta$. Die Relation $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ giebt $\alpha'\delta-\beta\gamma' = 1$. Wegen der in 22) aufgestellten Bedingungen sind nun $\alpha'$, $\beta$, $\gamma'$ ungrade und $\delta$ grade, oder $\alpha'$, $\delta$, $\gamma'$ ungrade und $\beta$ grade. Schreibt man einfach $\alpha$ und $\gamma$ statt $\alpha'$ und $\gamma'$, so folgt nun:

$$28)\quad \vartheta(x, w)_0 = \frac{c e^{\frac{\beta x^2 i}{\pi(\alpha-\beta w i)}}}{\sqrt{\alpha-\beta w i}}\,\vartheta\left(\frac{x}{\alpha-\beta w i}, \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i}\right)_3,$$

wo zwischen den Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ die Bedingungen stattfinden:

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1.$$

$$29)\quad \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \text{ gleichzeitig ungrade und } \delta \text{ grade,} \\ \alpha, \delta, \gamma \text{ gleichzeitig ungrade und } \beta \text{ grade.} \end{cases}$$

In der Gleichung 26) setze man $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, und $\delta_1$ statt $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$, wo $\alpha_1$, $\delta_1$ ungrade und $\beta_1$, $\gamma_1$ grade, oder $\alpha_1$, $\delta_1$ ungrade und $\beta_1$, $\gamma_1$ grade sind; ferner die Relation stattfindet $\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1 = 1$. Es ist dann:

$$\vartheta(x, w)_3 = \frac{c e^{\frac{-\delta_1 x^2}{\pi(\delta_1 w+\gamma_1 i)}}}{\sqrt{\delta_1 w+\gamma_1 i}}\,\vartheta\left(\frac{x i}{\delta_1 w+\gamma_1 i}, \frac{\alpha_1-\beta_1 w i}{\delta_1 w+\gamma_1 i}\right)_3.$$

Lässt man $w$ um $i$ zunehmen, so folgt:

$$30)\quad \vartheta(x,w)_0 = \frac{c\,e^{\frac{-\delta_1 x^2}{\pi(\delta_1 w+\gamma'_1 i)}}}{\sqrt{\delta_1 w+\gamma'_1 i}}\,\vartheta\left(\frac{xi}{\delta_1 w+\gamma_1 'i},\ \frac{\alpha'_1-\beta_1 wi}{\delta_1 w+\gamma'_1 i}\right)_3,$$

wo $\alpha'_1 = \alpha_1+\beta_1$ und $\gamma'_1 = \gamma_1+\delta_1$, also $\alpha'_1\delta_1-\beta_1\gamma'_1 = \alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1 = 1$. Es finden die Bedingungen statt $\alpha'_1, \beta_1, \gamma'_1$ ungrade, $\delta_1$ grade, oder $\alpha'_1$, $\delta_1$, $\gamma'_1$ ungrade und $\beta_1$ grade. In der Gleichung 30) werde $x$ mit $\frac{xi}{w}$ und $w$ mit $\frac{1}{w}$ vertauscht. Es ist dann:

$$31)\quad \vartheta\left(\frac{xi}{w},\frac{1}{w}\right)_0 = c\sqrt{\frac{w}{\delta_1+\gamma'_1 wi}}\,e^{\frac{\delta_1 x^2}{\pi w(\delta_1+\gamma'_1 wi)}}\times$$
$$\vartheta\left(\frac{xi}{\delta_1+\gamma'_1 wi},\ \frac{\alpha'_1 w-\beta_1 i}{\delta_1+\gamma'_1 wi}\right)_3.$$

Für die links stehende Theta-Function setze man nach der dritten Gleichung 5):

$$\sqrt{w}\,e^{\frac{x^2}{\pi w}}\,\vartheta(x,w)_2.$$

Zur Vereinfachung setze man weiter $\alpha'_1 = \delta$, $\beta_1 = \gamma$, $\gamma'_1 = \beta$ und $\delta_1 = \alpha$, wo also wieder $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$. Die Gleichung 31) führt dann auf folgende fundamentale Gleichung:

$$32)\quad \vartheta(x,w)_2 = \frac{c\,e^{\frac{\beta x^2}{\pi(\alpha-\beta wi)}}}{\sqrt{\alpha-\beta wi}}\,\vartheta\left(\frac{x}{\alpha-\beta wi},\ \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta wi}\right)_3,$$

wo zwischen den Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ die Bedingungen stattfinden:

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1.$$

$$33)\quad \begin{cases} \delta,\ \beta,\ \gamma \text{ gleichzeitig ungrade und } \alpha \text{ grade,} \\ \alpha,\ \delta,\ \beta \text{ gleichzeitig ungrade und } \gamma \text{ grade.} \end{cases}$$

Mit den Bedingungen 22), 29) und 33) sind alle Fälle erschöpft, welche die Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$ darbieten kann, die Gleichungen 27), 28) und 32) enthalten mithin auf den linken Seiten die drei möglichen Formen, welche die rechts stehende Function annehmen kann.

Die in 27) vorkommende Constante $c$ genügt nach 25) der Gleichung $c^8 = 1$. Ihr Werth ist von einer Zahl $m$ abhängig, welche mit den Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ in Verbindung gebracht werden kann. Da die Bestimmung dieser Constanten für das Folgende

nicht erforderlich ist und dieselbe ziemlich weitläufige Rechnungen nach sich zieht, so soll eine Ausführung derselben hier unterbleiben. Es ist zu bemerken, dass die Bedeutung von $c$ in den Gleichungen 27), 28) und 32) eine verschiedene ist, da bei Herstellung dieser Gleichungen die ursprünglichen Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$ ihre Bedeutungen geändert haben.

Man kann durch Aenderung des Argumentes $x$ auf den rechten Seiten der Gleichungen 27), 28) und 32) jede der drei übrigen Theta-Functionen mit den Indices 0, 2 und 1 hervorrufen. Da allgemein:

$$\vartheta(x+\frac{\pi}{2}, w)_3 = \vartheta(x, w)_0,$$

$$\vartheta(x+\frac{\pi w i}{2}, w)_3 = e^{\frac{\pi w}{4}-xi}\vartheta(x, w)_2,$$

$$\vartheta(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi w i}{2}, w)_3 = ie^{\frac{\pi w}{4}-xi}\vartheta(x, w)_1,$$

so setze man in die bemerkten Gleichungen statt $x$ successive:

$$x+\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta w i),$$

$$x+\frac{\pi}{2}(\gamma i+\delta w)i = x+\frac{\pi}{2}(-\gamma+\delta w i),$$

$$x+\frac{\pi}{2}(\alpha-\beta w i)+\frac{\pi}{2}(\gamma i+\delta w)i.$$

Führt man zur Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$x' = \frac{x}{\alpha-\beta i}, \quad w' = \frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i},$$

so geht durch die bemerkten Aenderungen $\vartheta(x', w')_3$ successive über in:

$$\vartheta(x', w')_0, \quad e^{\frac{\pi}{4}\frac{\gamma i+\delta w}{\alpha-\beta w i}-\frac{xi}{\alpha-\beta w i}}\vartheta(x', w')_2,$$
$$ie^{\frac{\pi}{4}\frac{\gamma i+\delta w i}{\alpha-\beta w i}-\frac{x}{\alpha-\beta w i}}\vartheta(x', w')_1.$$

Auf die linken Seiten der bemerkten Gleichungen sind die Gleichungen 6) und 7) anzuwenden. Es ergeben sich dann, mit Rücksicht auf die Bedeutung der Zahlen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und $\delta$, 24 Glei-

chungen. In jedem Systeme von je vier Gleichungen hat die Constante $c$ denselben Werth. Da bei allen diesen Gleichungen immer derselbe Factor auftritt, so soll derselbe durch $\varrho$ bezeichnet werden, so dass:

$$\varrho = \frac{\sqrt{\alpha - \beta w i}}{c} e^{\frac{-\beta x^2 i}{\pi(\alpha - \beta w i)}}, \quad c^8 = 1.$$

Zur leichtern Uebersicht der folgenden Formeln sei noch bemerkt, dass wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$:

$$\frac{-\beta x(\gamma i + \delta w) - x i}{\alpha - \beta w i} = -x\delta i,$$

$$-\frac{\pi}{4}\frac{\beta i(\gamma i + \delta w)^2}{\alpha - \beta w i} + \frac{\pi}{4}\frac{\gamma i + \delta w}{\alpha - \beta w i} = \frac{\pi\gamma\delta i}{4} + \frac{\pi\delta^2 w}{4}.$$

## Transformationsgleichungen.

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

$$x' = \frac{x}{\alpha - \beta w i}, \quad w' = \frac{\gamma i + \delta w}{\alpha - \beta w i},$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\alpha - \beta w i}}{c} e^{\frac{-\beta x^2 i}{\pi(\alpha - \beta w i)}}, \quad c^8 = 1.$$

I. $\alpha$, $\delta$ grade; $\beta$, $\gamma$ ungrade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3,$$

$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2\, e^{\frac{-\pi\alpha\beta i}{4}},$$

$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0\, e^{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{\pi\delta i}{2}},$$

$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left[\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\delta + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\beta\right]\frac{\pi i}{2}}.$$

II. $\alpha$, $\delta$ ungrade; $\beta$, $\gamma$ grade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3,$$

$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0\, e^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi\beta i}{2}},$$

$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2\, e^{\frac{-\pi\gamma\delta i}{4}},$$

$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left(\alpha+\beta+1-\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}.$$

III. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ungrade; $\delta$ grade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0,$$
$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2\, e^{\frac{-\pi\alpha\beta i}{4}},$$
$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3\, e^{\frac{-\pi\gamma\delta i}{4}},$$
$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left(\beta-\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}.$$

IV. $\alpha$, $\delta$, $\gamma$ ungrade; $\beta$ grade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0,$$
$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3\, e^{\frac{-\pi\alpha\beta i}{4}},$$
$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2\, e^{\frac{-\pi\gamma\delta i}{4}},$$
$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left(\alpha+\beta+1-\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}.$$

V. $\beta$, $\gamma$, $\delta$ ungrade; $\alpha$ grade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2,$$
$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3\, e^{\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\frac{\pi\alpha i}{2}},$$
$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0\, e^{\left(\gamma+\delta-1-\frac{\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}},$$
$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left(\beta+\gamma+\delta-1-\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}.$$

VI. $\alpha$, $\beta$, $\delta$ ungrade; $\gamma$ grade.

$$\vartheta(x', w')_3 = \varrho\,\vartheta(x, w)_2,$$
$$\vartheta(x', w')_0 = \varrho\,\vartheta(x, w)_0\, e^{\left(\alpha+\beta-1-\frac{\alpha\beta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}},$$
$$\vartheta(x', w')_2 = \varrho\,\vartheta(x, w)_3\, e^{\left(1-\frac{\delta}{2}\right)\frac{\pi\gamma i}{2}},$$
$$\vartheta(x', w')_1 = \varrho\,\vartheta(x, w)_1\, e^{\left(\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta+\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}.$$

Die Werthe von $\vartheta(x', w')_1$ sind aus den Werthen von $\vartheta(x', w')_2$ durch Aenderung von $x$ um $\frac{\alpha-\beta w i}{2}\pi$ abgeleitet. Der leichteren Verification halber ist rechts allgemein

$$(-1)^m = e^{m\pi i}$$

gesetzt, es ist ferner in den vorkommenden Exponenten keinerlei Aenderung vorgenommen worden um dieselben etwas zu vereinfachen.

Es lassen sich aus den Systemen I—VI die Gleichungen 4)—9) des vorhergehenden § für besondere Annahmen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ herleiten. Man findet leicht, dass der Modul $k$ der elliptischen Functionen der Reihe nach ersetzt ist durch:

$$34) \quad k', \; k, \; \frac{1}{k'}, \; \frac{\pm ik}{k'}, \; \frac{\pm ik'}{k}, \; \frac{1}{k}.$$

So ergeben sich z. B. aus dem Systeme VI die Gleichungen zu Ende des vorhergehenden § für $\alpha = \beta = \delta = 1$, $\gamma = 0$. Es ist dann:

$$35) \quad x' = \frac{x}{1 - wi}, \quad w' = \frac{w}{1 - wi}.$$

Entspricht der Modul $l$ und das Integral $L$ dem Werth $w'$, so geben die Gleichungen VI:

$$\frac{\vartheta(0, w')_2}{\vartheta(0, w')_3} = \frac{\vartheta(0, w)_3}{\vartheta(0, w)_2} \text{ d. i. } \sqrt{l} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Es ist ferner:

$$\frac{\vartheta(x', w')_1}{\vartheta(x', w')_0} = \frac{\vartheta(x, w)_1}{\vartheta(x, w)_0},$$

oder:

$$\sqrt{l} \sin \text{am}\left(\frac{2Lx'}{\pi}, \; l\right) = \sqrt{k} \sin \text{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, \; k\right).$$

Man setze hierin $\sqrt{l} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $\frac{2Kx}{\pi} = u$ und nach 35) $x' = \frac{x}{1 - wi}$, dann ist:

$$\sin \text{am}\left(\frac{uL}{(1 - wi)K}, \; \frac{1}{k}\right) = k \sin \text{am}(u, k).$$

Diese Gleichung nach $u$ differentiirt, darauf $u = 0$ gesetzt, giebt noch:

$$\frac{L}{(1 - wi)K} = k.$$

Man erhält so wieder die Gleichung $\sin \text{am}\left(ku, \; \frac{1}{k}\right) = k \sin \text{am}(u, k)$. Aehnlich lassen sich die anderen Systeme behandeln. Es kommt hierbei weniger darauf an, durch ziemlich umständliche

Rechnungen Gleichungen abzuleiten, die sich viel leichter und viel naturgemässer direct wie im vorhergehenden § ergeben, als der Nachweis, dass den Systemen I—VI nur elliptische Functionen entsprechen, deren Moduli in der durch 34) bezeichneten Reihe enthalten sind.

Auf die Systeme I—VI lassen sich die allgemeinsten Theta-Functionen reduciren, zu deren Aufstellung die allgemeine algebraische Transformation der elliptischen Functionen Veranlassung giebt. Diese Transformation, welche im folgenden § behandelt werden soll, führt auf Theta-Functionen von der Form:

$$36) \quad \vartheta\left(\frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1}{\alpha_1 - \beta_1 w i}\, z, \frac{\gamma_1 i + \delta_1 w}{\alpha_1 - \beta_1 w i}\right)_\mu,$$

wo $\mu$ eine der Zahlen 0, 1, 2 und 3 ist. Es sind $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$ ganze Zahlen, welche der Bedingung $\alpha_1\,\delta_1 - \beta_1\,\gamma_1 > 0$ genügen müssen. Für die Convergenz der Theta-Reihen muss in:

$$q = e^{-\pi w}$$

der reelle Theil von $w$ positiv sein. Geht $w$ nun über in:

$$\frac{\gamma_1 i + \delta_1 w}{\alpha_1 - \beta_1 w i} = \frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 w^2}\, w + \frac{\alpha_1\gamma_1 + \beta_1\delta_1 w^2}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 w^2}\, i,$$

so muss für ein positives $w$ die Bedingung $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 > 0$ stattfinden als Bedingung für die Convergenz. Setzt man:

$$37) \quad \alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = n,$$

so ist $n$ eine ganze, positive Zahl. Die Zahl $n$ bestimmt den *Grad* der Transformation, d. h. genügen die Zahlen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$ der Gleichung 37), so bestimmen dieselben eine Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades. Für $n = 1$ erhält man die *linearen Transformationen*, welche in den Systemen I—VI vollständig aufgestellt sind.

Hat keine der Zahlen $\alpha_1$ oder $\delta_1$ einen gemeinschaftlichen Factor mit einer der Zahlen $\beta_1$ oder $\gamma_1$, so lassen sich immer zwei Zahlen $\alpha$ und $\gamma$ so bestimmen, dass:

$$38) \quad \alpha\delta_1 - \gamma\beta_1 = 1.$$

Die Gleichung 37) lässt sich dann ersetzen durch:

$$39) \quad \alpha_1 = \alpha n + \varepsilon\beta_1, \quad \gamma_1 = \gamma n + \varepsilon\delta_1,$$

wo $\varepsilon$ eine ganze Zahl bedeutet. Der in 36) aufgestellte Ausdruck nimmt hierdurch folgende Form an:

$$\vartheta\left(\frac{z}{\alpha-\beta_1\frac{w+\varepsilon i}{n}i}, \frac{\gamma i+\delta_1\frac{w+\varepsilon i}{n}}{\alpha-\beta_1\frac{w+\varepsilon i}{n}i}\right)_\mu.$$

Wegen der Gleichung 38) und der Systeme I—VI reducirt sich die vorstehende Theta-Function, abgesehn von einem Factor, auf:

$$40)\quad \vartheta\left[z, \frac{w+\varepsilon i}{n}\right]_{\mu_1},$$

wenn $x$ mit $z$ und $w$ mit $\frac{w+\varepsilon i}{n}$ vertauscht wird. Es ist $\mu_1 = 0, 1, 2, 3$. Ist die Zahl $n$ gegeben, so lassen sich beliebig viele Systeme von Zahlen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ finden, welche der Gleichung 37) genügen und aus denen sich die Gleichungen 38) und 39) herstellen lassen, man kommt schliesslich wieder auf die in 40) aufgestellte Function zurück. Setzt man $\beta_1 = 0$, so ist nach 37) $\alpha_1\delta_1 = n$. Man kann diese Gleichung in die beiden zerlegen $\alpha_1 = n$, $\delta_1 = 1$ und $\alpha_1 = 1$, $\delta_1 = n$. Diesen Annahmen entsprechen nach 36) die folgenden Theta-Functionen:

$$\vartheta\left[z, \frac{w+\gamma_1 i}{n}\right]_\mu,\ \vartheta(nz,\ nw+\gamma_1 i)_\mu.$$

Da $\gamma_1$ unbestimmt bleibt, so fällt die erste dieser Functionen wieder mit dem in 40) aufgestellten Ausdruck zusammen, die zweite Function reducirt sich auf das Product einer Constanten in:

$$\vartheta(nz,\ nw)_r,$$

wo $r = 0, 1, 2, 3$. Eine weitere Ausführung dieser Betrachtungen giebt eine Wiederholung von Ergebnissen, die schon weiter oben auf möglichst einfache Weise abgeleitet worden sind.

## § 45. Die allgemeine Transformation der elliptischen Functionen mittelst einer algebraischen Gleichung. Literarische Anmerkungen.

In § 36 ist nach *Abel* die Bedingung entwickelt, wann der Differentialgleichung:

$$1)\quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

durch eine algebraische Gleichung zwischen $x$ und $y$ genügt werden kann. Es soll nun nachgewiesen werden, dass die betreffende Bedingung nicht allein nothwendig, sondern auch hinreichend ist. Die Elemente dieser Darlegung sind in den §§ 37, 38, 40, 42 und 44 enthalten, deren Verbindung den Beweis, gleichzeitig mit der Ausführung der wesentlichsten Transformationen giebt. Der Einfachheit halber soll die im vorigen § gebrauchte Bezeichnung für die Theta-Functionen, was die Stellung des Index und Bezeichnung des zweiten Arguments betrifft, beibehalten werden.

Die auf p. 107 und 108 in dem Systeme III enthaltenen Formeln zeigen, wenn $z$ und $a$ statt $x$ und $y$ gesetzt wird, dass

$$\vartheta(z+a)_\mu \cdot \vartheta(z-a)_\mu,$$

für $\mu = 0, 1, 2, 3$ sich ausdrücken lässt durch die Quadrate der Theta-Functionen mit dem Argumente $z$, respective mit Constanten multiplicirt Da sich in Folge der Gleichungen V auf p. 109 immer zwei dieser Quadrate durch die beiden übrigen ausdrücken lassen, so kann man allgemein:

$$2) \quad \vartheta(z+a)_\mu \cdot \vartheta(z-a)_\mu = A\vartheta(z)_0^2 + B\vartheta(z)_1^2$$

setzen, wo $A$ und $B$ nur von $a$ abhängig sind.

Mit Rücksicht auf die Gleichung 2) führen die Gleichungen 6), 8), 12) und 14) von § 37 zu dem Resultate, dass für eine Primzahl $n$ allgemein $\vartheta(nz, nw)_\mu$ eine rationale Function von Theta-Functionen ist und zwar vom Grade $n$. Setzt man $n_1 z$, $n_1 w$ statt $z, w$, so lässt sich jeder Factor, wenn in dem Ausdrucke für $\vartheta(nz, nw)_\mu$ die Multiplication ausgeführt wird, eines jeden Terms als rationale Function von Theta-Functionen darstellen. Wiederholt man dieses Verfahren, so ergiebt sich, dass $n$ ein Product von ungraden Zahlen sein kann. Es folgt weiter, mit Zuziehung der Gleichungen 9), 10) und 13) von § 40, dass allgemein $\vartheta(nz, nw)_\mu$ für ein beliebiges ganzzahliges $n$, eine rationale, homogene Function vom Grade $n$ von Theta-Functionen ist.

Die Gleichungen 19) von § 38 geben nach 2) $\vartheta\left[z, \frac{w-2ti}{n}\right]_\mu$, wo $n$ eine ungrade Primzahl ist, als rationale Function von Tetha-Functionen. Da nun $n-2t$ eine ungrade Zahl und

$$\vartheta\left[z, \frac{w-2ti}{n}+i\right]_\mu = \vartheta\left[z, \frac{w+(n-2t)i}{n}\right]_\mu$$

wieder eine Theta-Function ist, so folgt, dass:

$$\vartheta\left[z, \frac{w+si}{n}\right]_\mu,$$

wo $s$ eine ganze Zahl bedeutet, sich als homogene Function $n^{\text{ten}}$ Grades von Theta-Functionen darstellen lässt. Dieses bleibt auch gültig, wenn $n$ ein Product von ungraden Zahlen ist, wie sich leicht ergiebt, wenn $w$ successive vertauscht wird mit

$$\frac{w+s_1 i}{n_1}, \quad \frac{w+s_2 i}{n_2} \ldots,$$

wo $n_1$, $n_2$.., Primzahlen sind.

In Folge der Gleichungen 23), 24) und 27) von § 40 ist $\vartheta\left[z, \frac{w}{2}\right]_\mu$ eine rationale Function zweiten Grades von Theta-Functionen, vertauscht man $w$ mit $\frac{w+si}{n}$, so folgert man, dass $\vartheta\left[z, \frac{w+si}{n}\right]_\mu$ für ein ganzzahliges $n$ eine homogene Function $n^{\text{ten}}$ Grades von Theta-Functionen von der Form $\vartheta(z, w)_\mu$ ist.

Combinirt man diese Resultate, so folgt, sind $m$, $m'$, $n$, $n'$ und $s$ beliebige ganze Zahlen, dass

$$3) \quad \vartheta\left[mm'z, m\frac{\frac{m'w}{n'}+si}{n}\right]_\mu$$

eine homogene Function $m^{\text{ten}}$ Grades ist, in welcher die Factoren der einzelnen Terme die Form haben:

$$\vartheta\left[m'z, \frac{\frac{m'w}{n'}+si}{n}\right]_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Ein solcher Ausdruck ist aber wieder eine homogene Function $n^{\text{ten}}$ Grades von

$$\vartheta\left[m'z, \frac{m'w}{n'}\right]_{\nu_1}, \quad \nu_1 = 0, 1, 2, 3,$$

welcher seiner Seits eine homogene Function vom Grade $m'$ von

$$\vartheta\left[z, \frac{w}{n'}\right]_{\nu_2}, \quad \nu_2 = 0, 1, 2, 3,$$

ist. Dieser letzte Ausdruck lässt sich schliesslich als homogene Function $n'^{\text{ten}}$ Grades von Theta-Functionen mit den Argumenten $z$ und $w$ darstellen. Der in 3) aufgestellte Ausdruck ist also eine rationale, homogene Function vom Grade $mm'nn'$ von Theta-Functionen mit den einfachen Argumenten $z$ und $w$.

Die Gleichungen 4) und 6) von § 36 geben für $x$, $y$ und $M$ folgende Ausdrücke, welche die Differentialgleichung 1) identisch machen:

$$4) \quad x = \operatorname{sin\,am}(u, k), \; y = \operatorname{sin\,am}\left[\frac{u}{M}, l\right].$$

$$5) \quad \frac{1}{M} = \frac{gL}{pK} + \frac{hL'i}{2pK'}, \; \frac{1}{M} = \frac{2g'L}{p'K'i} + \frac{h'L'}{p'K'}.$$

Setzt man zur Vereinfachung $\frac{K'}{K} = w$, so geben die Gleichungen 5):

$$6) \quad \frac{L'}{L} = \frac{2pg'i + p'gw}{ph' + \frac{p'h}{2i}w} = \frac{2g'i + g\frac{p'w}{p}}{h' - \frac{hi}{2}\frac{p'w}{p}}.$$

$$7) \quad \frac{1}{M} = \frac{gh' - g'h}{h' - \frac{hi}{2}\frac{p'w}{p}} \frac{L}{pK}.$$

Man substituire aus 7) den Werth von $M$ in die zweite Gleichung 4), führe ferner zur Vereinfachung der folgenden Formeln $z$ statt $u$ mittelst der Gleichung $u = \frac{2pp'Kz}{\pi}$ ein. Die Gleichungen 4) werden hierdurch:

$$8) \quad x = \operatorname{sin\,am}\left(\frac{2pp'Kz}{\pi}, k\right).$$

$$9) \quad y = \operatorname{sin\,am}\left(p' \frac{gh' - g'h}{h' - \frac{hi}{2}\frac{p'w}{p}} \frac{2Lz}{\pi}, l\right).$$

Es sind $p$ und $p'$ ganze Zahlen, mithin giebt die Gleichung 8) nach § 42 die Variabele $x$ explicite in Form einer algebraischen, rationalen oder irrationalen Function von $\operatorname{sin\,am}\frac{2Kz}{\pi}$. Es lässt sich nachweisen, dass dieses auch mit der rechten Seite der Gleichung 9) der Fall ist, so dass die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und

$y$ das Resultat der Elimination von $\sin am \frac{2Kz}{\pi}$ zwischen zwei algebraischen Gleichungen ist. Für den Fall, dass $p = 1$, $p' = 1$, lässt sich $y$ explicite als algebraische Function von $x$ darstellen.

In Folge der gebrauchten Bezeichnungen ist:

$$\sqrt{k} \sin am\left(\frac{2Kt}{\pi}, k\right) = \frac{\vartheta(t, w)_1}{\vartheta(t, w)_0}.$$

Für den Modul $l$ geht $w$ über in $\frac{L'}{L}$, definirt durch die Gleichung 6). Die Gleichung 9) lässt sich auf folgende Art schreiben:

$$10) \quad y\sqrt{l} = \frac{\vartheta(z_1, w_1)_1}{\vartheta(z_1, w_1)_0},$$

wo:

$$11) \quad z_1 = p' \frac{gh' - g'h}{h' - \frac{hi}{2}\frac{p'w}{p}} z, \; w_1 = \frac{2g'i + g\frac{p'w}{p}}{p' - \frac{hi}{2}\frac{p'w}{p}}.$$

Zur Vereinfachung sollen die beiden Fälle, ob $h$ eine grade oder ungrade Zahl, ist unterschieden werden. Wenn $h$ ungrade ist, so setze man in den Gleichungen 8), 10) und 11) $z = 2z'$. Die bemerkten Gleichungen geben dann:

$$12) \quad x = \sin am\left(\frac{4pp'Kz'}{\pi}, k\right).$$

$$13) \quad z_0 = p' \frac{gh' - g'h}{h' - hi\frac{p'w}{2p}} z', \; w_0 = \frac{g'i + g\frac{p'w}{2p}}{h' - hi\frac{p'w}{2p}}.$$

$$14) \quad y\sqrt{l} = \frac{\vartheta(2z_0, 2w_0)_1}{\vartheta(2z_0, 2w_0)_0}.$$

In Folge der Gleichungen 9) und 10) von § 40 lässt sich die Gleichung 14) auch wie folgt darstellen:

$$15) \quad y\sqrt{l} = \frac{\vartheta(z_0, w_0)_1 \, \vartheta(z_0, w_0)_2}{\vartheta(z_0, w_0)_0 \, \vartheta(z_0, w_0)_3}.$$

Die Betrachtung dieses Falles kommt auf den Fall, dass $h$ eine grade Zahl ist, zurück. Nach 12) ist $x$ eine algebraische Function von $\sin am \frac{2Kz'}{\pi}$; dieselbe Untersuchung, welche die rechte Seite der Gleichung 10) als algebraische Function von $\sin am \frac{2Kz}{\pi}$

ergiebt, zeigt auch, dass die rechte Seite der Gleichung 15) eine algebraische Function von $\sin \operatorname{am} \frac{2Kz'}{\pi}$ ist. Es soll desshalb in den Gleichungen 11) $h$ gradzahlig angenommen werden.

Haben die Zahlen $2g'$, $g$, $h'$ und $\frac{h}{2}$ gemeinschaftliche Factoren, so sei:

$$16) \quad 2g' = \gamma_1 sr', \; g = \delta_1 ss', \; h' = \alpha_1 rr', \; \frac{h}{2} = \beta_1 rs'.$$

Es ist hier von dem Falle abgesehn, dass die sämmtlichen vier Zahlen denselben Factor $m$ haben. Nach 16) gehn die Gleichungen 11) über in:

$$17) \quad \begin{cases} z_1 = ss'p' \dfrac{\alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1}{\alpha_1 - \beta_1 i \dfrac{p's'w}{pr'}} z, \\ w_1 = \dfrac{s}{r} \dfrac{\gamma_1 i + \delta_1 \dfrac{p's'w}{pr'}}{\alpha_1 - \beta_1 i \dfrac{p's'w}{pr'}}. \end{cases}$$

Da $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, ganze Zahlen sind, so setze man:

$$18) \quad \alpha_1 \delta_1 - \beta_1 \gamma_1 = n.$$

Wegen der Gleichungen 16) ist angenommen, dass keine der Zahlen $\alpha_1$ oder $\delta_1$ mit einer der beiden Zahlen $\beta_1$ oder $\gamma_1$ einen gemeinsamen Factor hat. Es lassen sich dann zwei Zahlen $\alpha$ und $\gamma$ mittelst der Gleichung:

$$19) \quad \alpha \delta_1 - \gamma \beta_1 = 1,$$

bestimmen. Setzt man der Einfachheit halber $\beta_1 = \beta$ und $\delta_1 = \delta$, so kann man die Gleichungen 18) und 19) durch das folgende System ausdrücken:

$$20) \quad \beta_1 = \beta, \; \delta_1 = \delta, \; \alpha_1 = \alpha n + \varepsilon \beta, \; \gamma_1 = \gamma n + \varepsilon \delta,$$

$$21) \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1,$$

wo $\varepsilon$ eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Verschwindet eine der Zahlen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$, so sei $\beta_1 = 0$, man muss dann die Gleichungen 17) und 18) direct behandeln. Mittelst der Gleichungen 5) von § 44 lassen sich die Fälle, dass eine der Zahlen $\alpha_1$, $\gamma_1$, $\delta_1$ verschwindet, auf $\beta_1 = 0$ reduciren.

Die beiden Gleichungen 17) nehmen mittelst der Gleichungen 20) folgende Formen an:

$$22) \quad z_1 = ss'p'\frac{z}{\alpha-\beta w' i}, \quad w_1 = \frac{s}{r}\frac{\gamma i+\delta w'}{\alpha-\beta w' i},$$

wo:

$$23) \quad w' = \frac{\frac{p's'w}{pr'}+\varepsilon i}{n}.$$

Sind die Argumente $z_1$ und $w_1$ durch die Gleichungen 22) bestimmt, so lassen sich in der Gleichung 10) auf der rechten Seite Zähler und Nenner als homogene Functionen von dem Grade $sr$ von:

$$24) \quad \vartheta\left(\frac{s'p'z}{\alpha-\beta w' i}, \frac{\gamma i+\delta w'}{\alpha-\beta w' i}\right)_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

darstellen. Da nun $\alpha\delta-\beta\gamma = 1$, so reducirt sich die in 24) aufgestellte Theta-Function in Folge der Systeme I — VI des vorigen § auf:

$$\varrho_1 \vartheta(s'p'z, w')_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

wo $\varrho_1$ von $z$ abhängt. Da der Factor $\varrho_1$ in allen Termen des Zählers und Nenners von $y\sqrt{l}$ vorkommt, diese Terme aber in Beziehung auf die Anzahl der vorkommenden Theta-Functionen homogen sind, so folgt:

$$25) \quad y\sqrt{l} = \frac{N}{D},$$

wo $N$ und $D$ homogene Functionen von:

$$\vartheta(s'p'z, w')_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, 3,$$

sind. Setzt man hierin für $w'$ seinen Werth aus 23), so zeigen die Betrachtungen zu Anfang dieses §, dass in 25) $N$ und $D$ homogene Functionen desselben Grades von Theta-Functionen mit den Argumenten $z$ und $w$ sind. Hieraus folgt unmittelbar, dass die rechte Seite der Gleichung 25) sich darstellen lässt durch die elliptischen Functionen mit dem Argumente $\frac{2Kz}{\pi}$ und dem Modul $k$. Es ist also auch die rechte Seite der Gleichung 25) oder 10) eine algebraische Function von $\sin\mathrm{am}\frac{2Kz}{\pi}$.

Nimmt man $\beta_1 = 0$, so geben die Gleichungen 17) und 18):

$$26) \quad \begin{cases} z_1 = ss'p'\delta_1 z, \quad w_1 = \dfrac{s}{r}\dfrac{\gamma_1 i + \delta_1 \dfrac{p's'w}{pr'}}{\alpha_1}, \\ \alpha_1\delta_1 = n. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben zu ganz analogen Betrachtungen Veranlassung wie die Gleichungen 22). Man kann sogar auf die einfacheren Gleichungen 26) die allgemeinen Gleichungen 11) reduciren und zwar durch relativ ziemlich einfache Rechnungen, welche nur auf der Vergleichung der Theta-Functionen mit reellen und imaginären Argumenten beruhn. Es ist hier ein etwas weiterer Weg eingeschlagen, da die Herstellung der Transformationsgleichungen ersten Grades für die Theorie der Theta-Functionen von besonderem Interesse ist.

Die Gleichungen 16) und 18) geben:

$$27) \quad gh' - 2g'\frac{h}{2} = nss'rr'.$$

Es soll $h$ gradzahlig angenommen werden. Ist die linke Seite der Gleichung 27) eine ungrade Primzahl, so müssen sich je vier der Factoren $n$, $s$, $s'$, $r$, $r'$ der rechten Seite, welche der Voraussetzung nach keine gemeinschaftlichen Theiler haben, auf die Einheit reduciren. Für die rationale Transformation ist ausserdem $p = 1$ und $p' = 1$. Es reduciren sich die verschiedenen Annahmen, zu welchen die Gleichung 27) Veranlassung giebt, auf zwei factisch verschiedene, auf welche man die übrigen zurückführen kann. Für $p = 1$, $p' = 1$, $r = 1$, $r' = 1$, $s = 1$ und $s' = 1$ ist nach 23):

$$w' = \frac{w + \varepsilon i}{n}.$$

Für $p = 1$, $p' = 1$, $n = 1$, $s = 1$, $r = 1$, und $r' = 1$ ist nach 23) $w' = s'w + \varepsilon i$. Da nun:

$$e^{-\pi(s'w+\varepsilon i)} = \pm e^{-\pi s'w},$$

so kommt die zweite Annahme auf den Uebergang von $q$ in eine Potenz von $q$ hinaus. Da:

$$e^{-\frac{w+\varepsilon i}{n}\pi}$$

nur $n$ Werthe hat, welche Werthe auch $\varepsilon$ annehmen möge, so führt die erste Annahme auf die Untersuchungen des § 38 zurück.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass das allgemeine Problem der algebraischen Transformation der elliptischen Functionen von der allgemeinen Transformation der Theta-Functionen abhängt und mittelst derselben ausgeführt werden kann.

Was die Resultate der beiden letzten §§ betrifft, so scheint *Jacobi* dieselben, wenn vielleicht auch in etwas anderer Form, schon vollständig entwickelt zu haben. In einem Briefe an *Crelle* vom 21. Juli 1828 (Crelle. Journal t. 3 p. 310) findet sich:

„Il conviendra peut-être à introduire dans l'analyse des fonctions elliptiques ce quotient $\frac{K'}{K}$ comme module au lieu de $k$. A l'égard de ce quotient j'ai trouvé

*que $k$ ne change de valeur, si l'on écrit au lieu de $\frac{K'}{K}$ l'expression*

$$\frac{bK + ib'K'}{aK + ia'K'} = \frac{KK' - i(abKK + a'b'K'K')}{aaKK + a'a'K'K'},$$

*$a$, $a'$, $b$, $b'$ étant de nombres entiers quelconques, $a$ un nombre impair, $b$ un nombre pair, tels que $ab' - a'b = 1$;*

théorème remarquable et qui doit être envisagé comme un des théorèmes fondamentaux de l'analyse des fonctions elliptiques" *).

Zwanzig Jahre später hat *Jacobi* eine weitere Andeutung gegeben in der Abhandlung: Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{ etc.}$$
$$2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} \text{ etc.}$$

Genüge leisten. (Crelle. Journ. t. 36 p. 97—112, Werke II p. 21—36).

---

*) Am Schluss dieses Briefes finden sich folgende Worte, welche fast mehr auf den Schreiber wie auf *Legendre* passen:

„Vous voyez, Monsieur, que la théorie des fonctions elliptiques est un vaste objet de recherches qui dans le cours de ses développemens embrassent presque toute l'algèbre, la théorie des intégrales définies et la science des nombres. Quel titre de gloire pour l'illustre auteur du traité des fonctions elliptiques, que d'avoir créé cette belle théorie et d'avoir allumé ce flambeau à la posterité.

Man findet am Ende dieser Abhandlung Folgendes: „Es müssen daher in dem Ausdruck $r = \frac{a\varrho + ib'}{a' + ib\varrho}$ die Constanten $a, b, a', b'$ immer so bestimmt werden können, dass

$$\frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + \cdots}{\sqrt{a' + ib\varrho}} = 2e^{\frac{1}{4}\varrho\pi} + 2e^{\frac{9}{4}\pi\varrho} + \text{etc.}$$

Die Theorie der elliptischen Transcendenten lehrt, dass diese Bestimmung auf unendlich viele Arten möglich ist. Es ergiebt sich nämlich aus der Theorie der unendlich vielen Formen der Transcendente $\Theta$, dass die vorstehende Gleichung immer gilt, wenn $a$, $a'$ und $b$ ungrade sind, und $a'$ und $b$ durch 4 dividirt nicht denselben Rest lassen. *Das Zeichen der den Nenner bildenden Quadratwurzel in der vorstehenden Gleichung hängt von dem Werthe der in der Theorie der quadratischen Reste mit* $\left(\frac{a'}{b}\right)$ *bezeichneten Grösse ab.* Ein doppelter Gang der Untersuchung, welchen man einschlagen kann, führt zu dieser Zeichenbestimmung entweder mittelst einer Kettenbruchentwicklung oder der von *Gauss* in seiner Abhandlung *Summatio serierum quarundam singularium* betrachteten Summen. Die vorstehende Gleichung wird, wenn $a$ und $b$ ungrade ist, immer gelten, wofern man nur die eine Seite derselben mit einer 8ten Wurzel der Einheit multiplicirt. Wenn von den Zahlen $a$ und $b$ die eine grade, die andere ungrade ist, hat man die Gleichung:

$$\delta \frac{1 + 2e^{\pi r} + 2e^{4\pi r} + 2e^{9\pi r} + \cdots}{\sqrt{a' + ib\varrho}} = 1 \pm 2e^{\pi\varrho} + 2e^{4\pi\varrho} \pm 2e^{9\pi\varrho} + \cdots,$$

wo $\delta$ eine achte Wurzel der Einheit bedeutet, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem von den Zahlen $a'$ und $b$ die eine grade die andere ungrade oder beide ungrade sind".

Einer Anmerkung zu Folge hat *Jacobi* die auf das Vorstehende bezügliche Theorie der Theta-Functionen in Vorträgen ausführlich behandelt; der wenige Jahre nach Publication der angeführten Abhandlung erfolgte Tod des grossen Mathematikers hat eine selbständige Darlegung seiner Theorie leider vereitelt. Die Ideen, welche die oben angeführten Worte von *Jacobi* enthalten, finden sich theilweise ausgeführt bei:

*Gordan*: Ueber die Transformation der $\Theta$-Functionen. (Giessen 1863).

Es findet sich dort eine Gleichung aufgestellt, welche der Gleichung 26) von § 44 entspricht und zwar nur für die Bedingungen 22). Die in Gleichung 16) von § 44 auftretende Quantität $w_m$ wird durch einen Kettenbruch bestimmt, ferner die partielle Differentialgleichung 4) zur Anwendung gebracht, um eine analoge Gleichung wie 23) herzustellen. Endlich geschieht die Bestimmung der Constanten $c$ basirt auf die von *Jacobi* angeführte Abhandlung von *Gauss*. Auffallend ist, dass der Name von *Jacobi* nur bei ganz nebensächlichen Puncten sich angeführt findet, dass jedes Citat, jede Andeutung vermieden ist, welche auf die primitive Quelle des Inhalts hinweist. Die Bestimmung der Constanten $c$, welche bei den linearen Transformationen auftritt, findet sich ziemlich ausführlich bei:

*Thomae*: Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Theta-Functionen einer Veränderlichen. 2. Aufl. (Halle 1873) pag 183 u. f.

Die fundamentale Gleichung für die Transformation der Theta-Functionen hat *Thomae* nach dem Vorgange von *Hermite* so aufgestellt, dass sich aus derselben die Gleichungen für die linearen Transformationen unmittelbar ergeben. Es scheint indessen nicht, dass diese Methode einen besonderen Vorzug vor dem in § 44 befolgten Verfahren hat, die an sich lobenswerthe grössere Kürze verdeckt den eigentlichen Ursprung der Transformation.

Eine der frühesten und bedeutendsten Untersuchungen über die Transformation der Theta-Functionen enthält die Abhandlung:

*Hermite*: Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques. (Journal de Math. Deuxième série. T. III. Année 1858 p. 26—36).

In Verbindung hiermit, wenn auch schon mehr in das Gebiet der Zahlentheorie übergehend, stehen die beiden Abhandlungen desselben Verfassers: „Sur la théorie des fonctions elliptiques et ses applications à l'arithmetique“ (Comptes Rendus t. 45 1862 p. 11—18, 85—91. Journal de Math. Deux. sér. t. VII p. 25—40) und „Sur les

théorèmes de Mr. Kronecker relatifs aux formes quadratiques". (Journ. d. M. 2. sér. t. IX p. 145—158).

Namentlich die erste Abhandlung von *Hermite* ist in einer Reihe von bemerkenswerthen Schriften und Abhandlungen zur Verwendung gekommen, von denen, mit Einschluss des oben erwähnten Buches von *Thomae* die folgenden ausgezeichneten Publicationen zu erwähnen sind:

*Richelot*: Sur la théorie des fonctions elliptiques est sur les équations différentielles du calcul des variations. (Comptes Rendus 1859 t. 49 p. 641—645).

Diese Abhandlung ist eine der ersten, welche eine ziemliche Anzahl von Gleichungen enthält, die sich auf lineare Transformationen beziehn. Die kurze Mittheilung enthält keine Beweise. Weiter gehende Untersuchungen findet man in der folgenden durch ungemeinen Scharfsinn ausgezeichneten Monographie:

*Betti*: La teorica delle funzioni ellitiche. (Annali di Matematica. Tomo III Anno 1860 p. 65—159, 298—310, — über Transformationen erster Ordnung vergleiche man p. 142 —, Tomo IV Anno 1861 p. 26—45, 57—70 und 297—336).

*Königsberger*: Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Leipzig 1868.

Ein Supplement hierzu bildet die Abhandlung desselben Verfassers „Die linearen Transformationen der Hermite'schen $\varphi$-Functionen" (Mathematische Annalen t. III p. 1—10). Weitere Ausführungen enthalten die „Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen" (Borchardt Journal t. 72 p. 176—254). Ferner ist noch zu erwähnen:

*Königsberger*: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Theil 2. Leipzig 1874.

Bei diesen verschiedenen Untersuchungen über die Theta-Functionen macht sich der Mangel einer einheitlichen Bezeichnung unangenehm bemerkbar. Kaum zwei Schriftsteller stimmen vollständig überein. Am wenigsten möchte sich die namentlich von *Hermite* und *Betti* gebrauchte Bezeichnungsweise empfehlen die

Theta-Functionen mit zwei Indices zu versehn, wodurch bei Functionen mit einem Argument eine unnöthige Complication der Formeln hervorgerufen wird, wie ein Blick auf p. 126 von T. III der Annali di Matematica zeigt. (Roma 1860).

Zur allgemeinen Transformation der elliptischen Functionen sind noch folgende Abhandlungen anzumerken, deren Resultate nicht ausschliesslich auf die Theorie der Theta-Functionen basirt sind.*)

*Sanio*: De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione, quae ad numerum parem pertinet, commentatio. (Crelle. Journ. t. 14 p. 1—50).

*Hermite*: Sur la théorie des transcendantes a différentielles algébriques. (Journal de Mathém. t. IX Année 1844 p. 361 f. und Comptes Rendus t. XVIII p. 1141 f.).

*Hermite*: Extraits de deux lettres à M. Jacobi. (Crelle. Journ. t. 32 p. 283—293; *Jacobi* Werke t. 1 p. 397—407).

Eine namentlich auf die „Fundamenta“ sich stützende Darstellung findet man bei:

*Gudermann*: Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. (Dreizehnter Abschnitt. Crelle. Jour. t. 19 p. 244—285 und Neunzehnt. A. ibid. t. 25 p. 336—394).

---

*) Elementare Betrachtungen über Transformation und Multiplication enthalten die folgenden Aufsätze, welche sämmtlich in dem „Archiv für Mathematik und Physik“, herausg. v. *Grunert*, enthalten sind.

*U. H. Meyer:* Sur les fonctions elliptiques. (Theil 16 p. 305—408, Th. 17 p. 85—120).

*Essen:* Ergänzung des ersten Jacobi'schen Theorems von den elliptischen Functionen der ersten Art. (Theil 21 p. 241—248, 418—422).

Behandelt namentlich die Transformationen grader Ordnung.

*Baehr:* Sur la transformation des functions elliptiques de la première espèce. (Th. 33 p. 354—368).

*Baehr:* Sur les formules pour la multiplication des fonctions elliptiques de la première espèce. (Th. 36 p. 125—176).

Ungeachtet einer gewissen Originalität leiden diese Arbeiten an dem Fehler, dass die Ergebnisse älterer Arbeiten keine genügende Beachtung gefunden haben, so dass sich *Meyer* (Theil 22 p. 474—477) gegen *Essen* zu einer Prioritäts-Reclamation versteigen konnte in Beziehung auf Untersuchungen, die ihrem Wesen nach schon längst von *Ivory* und *Sanio* ausgeführt worden waren. Die nicht ganz unverdienstliche Arbeit von *Meyer* leidet an dem grossen Uebelstande einer Ueberladung neuer Bezeichnungen und neuer Benennungen, beide gleich unnöthig und der Lecture hinderlich.

## § 46. Ueber die Differentialgleichungen, welchen die Zähler und die Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln und Multiplicationsformeln genügen.

Nach den Untersuchungen in § 35 (pag 234) wird der Differentialgleichung:

$$1) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

durch den folgenden Werth von $y$ genügt:

$$2) \quad y\sqrt{l} = x\frac{b_m + b_{m-1}k^2x^2 + \ldots + k^{2m}x^{2m}}{(1 + b_1x^2 + b_2x^4 + \ldots + b_m x^{2m})\sqrt{k^{2m-1}}}.$$

Die Bestimmung der Coefficienten $b_1, b_2, \ldots b_m$, welche auf algebraischem Wege wegen erdrückender Weitläufigkeiten fast unausführbar erscheint, hat *Jacobi* veranlasst den Zähler und Nenner auf der rechten Seite der Gleichung 2) unter einem Gesichtspunct zu betrachten, welcher von der Auffassungsweise der „Fundamenta" gänzlich verschieden ist. *Jacobi* hat Differentialgleichungen aufgestellt, welchen die bemerkten Zähler und Nenner genügen. Diese Differentialgleichungen umfassen zwei verschiedene Untersuchungen, je nachdem es sich um eine partielle oder um eine gewöhnliche Differentialgleichung handelt.

Was die partielle Differentialgleichung anbelangt, so ist derselben zuerst im Journal von Crelle (t. 3 p. 403) erwähnt und zwar mit den Worten: „Je suis parvenu à résoudre un problème dont la difficulté avait éludé long-tems tous mes efforts, savoir de trouver l'expression générale et algébrique des formules de multiplication." In der „Suite des notices sur les fonctions elliptiques" (Crelle. Journ. t. 4 p. 185) hat *Jacobi* ohne Beweis eine partielle Differentialgleichung mitgetheilt, welcher die Zähler und Nenner sowohl der Transformations- wie der Multiplicationsgleichungen genügen. Einer Andeutung (l. c. p. 186) zu Folge scheint *Jacobi* durch die partielle Differentialgleichung, welcher die vier Theta-Functionen genügen, zu dem folgenden Resultate gelangt zu sein.

Zur Vereinfachung setze man:

$$3) \quad x\sqrt{k} = t, \quad k + \frac{1}{k} = \alpha,$$

wodurch die Gleichung 2) übergeht in:

$$4)\quad y\sqrt{l} = t\frac{B_m + B_{m-1}t^2 + \ldots + B_1 t^{2m-2} + B t^{2m}}{B + B_1 t^2 + B_2 t^4 + \ldots + B_m t^{2m}},$$

oder:

$$5)\quad \begin{cases} U = t(B_m + B_{m-1}t^2 + \ldots + B_1 t^{2m-2} + B t^{2m}), \\ V = B + B_1 t^2 + \ldots + B_m t^{2m}, \end{cases}$$

gesetzt:

$$y = \frac{U}{V}.$$

Es ist dann:

$$6)\quad B = \sqrt{\frac{l'}{k'M}},\ B_m = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{ll'}{kk'M}}.$$

Für $2m+1 = n$ genügt jede der Quantitäten $U$ und $V$ aus 5) der partiellen Differentialgleichung:

$$7)\quad 2n(\alpha^2 - 4)\frac{dH}{d\alpha} =$$

$$n(n-1)Ht^2 + (n-1)(\alpha t - 2t^3)\frac{dH}{dt} + (1 - \alpha t^2 + t^4)\frac{d^2H}{dt^2}.$$

Auf diese wenigen Formeln beschränkt sich die Mittheilung von *Jacobi*. Zur Vereinfachung nehme man in $\vartheta(z, q)$:

$$8)\quad w = \frac{K'}{K},\ q = e^{-\pi w},$$

also:

$$9)\quad \vartheta(z, q) = \sum(-1)^s e^{-\pi w s^2 + 2sxi}.$$

Diese Gleichung giebt unmittelbar:

$$10)\quad 4\frac{d\vartheta(z, q)}{dw} = \pi\frac{d^2\vartheta(z, q)}{dz^2}.$$

Die vorstehende partielle Differentialgleichung gilt, wie man sehr leicht findet, für jede der vier Theta-Functionen.

Man nehme in der Gleichung 10):

$nz$ statt $z$, $nw$ statt $w$;

$z$ unverändert, $\frac{w}{n} - \frac{2ri}{n}$ statt $w$,

wo $r$ eine ganze Zahl bedeutet. In beiden Fällen nimmt die Gleichung 10) folgende Form an:

$$11)\quad 4n\frac{d\Theta}{dw} = \pi\frac{d^2\Theta}{dz^2}.$$

Zu Folge der Bedeutung von $w$ aus 8) ist in 11) $\Theta$ gleich einer der Functionen:

$$\vartheta_\mu(nz, q^n),\ \vartheta_\mu(z, e^{\frac{2r\pi i}{n}} q^{\frac{1}{n}}),$$

wo $\mu = 0, 1, 2, 3$ ist. Diese Functionen bilden aber nach den §§ 37 und 39 die Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen für die ungrade Primzahl $n$. Es genügt die Resultate einer Transformation genauer zu betrachten. Auf die beiden Gleichungen 6) und 14) von § 37 nämlich:

$$12)\quad \begin{cases} \vartheta(nz, q^n) = \dfrac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{-\frac{n-1}{2}}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta(z + \dfrac{r\pi}{n}, q), \\ \vartheta_1(nz, q^n) = \dfrac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod \vartheta_1(z + \dfrac{r\pi}{n}, q), \end{cases}$$

wende man die Gleichungen 6) auf pag. 108 für $x = z$ an, d. h die Gleichungen:

$$\vartheta(0)^2\vartheta(z+y)\vartheta(z-y) = \vartheta(z)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta_1(z)^2\vartheta_1(y)^2,$$
$$\vartheta(0)^2\vartheta_1(z+y)\vartheta_1(z-y) = \vartheta_1(z)^2\vartheta(y)^2 - \vartheta(z)^2\vartheta_1(y)^2.$$

Hierdurch ergiebt sich, wenn die Gleichungen 12) noch durch $\vartheta(z, q)^n$ dividirt werden:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta(nz, q^n)}{\vartheta(z, q)^n} = \dfrac{Q}{\vartheta(0)^{n-1}} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \dfrac{\vartheta_1(z)^2}{\vartheta(z)^2} \dfrac{\vartheta_1\left(\frac{\pi r}{n}\right)^2}{\vartheta\left(\frac{\pi r}{n}\right)^2}\right], \\ \dfrac{\vartheta_1(nz, q^n)}{\vartheta(z, q)^n} = \dfrac{(-1)^{n-1} Q \vartheta_1(z)}{\vartheta(0)^{n-1}\vartheta(z)} \prod \left[\dfrac{\vartheta_1\left(\frac{\pi r}{n}\right)^2}{\vartheta\left(\frac{\pi r}{n}\right)^2} - \dfrac{\vartheta_1(z)^2}{\vartheta(z)^2}\right], \end{cases}$$

wo:

$$Q = \frac{\varphi(q^n)}{\varphi(q)^n} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta\left(\frac{\pi r}{n}\right)^2.$$

Auf den rechten Seiten der Gleichungen 13) ist zur Verein-

fachung das zweite Argument $q$ weggelassen. Die erste Gleichung 13) giebt $z = 0$ gesetzt:

$$\frac{\vartheta(0, q^n)}{\vartheta(0)^n} = \frac{Q}{\vartheta(0)^{n-1}},$$

wodurch $Q$ bestimmt ist. Man setze hieraus den Werth von $Q$ in die Gleichungen 13), führe ferner rechts die elliptischen Functionen ein und setze:

$$\sin \operatorname{am} \frac{2Kz}{\pi} = x, \quad x\sqrt{k} = t,$$

es folgt dann:

$$14) \quad \begin{cases} \vartheta(nz, q^n) \dfrac{\vartheta(0)^{n-1}}{\vartheta(z)^n} = \dfrac{\vartheta(0, q^n)}{\vartheta(0)} \Pi\left(1 - t^2 \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2rK}{n}\right), \\ \vartheta_1(nz, q^n) \cdot \dfrac{\vartheta(0)^{n-1}}{\vartheta(z)^n} = \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} t \dfrac{\vartheta(0, q^n)}{\vartheta(0)} \Pi(\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2rK}{n} - t^2). \end{cases}$$

Die rechts stehenden Terme dieser Gleichungen kann man als Zähler und Nenner des Werthes von $y\sqrt{l}$ in 4) für $2m+1 = n$ ansehn, man erhält dann, von einem constanten Factor abgesehn, für $B$ und $B^m$ dieselben Werthe wie in 6). Es ist nämlich

$$\frac{\vartheta(0, q^n)}{\vartheta(0)} = \sqrt{\frac{l'L}{k'K}}$$

d. i. nach Gleichung 19) auf p. 251):

$$\frac{\vartheta(0, q^n)}{\vartheta(0)} = \sqrt{\frac{l'}{nk'M}}.$$

Dieser Term unterscheidet sich von $B$ in 6) nur durch den constanten Factor $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Zur Vereinfachung werde die rechte Seite der ersten Gleichung 14) durch $H$ bezeichnet. Es ist dann:

$$\vartheta(nz, q^n) \frac{\vartheta(0)^{n-1}}{\vartheta(z)^n} = H,$$

oder umgekehrt:

$$15) \quad \vartheta(nz, q^n) = H \frac{\vartheta(z)^n}{\vartheta(0)^{n-1}}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung genügt der partiellen Differentialgleichung 11). Man schliesst hieraus unmittelbar, dass der Gleichung 11) durch:

$$16) \quad \Theta = H\frac{\vartheta(z)^n}{\vartheta(0)^{n-1}},$$

genügt wird, wo $H$ der Zähler oder Nenner der rechten Seite der Gleichung 4) für $n = 2m+1$ ist.

Nimmt man in der Gleichung 10) $nz$ statt $z$, so wird dieselbe:

$$17) \quad 4n^2\frac{d\vartheta(nz,q)}{dw} = \pi\frac{d^2\vartheta(nz,q)}{dz^2}.$$

Nun ist aber nach § 42:

$$\frac{\vartheta(nz,q^n)}{\vartheta(z)^{n^2}}\vartheta(0)^{n^2-1},$$

dem Nenner von $\sin\mathrm{am}\frac{2nKz}{\pi}$ proportional. Wird dieser Nenner durch $H_1$ bezeichnet, so genügt folglich:

$$\frac{H_1\vartheta(z)^{n^2}}{\vartheta(0)^{n^2-1}},$$

der partiellen Differentialgleichung 17). Dasselbe gilt, wenn statt $H_1$ der Zähler von $\sin\mathrm{am}\frac{2nKz}{\pi}$ genommen wird.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass die Gleichungen 11) und 16) gelten, wenn $H$ der Zähler oder Nenner der Transformations- oder Multiplicationsgleichungen ist, für die Multiplication hat man einfach $n^2$ statt $n$ zu setzen.

Da $\vartheta(0) = \sqrt{\frac{2k'K}{\pi}}$, so lässt sich der Werth von $\Theta$ in 16) auch wie folgt darstellen:

$$\Theta = H\frac{\vartheta(z)^n}{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Substituirt man diesen Werth von $\Theta$ in die Gleichung 11), dividirt auf beiden Seiten durch $\pi$, so folgt:

$$\frac{4n}{\pi}\left(\frac{dH}{dw}+\frac{nH}{\vartheta(z)}\frac{d\vartheta(z)}{dw}-\frac{n-1}{2}H\frac{d\log k'K}{dw}\right) =$$

$$\frac{d^2H}{dz^2}+2n\frac{dH}{dz}\frac{1}{\vartheta(z)}\frac{d\vartheta(z)}{dz}+n(n-1)H\left[\frac{1}{\vartheta(z)}\frac{d\vartheta(z)}{dz}\right]^2$$

$$+\frac{nH}{\vartheta(z)}\frac{d^2\vartheta(z)}{dz^2}.$$

Nimmt man in dieser Gleichung:

$$\frac{4d\vartheta(z)}{dw} = \pi\frac{d^2\vartheta(z)}{dz^2},$$

so lässt sich dieselbe auf folgende Form bringen:

$$18)\quad \frac{4n}{\pi}\frac{dH}{dw} = \frac{d^2H}{dz^2} + 2n\frac{dH}{dz}\frac{1}{\vartheta(z)}\frac{d\vartheta(z)}{dz}$$
$$+ n(n-1)H\left[\frac{2}{\pi}\frac{d\log k'K}{dw} - \frac{d^2\log\vartheta(z)}{dz^2}\right].$$

In Folge der Gleichungen 13) auf p. 170 und der Gleichung 17) auf p. 171 ist:

$$19)\quad \frac{dK}{dk} = -\frac{K}{k} + \frac{E}{kk'^2},\qquad d\frac{K'}{K} = \frac{dw}{dk} = \frac{-\pi}{2kk'^2K^2}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich unmittelbar die folgenden:

$$20)\quad \begin{cases} \dfrac{dk}{dw} = \dfrac{-2kk'^2K^2}{\pi}, \\ \dfrac{dk'K}{dw} = \dfrac{dk'K}{dk}\dfrac{dk}{dw} = \dfrac{2k'K^2}{\pi}(K-E), \\ \dfrac{d\log k'K}{dw} = \dfrac{2K}{\pi}(K-E). \end{cases}$$

Nimmt man in der Gleichung 16) auf pag. 163 $z$ statt $x$, so wird dieselbe:

$$21)\quad \frac{d\log\vartheta(z)}{dz} = \frac{2K}{\pi}E\left(\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right) - \frac{2E}{\pi}\frac{2Kz}{\pi}.$$

Durch Differentiation nach $z$ folgt hieraus:

$$\frac{d^2\log\vartheta(z)}{dz^2} = \left(\frac{2K}{\pi}\right)^2\Delta^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi} - \frac{2E}{\pi}\frac{2K}{\pi}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichung, der Gleichungen 20) und 21) nimmt die Gleichung 18) folgende Form an:

$$\frac{4n}{\pi}\frac{dH}{dw} = \frac{d^2H}{dz^2} + n(n-1)H\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2\sin^2\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}$$
$$+ 2n\left[\frac{2K}{\pi}E\left(\operatorname{am}\frac{2Kz}{\pi}\right) - \frac{2E}{\pi}\frac{2Kz}{\pi}\right]\frac{dH}{dz}.$$

Führt man links mittelst der ersten Gleichung 20) $k$ statt $w$ als unabhängige Variabele ein, setzt ferner:

$$22) \quad \frac{2Kz}{\pi} = u,$$

so nimmt die partielle Differentialgleichung für $H$ folgende einfachere Form an:

$$23) \quad \begin{aligned} -2nkk'^2\frac{dH}{dk} &= \frac{d^2H}{du^2} + n(n-1)Hk^2\sin^2\mathrm{am}\,u \\ &\quad + 2n\left[E(\mathrm{am}\,u) - \frac{uE}{K}\right]\frac{dH}{du}. \end{aligned}$$

Um die von *Jacobi* aufgestellte Form dieser Gleichung zu erhalten muss man $\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u$ statt $u$ als unabhängige Variabele einführen.

Da $\sin\mathrm{am}\,u$ von $k$ abhängig ist, so ist es nöthig den Differentialquotienten dieser Quantität in Beziehung auf $k$ darzustellen. Es sei:

$$24) \quad \int_0^{\varphi} \frac{ds}{\sqrt{1-k^2\sin^2 s}} = \frac{2Kz}{\pi}.$$

Setzt man in der Gleichung 3) pag. 169 $\varphi$ statt $\alpha$, so folgt:

$$25) \quad \frac{dF(\varphi)}{dk} = -\frac{F(\varphi)}{k} + \frac{E(\varphi)}{kk'^2} - \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\Delta(\varphi)},$$

wo $F(\varphi)$ und $E(\varphi)$ die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung mit dem Modul $k$ sind. In der Gleichung 24) sehe man $\varphi$ als von $k$ abhängig an und differentiire unter dieser Voraussetzung nach $k$, hierdurch folgt:

$$\frac{1}{\Delta(\varphi)}\frac{d\varphi}{dk} + \frac{dF(\varphi)}{dk} = \frac{2z}{\pi}\frac{dK}{dk}.$$

Mittelst der Gleichungen 19) und 25) erhält man hieraus:

$$26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\Delta(\varphi)}\frac{d\varphi}{dk} &= \frac{1}{k}\left[F(\varphi) - \frac{2Kz}{\pi}\right] + \frac{1}{kk'^2}\left[E(\varphi) - \frac{2Ez}{\pi}\right] \\ &\quad + \frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\Delta(\varphi)}. \end{aligned}$$

Nach 24) ist $F(\varphi) = \frac{2Kz}{\pi}$. Nimmt man wieder wie in 22) $\frac{2Kz}{\pi} = u$, so giebt die Gleichung 24) $\varphi = \mathrm{am}\,u$, wodurch die Gleichung 26) übergeht in:

$$\frac{\frac{d\,\mathrm{am}\,u}{dk}}{\Delta\,\mathrm{am}\,u} = -\frac{1}{kk'^2}\left[E(\mathrm{am}\,u) - \frac{uE}{K}\right] + \frac{k\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u}{k'^2\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}.$$

Durch Multiplication mit $\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u$ folgt hieraus:

$$\frac{d\sin\mathrm{am}\,u}{dk} = -\left[E(\mathrm{am}\,u) - \frac{uE}{K}\right]\frac{\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{kk'^2} + \frac{k}{k'^2}\sin\mathrm{am}\,u\cos^2\mathrm{am}\,u,$$

und weiter:

$$27)\quad \begin{cases} 2kk'^2\dfrac{d\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u}{dk} = (1+k^2-2k^2\sin^2\mathrm{am}\,u)\sin\mathrm{am}\,u.\sqrt{k} \\ -2\left[E(\mathrm{am}\,u) - \dfrac{uE}{K}\right]\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u.\sqrt{k}. \end{cases}$$

In die Gleichung 23) führe man $k$ und $\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u$ statt $k$ und $u$ als unabhängige Variabelen ein, setze $t = \sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u$. Der Differentialquotient von $H$ in Beziehung auf die explicite vorkommende Quantität $k$ werde eingeklammert. Es ist dann:

$$28)\quad \begin{cases} \dfrac{dH}{dk} = \left(\dfrac{dH}{dk}\right) + \dfrac{dH}{dt}\dfrac{dt}{dk}, \\ \dfrac{dH}{du} = \dfrac{dH}{dt}\dfrac{dt}{du}, \quad \dfrac{d^2H}{du^2} = d\,\dfrac{\dfrac{dH}{dt}\dfrac{dt}{du}}{dt}\dfrac{dt}{du}. \end{cases}$$

Wegen:

$$29)\quad t = \sqrt{k}\sin\mathrm{am}\,u$$

ist nach 27):

$$30)\quad 2kk'^2\frac{dt}{du} = (1+k^2-2kt^2)\,t - 2\left[E(\mathrm{am}\,n) - \frac{uE}{K}\right]\sqrt{\left[1 - \frac{1+k^2}{k}t^2 + t^4\right]k}$$

ferner:

$$31)\quad \frac{dt}{du} = \sqrt{\left[1 - \frac{1+k^2}{k}t^2 + t^4\right]k}.$$

Mittelst der Gleichungen 28)—31) nimmt die Gleichung 23) folgende Form an, wenn durch $k$ dividirt wird:

$$-2nk'^2\left(\frac{dH}{dk}\right) = (1-\frac{1+k^2}{k}t^2+t^4)\frac{d^2H}{dt^2}$$
$$+(n-1)\left(\frac{1+k^2}{k}t-2t^3\right)\frac{dH}{dt}+n(n-1)Ht^2.$$

Setzt man endlich $1+k^2 = k\alpha$, also:

$$-k'^2\left(\frac{dH}{dk}\right) = (\alpha^2-4)\frac{dH}{d\alpha},$$

so ergiebt sich wieder die Gleichung 7). Es ist selbstverständlich, dass die Differentiation nach $\alpha$ sich nur auf die Coefficienten $B$, $B_1 \ldots$ $\ldots B_m$ in den Gleichungen 6) bezieht, wenn in 7) $H = U$ oder $H = V$ genommen wird.

Für die Multiplicationsformeln treten an Stelle der Gleichungen 4) und 7) die folgenden:

$$32)\quad y = \frac{B_{\frac{n^2-1}{2}}t+\ldots.+B_1t^{n^2-2}+Bt^{n^2}}{B+B_1t^2+B_2t^4+\ldots+B_{\frac{n^2-1}{2}}t^{n^2-1}},$$

$$33)\quad \begin{cases} 2n^2(\alpha^2-4)\dfrac{dH}{d\alpha} = n^2(n^2-1)Ht^2 \\ +(n^2-1)(\alpha t-2t^3)\dfrac{dH}{dt}+(1-\alpha t^2+t^4)\dfrac{d^2H}{dt^2}. \end{cases}$$

In 32) ist $n = 2m+1$. Setzt man den Nenner der rechten Seite der Gleichung 32) gleich $H$, so müssen in der Gleichung 33) die Factoren der Potenzen von $t$ durch diese Substitution auf beiden Seiten einander gleich sein. Man erhält so:

$$B = \sqrt{n},\ B_1 = 0,\ 3.4B_2+n^2(n^2-1)B = 0,$$
$$5.6B_3+4(n^2-4)\alpha B_2 = 0,$$
$$7.8B_4+6(n^2-6)\alpha B_3+(n^2-4)(n^2-5)B_2 =$$
$$2n^2(\alpha^2-4)\frac{dB_3}{d\alpha}.$$

Es ist allgemein von $r = 3$ an bis $r = \frac{n^2-3}{2}$:

$$(2r+1)(2r+2)B_{r+1}+2r(n^2-2r)\alpha B_r$$
$$+(n^2-2r+1)(n^2-2r+2)B_{r-1} = 2n^2(\alpha^2-4)\frac{dB_r}{d\alpha}.$$

Für die letzten Coefficienten bestehn die Gleichungen:

$$2.3.B_{\frac{n^2-3}{2}}+(n^2-1)\alpha B_{\frac{n^2-1}{2}} = 0,\ B_{\frac{n^2-1}{2}} = \sqrt{n^3}.$$

Diese Gleichungen hat *Jacobi* (Crelle. J. t. 4 p. 186) aufgestellt. Eine Herleitung der Differentialgleichung 32) findet man in der früher erwähnten Abhandlung von *Betti*. (Annali d. M. T. IV p. 32 u. f.). Einige Bemerkungen über die Integration der partiellen Differentialgleichung 32) von *Cayley* unter dem Titel „Note sur les fonctions elliptiques" finden sich im Journal von Crelle (t. 37 p. 58—60).

Statt durch eine partielle Differentialgleichung hat *Jacobi* die Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen durch gewöhnliche Differentialgleichungen definirt. Die „De functionibus ellipticis commentatio" enthält mit Beziehung hierauf folgenden Satz: „Quod sane est theorema memorabile, satis reconditum, *numeratorem et denominatorem substitutionis, U, V singulos definiri posse per aequationem differentialem tertii ordinis.*" (Crelle. J. t. 4 p. 377).

Im vorliegenden Falle haben $U$ udd $V$ folgende Bedeutungen. Setzt man $x = \sin\operatorname{am} u$ und

$$34) \quad \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, l\right) = \frac{U}{V},$$

so sei:

$$25) \quad \begin{cases} U = \dfrac{x}{M}(1 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \ldots + A_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}), \\ V = 1 + B_1 x^2 + B_2 x^4 + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}. \end{cases}$$

Diese Werthe von $U$ und $V$ unterscheiden sich nur unwesentlich von den in 5) aufgestellten. Die Gleichungen 13) und 16) von § 39 geben:

$$A_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\sin^2\operatorname{am} 4r\omega}, \quad \frac{A_{\frac{n-3}{2}}}{A_{\frac{n-1}{2}}} = -\sum_1^{\frac{n-1}{2}} \sin^2\operatorname{am} 4r\omega,$$

$$B_{\frac{n-1}{2}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} k^{n-1} \prod \sin^2\operatorname{am} 4r\omega,$$

$$\frac{l}{k^n M^2} = \prod \sin^4\operatorname{am} 4r\omega,$$

folglich:

$$36)\quad \begin{cases} \dfrac{A_{\frac{n-3}{2}}}{A_{\frac{n-1}{2}}} = -\sum_{r=1}^{r=\frac{n-1}{2}} \sin^2 \operatorname{am} 4r\omega = -\varrho, \\ B_{\frac{n-1}{2}} = A_{\frac{n-1}{2}} \cdot \dfrac{l}{kM^2}, \end{cases}$$

wo in der ersten Gleichung $\varrho$ zur Abkürzung für die Summe gesetzt ist.

*Jacobi* hat seinen Satz durch Betrachtung der Transformationsformeln und der elliptischen Integrale zweiter Gattung gefunden. Mit lebendigem Interesse wurde die schöne Entdeckung *Jacobi's* 17 Jahre nach ihrer Veröffentlichung von *Eisenstein* wieder aufgenommen. *Eisenstein* ist mehrfach, unter Anwendung sehr einfacher Principien, auf den bemerkten Gegenstand zurückgekommen und hat in die Resultate *Jacobi's* sehr allgemeine Betrachtungen hineingetragen, durch welche sich die meisten Arbeiten des ungemein begabten Mathematikers so sehr auszeichnen. Die Untersuchungen von *Eisenstein* sind enthalten in: „Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen" (Crelle. J. t. 32 p. 59—70, Math. Abh. 159—170). „Ueber die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen." (Crelle. J. t. 35 p. 147—152, M. A. p. 207—212). Die folgendende Deduction der *Jacobi'schen* Gleichungen ist den „Beiträge etc." entnommen.

Man setze zur Abkürzung:

$$37)\quad \begin{cases} \varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4, \\ \psi(y) = A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4. \end{cases}$$

Zwischen $x$ und $y$ bestehe die Differentialgleichung:

$$38)\quad \frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}.$$

Es sei $P = 0$ ein algebraisches Integral der Differentialgleichung 38) der Art, dass die Function $P$ nur ganze Potenzen von von $x$ und $y$ enthält und in Beziehung auf $x$ vom $n$ten Grade ist. Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Wurzeln von $P = 0$ nach $x$ aufgelöst; bezeichnet man den constanten Factor von $x^n$ durch $C_0$, so ist:

$$P = C_0 . (x - x_1)(x - x_2) \ldots . (x - x_n),$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_n$ von $y$ abhängen. Die vorstehende Gleichung nach $y$ differentiirt giebt:

$$39)\quad \begin{cases} \frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = \sum \frac{1}{x_r - x}\frac{dx_r}{dy}, \\ d\frac{\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}}{dy} = \sum \frac{1}{x_r - x}\frac{d^2x_r}{dy^2} - \sum \frac{1}{(x_r - x)^2}\left(\frac{dx_r}{dy}\right)^2. \end{cases}$$

Ist nun $x$ eine der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_n$, so giebt die Gleichung 38):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\psi(y)}},$$

$$2\frac{d^2x}{d^2y} = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)\,\psi(y)}}\frac{dx}{dy} - \frac{\sqrt{\varphi(x)}\,\psi'(y)}{\sqrt{\psi(y)^3}} = \frac{\varphi'(x)}{\psi(y)} - \frac{\sqrt{\varphi(x)}\,\psi'(y)}{\sqrt{\psi(y)^3}}.$$

Setzt man hierin $x = x_r$, so lassen sich die Gleichungen 39) auf folgende Art darstellen:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\psi(y)}}\sum \frac{\varphi(x_r)}{x_r - x},$$

$$d\frac{\frac{1}{P}\frac{dP}{dy}}{dy} = -\frac{\psi'(y)}{2\sqrt{\psi(y)^3}}\sum \frac{\varphi(x_r)}{x_r - x} + \frac{1}{2\psi(y)}\sum \frac{\varphi'(x_r)}{x_r - x} - \frac{1}{\psi(y)}\sum \frac{\varphi(x_r)}{(x_r - x)^2}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar, $\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} = \frac{d\log P}{dy}$ gesetzt,:

$$40)\quad 2\psi(y)\frac{d^2\log P}{dy^2} + \psi'(y)\frac{d\log P}{dy} = \sum \frac{\varphi'(x_r)}{x_r - x} - 2\sum \frac{\varphi(x_r)}{(x_r - x)^2}.$$

Nun ist nach dem Satze von *Taylor*:

$$\varphi(x_r) = \varphi(\overline{x_r - x} + x) = \varphi(x) + \frac{x_r - x}{1}\varphi'(x) + \frac{(x_r - x)^2}{2}\varphi''(x) + \frac{(x_r - x)^3}{6}\varphi'''(x) + \frac{(x_r - x)^4}{24}\varphi^{IV}(x),$$

$$\varphi'(x_r) = \varphi'(x) + \frac{x_r - x}{1}\varphi''(x) + \frac{(x_r - x)^2}{2}\varphi'''(x) + \frac{(x_3 - x)^3}{6}\varphi^{IV}(x),$$

also:

41) $$\begin{cases} \dfrac{\varphi'(x_r)}{x_r-x} - \dfrac{2\varphi(x_r)}{(x_r-x)^2} = -\dfrac{\varphi'(x)}{x_r-x} - \dfrac{2\varphi(x)}{(x_r-x)^2} \\ + (x_r-x)\dfrac{\varphi'''(x)}{6} + (x_r-x)^2\dfrac{\varphi^{IV}(x)}{12}. \end{cases}$$

Nach 37) ist:

$$\frac{\varphi'''(x)}{6} = D + 4Ex, \quad \frac{\varphi^{IV}(x)}{12} = 2E,$$

also:

$$(x_r-x)\frac{\varphi'''(x)}{6} + (x_r-x)^2\frac{\varphi^{IV}(x)}{12} = Dx_r + 2Ex^2{}_r - Dx - 2Ex^2.$$

Wendet man diese Gleichung und die Gleichung 41) auf die Gleichung 40) an, so wird dieselbe:

42) $$2\psi(y)\frac{d^2\log P}{dy^2} + \psi'(y)\frac{d\log P}{dy} = -\varphi'(x)\sum\frac{1}{x_r-x}$$
$$-2\varphi(x)\sum\frac{1}{(x_r-x)^2} - nDx - 2nEx^2 + D\Sigma x_r + 2E\Sigma x_r{}^2.$$

Wegen der Bedeutung von $P$ ist aber auch:

$$\frac{d\log P}{dx} = \sum\frac{1}{x-x_r} = -\sum\frac{1}{x_r-x},$$
$$\frac{d^2\log P}{dx^2} = -\sum\frac{1}{(x_r-x)^2}.$$

Hierdurch wird die Gleichung 42) in folgende transformirt:

43) $$\begin{cases} 2\psi(y)\dfrac{d^2\log P}{dy^2} + \psi'(y)\dfrac{d\log P}{dy} = \varphi'(x)\dfrac{d\log P}{dx} + \\ 2\varphi(x)\dfrac{d^2\log P}{dx^2} - nDx - 2nEx^2 + D\Sigma x_r + 2E\Sigma x^2{}_r, \end{cases}$$

oder auch:

$$2\psi(y)\frac{d^2\log P}{dy^2} + \psi'(y)\frac{d\log P}{dy} = 2\sqrt{\varphi(x)}\,d\frac{\sqrt{\varphi(x)}\dfrac{d\log P}{dx}}{dx}$$
$$-nDx - 2nEx^2 + D\Sigma x_r + 2E\Sigma x^2{}_r.$$

Diese Gleichung lässt sich einfacher auf folgende Art darstellen:

44) $$\begin{cases} 2\psi(y)\dfrac{d^2\log P}{dy^2} + \psi'(y)\dfrac{d\log P}{dy} = 2\dfrac{d^2\log P}{du^2} \\ -nDx - 2nEx^2 + D\Sigma x_r + 2E\Sigma x^2{}_r, \end{cases}$$

wo die neue Variabele $u$ durch die Gleichung

$$45) \quad \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = du$$

definirt ist. Setzt man $\frac{dy}{\sqrt{\psi(y)}} = dv$, so geht die linke Seite von 44) über in: $\frac{d^2 \log P}{dv^2}$.

Es sei nun $P$ linear in Beziehung auf $y$:

$$46) \quad P = U - Vy,$$

wo $U$ und $V$ Functionen von $x$ oder $u$ sind. Sieht man $U$ und $V$ als Functionen von $u$ an, so sollen die Differentialquotienten derselben nach $u$ durch $U'$, $V'$, $U''$, $V''$ .. bezeichnet werden. Die Gleichung 46) giebt dann:

$$\frac{d \log P}{dy} = -\frac{V}{U - Vy}, \quad \frac{d^2 \log P}{dy^2} = -\left(\frac{V}{U - Vy}\right)^2,$$

$$\frac{d^2 \log P}{du^2} = \frac{U'' - V''y}{U - Vy} - \left(\frac{U' - V'y}{U - Vy}\right)^2.$$

Durch Substitution dieser Differentialquotienten, der Werthe von $\psi(y)$ und $\psi'(y)$ aus 37) nimmt die Gleichung 44) endlich die Form an:

$$\begin{aligned} 47) \quad & 2(A' + B'y + C'y^2 + D'y^3 + E'y^4)V^2 \\ & + (B' + 2C'y + 3D'y^2 + 4E'y^3)(U - Vy)V = \\ & 2(U' - V'y)^2 - 2(U - Vy)(U'' - V''y) \\ & + (nDx + 2nEx^2)(U - Vy)^2 \\ & - (D\Sigma x_r + 2E\Sigma x^2{}_r)(U - Vy)^2. \end{aligned}$$

Aus dieser allgemeinen von *Eisenstein* aufgestellten Gleichung lassen sich die *Jacobi'schen* Differentialgleichungen herleiten.

Zur Vereinfachung nehme man in 37):

$$48) \quad \begin{cases} A = 1, \; B = D = 0, \; C = -(1 + k^2), \; D = k^2, \\ A' = \frac{1}{M^2}, \; B' = D' = 0, \; C' = -\frac{1 + l^2}{M^2}, \; D' = \frac{l^2}{M^2}. \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen 45) und 38) geben dann:

$$x = \sin \mathrm{am} u, \; y = \sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, l\right).$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit 34) und 35) geben:

$$\frac{A_{\frac{n-1}{2}}}{M}x^n - B_{\frac{n-1}{2}}yx^{n-1} + \frac{A_{\frac{n-3}{2}}}{M}x^{n-2} \ldots = 0,$$

was die Gleichung $P = 0$ ist. Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\Sigma x_r = \frac{B_{\frac{n-1}{2}}}{A_{\frac{n-1}{2}}}My, \quad \Sigma x_r^2 = \left(\frac{B_{\frac{n-1}{2}}}{A_{\frac{n-1}{2}}}My\right)^2 - 2\frac{A_{\frac{n-3}{2}}}{A_{\frac{n-1}{2}}},$$

d. i. nach 36):

$$\Sigma x_r = \frac{ly}{kM}, \quad \Sigma x_r^2 = \left(\frac{ly}{kM}\right)^2 + 2\varrho.$$

Nach 48) und der vorstehenden Gleichung wird die Gleichung 47):

$$\frac{1-(1+l^2)y^2+l^2y^4}{M^2}V^2 + \frac{-(1+l^2)y+2l^2y^3}{M^2}(U-Vy)V =$$
$$(U'-V'y)^2-(U-Vy)(U''-V''y)+nk^2(U-Vy)^2\sin^2\mathrm{am}\,u$$
$$-k^2(U-Vy)^2\left[\left(\frac{l}{kM}\right)^2y^2+2\varrho\right].$$

Da die Factoren gleicher Potenzen von $y$ auf beiden Seiten einander gleich sein müssen, so ergeben sich fünf Gleichungen, von denen zwei identisch sind, welche aus den Factoren von $y^3$ und $y^4$ folgen. Die übrigen Gleichungen sind:

$$49)\quad \begin{cases} k^2(2\varrho - n\sin^2\mathrm{am}\,u)\,V^2 + \dfrac{l^2U^2}{M^2} = V'^2 - VV'', \\ k^2(2\varrho - n\sin^2\mathrm{am}\,u)\,U^2 + \dfrac{V^2}{M^2} = U'^2 - UU'', \\ 2k^2(2\varrho - n\sin^2\mathrm{am}\,u)\,UV + \dfrac{1+l^2}{M^2}UV = 2U'V' - UV'' - VU''. \end{cases}$$

Die Elimination von $U''$ und $V''$ zwischen diesen Gleichungen giebt:

$$(VU' - V'U)^2 = \frac{(V^2-U^2)(V^2-l^2U^2)}{M^2},$$

was auf die Substitution von $y = \frac{U}{V}$ in die Gleichung 37) hinauskommt. Man kann also statt der dritten Gleichung 49) die folgende setzen:

$$50) \quad VU' - V'U = \frac{\sqrt{(V^2 - U^2)(V^2 - l^2U^2)}}{M}.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen 49) lässt sich mittelst der Gleichung 50) eine der Functionen $U$ oder $V$ eliminiren, für die übrig bleibende Function ergiebt sich dann eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{V'^2 - VV'' - k^2(2\varrho - n\sin^2 \mathrm{am}\, u)V^2}{\varrho^2 V^2} M^2 = S^2$$

und $U = V\sin\sigma$, so erhält man aus der ersten Gleichung 49) und der Gleichung 50):

$$S = \sin\sigma, \quad \sigma' = \frac{\Delta(\sigma)}{M}, \quad \Delta(\sigma) = \sqrt{1 - l^2\sin^2\sigma},$$

folglich:

$$S' = \cos\sigma . \sigma' = \frac{\cos\sigma\, \Delta(\sigma)}{M}$$

und hieraus:

$$S'^2 = \frac{(1 - S^2)(1 - l^2S^2)}{M^2},$$

was die Differentialgleichung dritter Ordnung für $V$ ist.

Setzt man die Werthe von $U$ und $V$ aus den Gleichungen 35) in die beiden ersten Gleichungen 49), darauf $x = \sin \mathrm{am} u$, so erhält man Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten $A_1, .. A_{\frac{n-1}{2}}, B_1, .. B_{\frac{n-1}{2}}$, ein Verfahren, welches indessen wegen seiner Weitläufigkeit kaum einen Vorzug verdienen möchte vor den algebraischen Untersuchungen in § 35.

In der ersten der oben bemerkten Abhandlungen hat *Eisenstein* sich nicht allein auf die Form $U - Vy$ von $P$ beschränkt. Die Form in welcher *Euler* das Additionstheorem dargestellt hat [§ 23 Gleichungen 6) und 10)] giebt für $P$ die Form $P = Ly^2 + 2My + N$, so dass der Differentialgleichung 38) durch die Gleichung $P = 0$ genügt wird. Eine weitere Fortsetzung dieser Rechnungen scheint wegen der Complication der Formeln unthunlich zu sein.

Die Gleichungen 49) hat *Gudermann* auf ähnliche Art wie *Jacobi* hergeleitet. Man findet die Differentialgleichungen für Zähler

und Nenner von $\sin \mathrm{am} nu$, wenn $n$ ungrade ist im Journal von *Crelle* (t. 19 p. 282—285) aufgestellt, die entsprechenden Gleichungen für die Substitutionen $n^{\text{ten}}$ Grades finden sich am Ende der „Theorie der Modular-Functionen". (Crelle. J. t. 25 p. 207—212).

Mit Beziehung auf die Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher $U$ und $V$ genügen, hat die 1829 geschriebene Bemerkung *Jacobi's* ihre Gültigkeit noch nicht verloren. „Integrale completum aequationum differentialium tertii ordinis, quibus functiones $U$, $V$ definiuntur, in promtu esse non videtur". (Crelle. J. t. 4 p. 377).

## § 47. Die Modulargleichungen. Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen dem primitiven und dem transformirten Modul. Der Multiplicator und seine Bestimmung mittelst der Modulargleichung.

Setzt man:

$$1) \quad y = \frac{x}{\sqrt{lk^{2m-1}}} \frac{b_m + b_{m-1} k^2 x^2 + .. k^{2m} x^{2m}}{1 + b_1 x^2 + b_2 x^4 + .. b_m x^{2m}}$$

in:

$$2) \quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

so lassen sich nach dem vorhergehenden §, oder auch, mit Hülfe der algebraischen Principien von § 35 die Coefficienten $b_1, b_2, \ldots b_m$ bestimmen, wenn der Modul $l$ in Function des Moduls $k$ bekannt ist. Nach pag. 235 sind $b_1, b_2, .. b_m$ durch lineare Gleichungen bestimmt, deren Coefficienten von $k$ und $l$ abhängig sind. Die vollständige Lösung des in § 35 aufgestellten Transformations-Problems erfordert also die Bildung der Relation zwischen $k$ und $l$. Diese Relation, welche nach § 35 die Form einer algebraischen Gleichung hat, führt nach dem Vorgange von *Jacobi* den Namen „*Modulargleichung*". (Fund. p. 66).

In den „Rech. s. l. fonct. ell." hat schon *Abel* bemerkt, dass zwischen $l$ und $k$ eine algebraische Gleichung vom Grade $2m+2$ stattfindet, (Crelle. J. t. 3 p. 176, Oeuv. t. 1. p. 238) wo $2m+1$ eine beliebige ungrade Zahl ist; einige weitere Bemerkungen über diese Gleichung sind im „Précis" (Chap. IV § 4) enthalten. Die wenigen

gehaltvollen Bemerkungen scheinen nur die Vorläufer sehr umfassender und tiefgehender Untersuchungen gewesen zu sein, deren Darlegung *Abel* leider nicht vergönnt war.

Es scheint fast, dass ein Hauptzweck der Herstellung der Modulargleichung ursprünglich darin bestand, die in 1) enthaltene Transformationsgleichung, wenn auch nicht wirklich auszuführen, doch möglichst vollständig zu definiren.*) Diese Auffassungsweise der Modulargleichung ist später dahin modificirt worden, dass dieselbe für die Theorie der algebraischen Gleichungen von hervorragender Bedeutung ist. Es liegt in der Modulargleichung für die Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades eine algebraische Gleichung vom Grade $n+1$ vor, deren Wurzeln sämmtlich bekannt sind. Von diesem Gesichtspunkt aus hat die Bildung von Modulargleichungen ein besonderes Interesse und der mathematischen Untersuchung ein weites Feld erschlossen. Es können hier nur einige der wesentlichsten Eigenschaften der Modulargleichungen angeführt werden, deren Theorie noch fortwährend, mehr wie ein anderer Zweig der elliptischen Functionen, die Aufmerksamkeit der Mathematiker in Anspruch nimmt.

Die sehr weitläufigen Rechnungen, welche die Herstellung von Modulargleichungen, selbst geringeren Grades, nach sich zieht, haben *Jacobi* schon sehr frühe dahin geführt, die algebraische Gleichung durch eine Differentialgleichung zu ersetzen. In einem Briefe von 2. April 1828 theilt *Jacobi* an *Crelle* mit, (Journ. t. 3 p. 194) dass die endliche Relation zwischen $k$ und $l$ sich durch eine Differentialgleichung dritter Ordnung ersetzen lässt, welchen Werth auch $m$ in der Gleichung 1) haben möge. Dieses merkwürdige Resultat

*) Im IV Bande von Crelle's Journal bemerkt *Jacobi* auf p. 185 in Beziehung auf die im vorhergehenden § aufgestellte partielle Differentialgleichung:

L'équation modulaire étant supposée connue, l'équation (aux différences partielles) suffit pour trouver toutes les quantités $B$, $B_1$ .... exprimées en fonctions rationelles des deux modules $k$ et $l$. On pourra donc dire en quelque sorte que cette équation contienne la solution générale du problème de la transformation des fonctions elliptiques, et sous une forme tout à fait différente de celle sous laquelle nous l'avons fait connaitre, Mr. *Abel* et moi, dans nos recherches sur cette matière.

Resultat findet sich auf p. 74—79 der „Fundamenta“ abgeleitet. Man kann das dort eingeschlagene Verfahren noch etwas vereinfachen und verallgemeinern.

In Folge der Gleichungen 13) und 17) von § 27 ist:

$$3) \quad \frac{d\frac{K'}{K}}{dk} = -\frac{\pi}{2kk'^2K^2}.$$

Es seien $a$, $b$, $a'$, $b'$ Constanten. Setzt man:

$$4) \quad S = \frac{a'K+b'K'}{aK+bK'}, \quad Q = aK+bK',$$

so ist nach 3)

$$5) \quad \frac{dS}{dk} = -\frac{\pi(ab'-a'b)}{2kk'^2Q^2}.$$

In Folge der Gleichungen 11) auf p. 170 genügen $K$ und $K'$ derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Da nun $Q = aK+bK'$, so ist auch:

$$k(1-k^2)\frac{d^2Q}{dk^2}+(1-3k^2)\frac{dQ}{dk}-kQ = 0,$$

oder durch $Q$ dividirt:

$$6) \quad \frac{k(1-k^2)}{Q}\frac{d^2Q}{dk^2}+\frac{1-3k^2}{Q}\frac{dQ}{dk}-k = 0.$$

Durch Elimination von $Q$ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 5) folgt für $S$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Nimmt man in 5) die Logarithmen beider Seiten, so ist:

$$\log Q = -\frac{1}{2}\log\frac{dS}{dk}+\frac{1}{2}\log\frac{a'b-ab'}{2}\pi-\frac{1}{2}\log k$$
$$-\frac{1}{2}\log(1-k^2).$$

Diese Gleichung differentiire man nach $k$ und setze zur Abkürzung:

$$7) \quad d\frac{\log\frac{dS}{dk}}{dk} = \frac{\frac{d^2S}{dk^2}}{\frac{dS}{dk}} = T.$$

Es ergiebt sich dann:

$$8) \quad \frac{1}{Q}\frac{dQ}{dk} = -\frac{T}{2}-\frac{1}{2}\frac{1-3k^2}{k(1-k^2)}.$$

Eine weitere Differentiation dieser Gleichung liefert:

$$9)\quad \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dk^2} = \left(\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dk}\right)^2 - \frac{dT}{2dk} + \frac{1+3k^4}{2k^2(1-k^2)^2}.$$

Mittelst der Gleichungen 8) und 9) lassen sich $\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{dk^2}$ und $\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dk}$ aus der Gleichung 6) eliminiren, es folgt:

$$10)\quad 2\frac{dT}{dk} - T^2 = \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von $T$ aus 7) ergiebt sich für $S$ eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Nimmt man statt $k$ eine andere unabhängige Variabele, so ist aus 7):

$$T = \frac{d^2S}{dS\,dk} - \frac{d^2k}{(dk)^2},$$

$$dT = \frac{d^3S}{dS\,dk} - \frac{(d^2S)^2}{(dS^2)\,dk} - \frac{d^2S\,d^2k}{dS(dk)^2} - \frac{d^3k}{(dk)^2} + \frac{2(d^2k)^2}{(dk)^3}.$$

Diese Werthe von $T$ und $dT$ in 10) substituirt, darauf mit $(dk)^2$ multiplicirt, transformiren diese Gleichung in:

$$11)\quad \frac{2d^3S}{dS} - 3\left(\frac{d^2S}{dS}\right)^2 = \frac{2d^3k}{dk} - 3\left(\frac{d^2k}{dk}\right)^2 + \left(\frac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 (dk)^2.$$

Sind $a_1$, $b_1$, $a'_1$, $b'_1$ Constanten, setzt man ferner:

$$12)\quad S = \frac{a'_1 L + b'_1 L'}{a_1 L + b_1 L'},$$

sind $l$ und $l'$ die Moduli der Integrale $L$ und $L'$, $l^2 + l'^2 = 1$, so erhält man genau wie die Gleichung 11):

$$\frac{2d^3S}{dS} - 3\left(\frac{d^2S}{dS}\right)^2 = \frac{2d^3l}{dl} - 3\left(\frac{d^2l}{dl}\right)^2 + \left(\frac{1+l^2}{l-l^3}\right)^2 (dl)^2.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 11) folgt:

$$13)\quad \begin{cases} \dfrac{2d^3l}{dl} - 3\left(\dfrac{d^2l}{dl}\right)^2 + \left(\dfrac{1+l^2}{l-l^3}\right)^2 (dl)^2 = \\ \dfrac{2d^3k}{dk} - 3\left(\dfrac{d^2k}{dk}\right)^2 + \left(\dfrac{1+k^2}{k-k^3}\right)^2 (dk)^2. \end{cases}$$

Die beiden Werthe von $S$ aus 4) und 12) geben:

$$14)\quad \frac{a'_1 L + b'_1 L'}{a_1 L + b_1 L'} = \frac{a'K + b'K'}{aK + bK'},$$

oder kürzer:

$$mKL+m'K'L'+m''KL'+m'''K'L = 0.$$

Diese Gleichung, welche drei arbiträre Constanten enthält und eine endliche Relation zwischen $k$ und $l$ ist, bildet das vollständige Integral der Differentialgleichung 13). „Quam integrationem altissimae indaginis esse censemus". (Fund. 79). Die Gleichung 14) hat genau dieselbe Form wie die Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass der Differentialgleichung 2) durch eine algebraische Relation zwischen $x$ und $y$ genügt wird. Die Differentialgleichung 13) giebt also, mit Beziehung auf algebraische Transformationen, die allgemeinste Beziehung zwischen dem primitiven und dem transformirten Modul.

Die Gleichungen 10) und 11) von § 36 geben:

$$15) \quad \frac{L'}{L} = \frac{2pg'i + p'g\frac{K'}{K}}{ph' - \frac{p'hi}{2}\frac{K'}{K}},$$

$$16) \quad \frac{1}{M} = \frac{gh' - g'h}{ph' - \frac{p'hi}{2}\frac{K'}{K}}\frac{L}{K}.$$

Vertauscht man in der Gleichung 3) $k$ mit $l$, so ist:

$$d\frac{L'}{L} = -\frac{\pi}{2ll'^2L^2}.$$

Hieraus folgt:

$$d\frac{L'}{L}\frac{dl}{dk} = d\frac{L'}{L}\frac{dl}{dk} = -\frac{\pi}{2ll'^2L^2}\frac{dl}{dk}.$$

Mit Rücksicht auf diese Gleichung und die Gleichung 3) giebt die Gleichung 15) nach $k$ differentiirt:

$$\frac{1}{ll'^2L^2}\frac{dl}{dk} = \frac{pp'(gh' - g'h)}{\left(ph' - \frac{p'hi}{2}\frac{K'}{K}\right)^2}\frac{1}{kk'^2K^2}.$$

Durch Elimination von $\frac{L}{K}$ zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 16) folgt endlich:

$$17) \quad \frac{1}{M^2} = \frac{gh' - g'h}{pp'}\frac{kk'^2}{ll'^2}\frac{dl}{dk}.$$

Für die in 1) enthaltene Substitution ist $p = 1$, $p' = 1$. Setzt man $gh' - g'h = n$, so giebt die Gleichung 18):

$$19) \quad \frac{1}{M^2} = n\frac{kk'^2}{ll'^2}\frac{dl}{dk}.$$

Für eine rationale Transformation $n^{ter}$ Ordnung ist nach § 45 $gh' - g'h = n$. Ist also die Relation zwischen $k$ und $l$ bekannt, so ist in 2) die Quantität $M$ für eine rationale Substitution eine algebraische, rationale Function von $k$ und $l$. Wird $l$ zwischen dieser Gleichung und der Modulargleichung eliminirt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen $k$ und $M$. Die Quantität $M$ heisst der *Multiplicator* und die bemerkte algebraische Gleichung zwischen demselben und $k$ die *Multiplicatorgleichung*. Auf die Multiplicatorgleichung hat zuerst *Jacobi* (Crelle. Journ. t. 3 p. 308) aufmerksam gemacht und dieselbe für den besonderen Fall $n = 5$ wirklich ausgeführt.*)

Für die in 13) aufgestellte Differentialgleichung lassen sich leicht auf folgende Weise einige bemerkenswerthe Eigenschaften herleiten. Es sei:

$$20) \quad H = \frac{2d^3p}{dp} - 3\left(\frac{d^2p}{dp}\right)^2 + \left(\frac{1+p^2}{p-p^3}\right)^2 (dp)^2.$$

---

*) Bei dieser Gelegenheit sei einer Differentialgleichung erster Ordnung erwähnt, welche einige Analogie mit der Gleichung 10) zeigt und von *Gudermann* (Crelle. J. t. 18 p. 359) angemerkt worden ist. Es sei:

$$p_1 = aE + b(K' - E'), \; p = aK + bK'.$$

Mittelst der Gleichungen 13) in § 27 findet man leicht:

$$\frac{dp_1}{dk} = \frac{p_1 - p}{k}, \; \frac{dp}{dk} = \frac{p_1 - p}{k} + \frac{kp_1}{k'^2}.$$

Es ist folglich:

$$p\frac{dp_1}{dk} - p_1\frac{dp}{dk} = \frac{2pp_1 - p^2}{k} - \frac{p_1^2}{kk'^2}.$$

Setzt man also:

$$\frac{p_1}{p} = s,$$

so ist:

$$\frac{ds}{dk} = -\frac{1}{k} + \frac{2s}{k} - \frac{s^2}{kk'^2}$$

und:

$$s = \frac{aE + b(K' - E')}{aK + bK'}$$

das vollständige Integral dieser Differentialgleichung, wo $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ die Integrationsconstante bedeutet.

Man setze statt $p$ eine Function $P$ von $p$, wodurch $H$ in $H_1$ übergeht. Es ist dann:

$$H_1 = \frac{2d^3p}{dp} - 3\left(\frac{d^2p}{dp}\right)^2 + \left[\frac{2d^3P}{dP} - 3\left(\frac{d^2P}{dP}\right)^2 + \left(\frac{1+P^2}{P-P^3}\right)^2 (dP)^2\right](dp)^2.$$

Soll nun $H = H_1$ sein, so giebt die vorstehende Gleichung in Verbindung mit 20):

$$21) \quad \frac{2d^3P}{dP} - 3\left(\frac{d^2P}{dP}\right)^2 + \left(\frac{1+P^2}{1-P^2}\right)^2 \left(\frac{dP}{P}\right)^2 = \left(\frac{1+p^2}{p-p^3}\right)^2.$$

Lässt sich $P$ mittelst dieser Differentialgleichung bestimmen, so bleibt die rechte Seite der Gleichung 20) unverändert, wenn $p$ durch $P$ ersetzt wird. Der Gleichung 21) genügen die Werthe $P = \frac{1}{p}$ und $P = \sqrt{1-p^2}$. Es bleibt also die rechte Seite von 20) unverändert, wenn $p$ durch $\frac{1}{p}$ oder $\sqrt{1-p^2}$ ersetzt wird. Wendet man dieses auf die Differentialgleichung 13) an, so folgt, dass dieselbe unverändert bleibt, wenn $k$ und $l$ gleichzeitig ersetzt werden durch $\frac{1}{k}$ und $\frac{1}{l}$, oder durch $\sqrt{1-k^2}$ und $\sqrt{1-l^2}$. Man schliesst nach dem Vorgange von *Jacobi* hieraus, dass die Modulargleichung, wegen der symmetrischen Form der Gleichung 13), unverändert bleibt, durch Vertauschung von $k$ und $l$, oder wenn $k$ durch $\frac{1}{k}$, $l$ durch $\frac{1}{l}$ ersetzt wird, oder auch, wenn $\sqrt{1-k^2}$ an Stelle von $k$ und $\sqrt{1-l^2}$ an Stelle von $l$ tritt. Weitere Substitutionen an Stelle von $k$ und $l$ in der Gleichung 13), welche sich mittelst der Differentialgleichung 21) aufstellen lassen, scheinen im Verhältniss zu den eben bemerkten nur von untergeordneter Bedeutung zu sein. (Fund. p. 73).

## § 48. Die Modulargleichungen nach Jacobi und Sohnke.

Die in § 35 nach *Jacobi* entwickelten Principien der algebraischen Transformation reduciren die Herstellung der Gleichung zwischen $k$ und $l$ auf ein Eliminationsproblem. Die schon mehr-

fach bemerkte Weitläufigkeit der Rechnung scheint der Grund zu sein, wesshalb man diesen Weg zur Herstellung von Modulargleichungen nicht weiter verfolgt hat, so dass die betreffenden Gleichungen, welche den Transformationen dritter und fünfter Ordnung entsprechen, die einzig direct hergeleiteten geblieben sind.*) Die „Fundamenta" enthalten, mit Ausnahme der in vorigen § aufgestellten Differentialgleichung nur einige Bemerkungen über die Modulargleichungen, welche sich aus der Differentialgleichung folgern lassen. Auf Anregung von *Jacobi* wurde sieben Jahre nach der Publication der „Fundamenta" in der Abhandlung„ Aequationes modulares pro transformatione Functionum Ellipticarum" (Crelle. Jour. t. 16 p. 97—130) von *Sohnke* der Versuch gemacht, die Herstellung der Modulargleichungen auf eine Anzahl fester Regeln zu basiren. Die angewandte Methode bedingt die Berechnung jedes einzelnen Termes der zu bildenden Gleichung. Dieses Verfahren, welchem ein sehr primitiver Character kaum abgesprochen werden kann, ist durch kein kürzeres ersetzt worden; man ist, was die rationale Form betrifft, nicht über die von *Sohnke* berechneten Gleichungen, welche den Transformationen von den Ordnungen 3, 5, 7, 11, 13, 17 und 19 entsprechen, hinausgegangen.**) Eine ausführliche Darstellung des Inhalts der bemerkten Abhandlung ist insofern nicht zulässig, als Entwickelungen vorkommen, die ihres Umfangs halber sich nicht wohl reproduciren lassen. Es sollen nur die wesentlichsten Puncte der noch sehr der Ausbildung und Vereinfachung bedürftigen Theorie der Modulargleichungen hervorgehoben werden. Der Einfachheit halber sollen wieder die Gleichungen 1) und 2) des vorhergehen § zu Grunde gelegt werden, mit der Beschränkung, dass der Grad $2m+1$ der Transformation eine ungrade Primzahl ist. Die Existenz der Modulargleichung folgt unmittelbar aus § 35; nach § 45 kann in den Theta-Functionen das Argument $q$ für eine Transformation $n^{\text{ten}}$ Grades, wo $n$ eine Primzahl ist, nur $n+1$

---

*) Man vergleiche hierüber die Note X.

**) In nicht rationaler Form hat *Schröter* die Modulargleichungen noch für die Transformationen von den Ordnungen 23, 29 und 31 aufgestellt.

Werthe annehmen, denen dann $n+1$ Werthe des transformirten Moduls entsprechen. Nach pag. 293 ergeben sich diese $n+1$ Werthe, wenn in der Gleichung für $k$

$$1) \quad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}$$

die Quantität $q$ ersetzt wird durch:

$$q^n, \; q^{\frac{1}{n}}, \; \alpha q^{\frac{1}{n}}, \; \ldots . \; \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

wo $\alpha$ eine imaginäre Wurzel von $\alpha^n = 1$ ist. Ist $F(k, l) = 0$ die Modulargleichung, so folgt ein Werth von $l$, wenn $q$ in 1) durch $q^n$ ersetzt wird. Die Gleichung $F(k, l) = 0$ giebt folglich:

$$2) \quad F\left[\frac{\vartheta_2(0, q)^2}{\vartheta_3(0, q)^2}, \; \frac{\vartheta_2(0, q^n)^2}{\vartheta_3(0, q^n)^2}\right] = 0.$$

Da nun dem vorhergehen § die Gleichung $F(k, l) = 0$ durch Vertauschung von $k$ mit $l$ unverändert bleibt, also auch die Form annehmen kann $F(l, k) = 0$, so lässt sich die Gleichung 2) auch schreiben:

$$F\left[\frac{\vartheta_2(0, q^n)^2}{\vartheta_3(0, q^n)^2}, \; \frac{\vartheta_2(0, q)^2}{\vartheta_3(0, q)^2}\right] = 0.$$

Setzt man hierin $\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}}$ statt $q$, wo $\mu = 0, 1, \ldots n-1$ und $\alpha^n = 1$ ist, so folgt:

$$F\left[\frac{\vartheta_2(0, q)^2}{\vartheta_3(0, q)^2}, \; \frac{\vartheta_2(0, \alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^2}{\vartheta_3(0, \alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^2}\right] = 0.$$

Diese Gleichung zeigt unmittelbar in Verbindung mit 2), dass bei Herstellung der Modulargleichung $F(k, l) = 0$ man nur nöthig hat die Wurzel hervorzuheben, welche dem Uebergang von $q$ in $q^n$ entspricht; lässt sich eine algebraische Gleichung zwischen:

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}, \; \sqrt{l} = \frac{\vartheta_2(0, q^n)}{\vartheta_3(0, q^n)}$$

herstellen, so ist dieselbe die gesuchte Modulargleichung.

Nach Gleichung 33) auf pag. 253 ist:

$$\sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_0^{n-1} \operatorname{sin\,coam} \frac{4rK}{n} = \prod_0^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,coam} \frac{4rK}{n} \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,coam} \frac{4rK}{n}.$$

Da nun: $\operatorname{sin\,coam}(4K-u) = \operatorname{sin\,coam} u$, so ist auch:

$$\prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,coam} \frac{4rK}{n} = \prod_{\frac{n+1}{2}}^{n-1} \operatorname{sin\,coam} 4\frac{n-r}{n}K = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,coam} \frac{4rK}{n}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\operatorname{sin\,coam} u = 1$ für $u = 0$, folgt nun:

$$\sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin^2\,coam} \frac{4rK}{n}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der ersten Gleichung 27) pag. 254 giebt:

$$3) \quad \sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin^2\,coam} \frac{4rK}{n} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin^2\,coam} \frac{2rK}{n}.$$

Die erste Doppelgleichung 13) auf pag. 285 giebt:

$$4) \quad \sqrt{\frac{l}{k^n}} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin^2\,coam} \frac{4r\omega}{n} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin^2\,coam} \frac{2r\omega}{n}.$$

Nach pag. 291 kann $\omega$ die Werthe annehmen:

$$\frac{iK'}{n}, \frac{K+iK'}{n}, \frac{K+2iK'}{n}, \ldots \frac{K+(n-1)iK'}{n}.$$

Wegen der Gleichung 3) erhält man alle Werthe von $l$, wenn in 4) $\omega$ noch den Werth $\frac{K}{n}$ annimmt.

Zur Vereinfachung setze man $\sqrt[4]{k} = u$, $\sqrt[4]{l} = v$, die Gleichung 4) giebt dann allgemein:

$$5) \quad \frac{v}{u^n} = \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,coam} \frac{4r\omega}{n}.$$

Bezeichnet man die verschiedenen Werthe von $v$ durch $v_1$, $v_2$, .. $v_{n+1}$ so erhält man aus 5) das System folgender Gleichungen:

$$6)\quad \begin{cases} v_1 = u^n \prod_1^{\frac{n-1}{2}} \operatorname{sin\,coam} \dfrac{4rK}{n}, \\ v_2 = u^n \prod \operatorname{sin\,coam} \dfrac{4riK'}{n}, \\ v_3 = u^n \prod \operatorname{sin\,coam} 4r \dfrac{K+iK'}{n}, \\ \quad\vdots \\ v_{n+1} = u^n \prod \operatorname{sin\,coam} 4r \dfrac{K+(n-1)iK'}{n}. \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen sind die biquadratischen Wurzeln der verschiedenen Werthe des transformirten Moduls bestimmt. Da $\operatorname{sin\,coam}(4riK'-u) = \operatorname{sin\,coam} u$, so kann man auch in 5) für $\omega$ folgende Werthe nehmen:

$$\frac{K}{n}, \frac{iK'}{n}, \frac{K \pm iK'}{n}, \ldots \frac{K \pm \frac{n-1}{2} iK'}{n}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 3), 4) und 6) geben die Gleichungen 16) und 17) auf pag. 325, wenn $k = u^4$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{1}{u^4}\right)^{\frac{n^2-1}{2}} = \left[\frac{v_1 v_2 v_3 \ldots v_{n+1}}{u^{n(n+1)}}\right]^2,$$

oder:

$$u^{2(n+1)} = (v_1 v_2 \ldots v_{n+1})^2,$$

also:

$$7)\quad \pm u^{n+1} = v_1 v_2 \ldots v_{n+1},$$

wo das doppelte Zeichen mittelst weiter unten aufgestellter Sätze zu bestimmen ist.

Die Gleichungen 8) und 9) von § 22 geben dividirt, $\sqrt[4]{k} = u$ gesetzt:

$$8)\quad \operatorname{sin\,coam} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{2q^{\frac{1}{4}}}{u^2} \cos x \prod_{r=1}^{r=\infty} \frac{1+2q^{2r}\cos 2x + q^{4r}}{1+2q^{2r-1}\cos 2x + q^{4r-2}}.$$

Nimmt man $x = 0$, zieht die Quadratwurzel aus, so ergiebt sich für $u$ folgende Gleichung:

$$10)\quad u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} \prod \frac{1+q^{2r}}{1+q^{2r-1}}.$$

Ersetzt man in dieser Gleichung $q$ successive durch

$$q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \alpha^2 q^{\frac{1}{n}},\ \ldots,\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

so ergeben sich nach pag. 293 die verschiedenen Werthe von $\sqrt[4]{l} = v$, welche, *abgesehn vom Vorzeichen*, mit den in 6) aufgestellten Quantitäten $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$ übereinstimmen.

Für ein reelles $x$ ist in der Gleichung 8) das unendliche Product wesentlich positiv, da jeder Factor $1+2p\cos 2x+p^2$ sich als Summe zweier Quadrate $(1+p\cos 2x)^2+(p\sin 2x)^2$ darstellen lässt. Das Zeichen von $\sin\mathrm{coam}\frac{2Kx}{n}$ hängt also nur von $\cos x$ ab. Hieraus folgt, dass für $x = \frac{2K}{n}, \frac{4K}{n}, \ldots \frac{(n-1)K}{n}$ das Zeichen von $v_1$ in 6) abhängt von:

$$11)\quad \cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{2^{\frac{n-1}{2}}}.\ *)$$

---

*) Nach dem Satze von *Cotes* ist:

$$(1+2p\cos\frac{2\pi}{n}+p^2)(1+2p\cos\frac{4\pi}{n}+p^2)\ldots(1+2p\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+p^2) = \frac{1+p^n}{1+p}.$$

Nimmt man $p = i$, also $1+p^2 = 0$, setzt zur Abkürzung:

$$P = 2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{4\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$

so ist:

$$i^{\frac{n-1}{2}}P = \frac{1+i^n}{1+i}.$$

Hieraus findet man leicht $P = +1$, wenn $n = 8m+1$, dagegen $P = -1$, wenn $m = 8m\pm 3$. Es ist ferner:

$$\frac{(8m\pm 1)^2-1}{8} = 8m^2\pm 2m, \text{ also } (-1)^{\frac{(8m\pm 1)^2-1}{8}} = 1,$$

$$\frac{(8m\pm 3)^2-1}{8} = 8m^2\pm 6m+1, \text{ also } (-1)^{\frac{(8m\pm 3)^2-1}{8}} = -1.$$

Diese Gleichungen zeigen unmittelbar, dass:

$$P = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}},$$

woraus die im Texte aufgestellte Gleichung 11) folgt. Mittelst dieser Gleichung und:

$$\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$$

Da die rechte Seite positiv oder negativ ist, je nachdem $n$ von der Form $8m \pm 1$ oder $8m \pm 3$ ist, so folgt:

$$12) \quad v_1 = \pm\sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}} \prod \frac{1+q^{2nr}}{1+q^{(2r-1)n}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $n = 8m \pm 1$ oder $n = 8m \pm 3$.

Da $\sin\mathrm{coam}(zi, k) = \dfrac{1}{\Delta\mathrm{am}(z, k')}$, so ist jeder Factor von $v_2$ in 6) positiv, also, wenn in 10) $q^{\frac{1}{n}}$ statt $q$ gesetzt wird:

$$13) \quad v_2 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8n}} \prod \frac{1+q^{\frac{2r}{n}}}{1+q^{\frac{2r-1}{n}}}.$$

Nach dem § 39 folgen die Werthe von $\sqrt[4]{l} = v$, wenn in $v_2$ successive $\dfrac{iK'}{n}$ ersetzt wird durch:

$$\frac{K+iK'}{n}, \frac{K+2iK'}{n}, \ldots \frac{K+(n-1)iK'}{n},$$

oder $q^{\frac{1}{n}}$ ersetzt wird durch $\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}}$, wo $\mu = 1, 2, \ldots n-1$ ist. Ist also $v_\mu$ eine der in 6) aufgestellten $n-1$ Quantitäten $v_3, v_4, \ldots v_{n+1}$, so folgt:

$$14) \quad v_\mu = \sqrt{2}\, (\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{8}} \prod \frac{1+(\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^{2r}}{1+(\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^{2r-1}}.$$

Die Werthe von $v_\mu$ sind je zwei zu zwei conjugirt, es ist also das Product $v_3 v_4 \ldots v_{n+1}$ wesentlich positiv, mithin auch $v_2 v_3 \ldots v_{n+1}$. Nach dem Vorstehenden wird die Gleichung 7):

$$15) \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u^{n+1} = v_1 v_2 \ldots v_{n+1}.$$

Die Modulargleichung, deren Wurzeln $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$ sind, ist:

$$(v-v_1)(v-v_2)\ldots(v-v_{n+1}) = 0,$$

---

erhält man noch:

$$\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{3\pi}{n}\cos\frac{5\pi}{n}\ldots\cos\frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}+\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}}} = \frac{(-1)^{\frac{(n-2)^2-1}{8}}}{2^{\frac{n-1}{2}}},$$

da $n-1$ grade ist.

oder:

$$16)\quad v^{n+1}+C_1 v^n+C_2 v^{n-1}+\ldots+C_{n+1}=0.$$

Da $n+1$ eine grade Zahl, also $(-1)^{n+1}=1$, so ist mit Rücksicht auf 15):

$$17)\quad C_{n+1}=(-1)^{n+1}v_1\ldots v_{n+1}=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u^{n+1}.$$

Zu Folge des vorhergehenden § bleibt die Modulargleichung durch Vertauschung von $k$ und $l$ ungeändert. Da nun die Wurzel $v_1$ positiv und negativ sein kann, so ist zu untersuchen, wann $u$ statt $v$ und wann $\pm v$ statt $u$ zu setzen ist.

Nimmt $k$ unbegränzt ab, so ist dieses auch mit $q$ der Fall. Für ein unendlich kleines $u$ giebt die Gleichung 10):

$$18)\quad u=\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}.$$

Die Gleichung 12) giebt $\pm 1=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$ gesetzt:

$$v_1=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\sqrt{2}\,q^{\frac{n}{8}}$$

d. i. nach 18):

$$v_1=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\frac{u^n}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Da die Modulargleichung durch Vertauschung von $k$ und $l$ ungeändert bleibt, so setze man in der vorstehenden Gleichung $v$ statt $u$ und $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u$ statt $v_1$. Die Gleichung wird dann:

$$19)\quad u=\frac{v^n}{2^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Für ein unbegränzt abnehmendes $q$ reducirt sich die Gleichung 14) auf:

$$v_\mu=\sqrt{2}\,\alpha^{\frac{\mu}{8}}q^{\frac{1}{8n}}$$

d. i. nach 18)

$$v_\mu=2^{\frac{n-1}{2n}}\alpha^{\frac{\mu}{8}}u^{\frac{1}{n}}.$$

Dieser Werth von $v_\mu$ gleich $v$ in die Gleichung 19) substituirt macht dieselbe identisch, da $\alpha^n=1$ ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, die Modulargleichung bleibt ungeändert, wenn $v$ statt $u$ und $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u$ statt $v$ gesetzt wird.

Wird das unendliche Product in der Gleichung 10) nach Potenzen von $q$ entwickelt, so folgt:

20) $u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} [1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4 - 6q^5 + 9q^6 - 12q^7 + ..].$*)

Es ist $v^{n+1}$ die höchste Potenz von $v$ enthalten in der Modulargleichung, folglich ist $u^{n+1}$ die höchste Potenz von $u$ in der bemerkten Gleichung. Nach 20) ist:

$$u^{n+1} = 2^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n+1}{8}} [1 - q + 2q^2 ...]^{n+1}.$$

Vertauscht man in 20) $q$ mit $q^n$, so geht $u$ über in $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} v_1$. Es ist also:

21) $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} v_1 = \sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}} [1 - q^n + 2q^{2n} ...].$

Diese Gleichung zur $n+1^{\text{ten}}$ Potenz erhoben giebt:

22) $v_1^{n+1} = 2^{\frac{n+1}{2}} q^{\frac{n(n+1)}{8}} [1 - q^n + 2q^{2n} ...]^{n+1}.$

Da $\frac{n(n+1)}{8} = \frac{n^2-1}{8} + \frac{n+1}{8}$ und $\frac{n^2-1}{8}$ ganzzahlig, so lassen $n(n+1)$ und $n+1$ durch 8 dividirt denselben Rest. Setzt man $n+1 = 8\lambda + t$, so sind nach 20) und 22) $u^{n+1}$ und $v_1^{n+1}$ durch $q^{\frac{t}{8}}$ theilbar. Da der Modulargleichung durch $v = v_1$ genügt wird, so müssen in diesem Falle alle Terme durch $q^{\frac{t}{8}}$ theilbar sein. Ist nun $v^p u^m$ ein Term, setzt man $v = v_1$, so enthält der bemerkte Term nach 20) und 21) den irrationalen Factor:

$$q^{\frac{pn+m}{8}} = q^{\frac{t}{8}} \cdot q^{\frac{pn+m-t}{8}}.$$

Es muss also $pn+m-t$ durch 8 theilbar sein. Hieraus folgt, dass allgemein der Factor von $v^p$ die Form hat:

$$\alpha u^m + \beta u^{m+8} + \gamma u^{m+16} + \delta u^{m+24} + .. =$$
$$u^m [\alpha + \beta u^8 + \gamma u^{16} + \delta u^{24} + ..].$$

Wegen des Vorstehenden enthält jede Modulargleichung den

*) Man sehe hierüber Note XII.

Term $\alpha uv$, wo $\alpha$ eine Constante ist, da nach 20) und 21) dieser Term allgemein durch $q^{\frac{n+1}{8}}$ theilbar ist. Wegen 17) lässt sich nun die Modulargleichung auf folgende Form bringen:

$$23)\quad v^{n+1}+\ldots+\alpha uv+(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u^{n+1}=0.$$

Man schliesst hieraus wieder die obige Substitutionsregel. Da die Modulargleichung durch Vertauschung von $k$ und $l$ ungeändert bleibt, so ist dieses mit der Gleichung 23) der Fall, wenn für $n=8m\pm1$ einfach $u$ und $v$ vertauscht werden, für $n=8m\pm3$ setze man $v$ statt $u$ und $-u$ statt $v$; nur unter diesen Bedingungen kann der Term $\alpha uv$ sein Zeichen bewahren.

Der Werth von $\alpha$ ergiebt sich leicht wie folgt. Die niedrigsten Potenzen von $q$, welche die Gleichung 23) durch Substitution der Werthe von $u$ aus 20) und $v=v_1$ aus 21) enthält kommen in:

$$\alpha uv+(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}u^{n+1}$$

vor. Da sich sämmtliche Potenzen von $q$ wegheben müssen, so folgt nach Division durch $q^{\frac{n+1}{8}}$

$$\alpha(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^{n+1}=0 \text{ d. i. } \alpha=-2^{\frac{n-1}{2}}.$$

Die Vertauschung von $u$ und $v$ zeigt ferner, das $v^pu^r$ und $u^pv^r$ gleiche Factoren haben, mit gleichen oder entgegengesetzten Zeichen, je nachdem $n=8m\pm1$, oder $n=8m\pm3$.

Nach dem vorhergehenden § bleibt die Modulargleichung durch Vertauschung von $k$ mit $\frac{1}{k}$ und $l$ mit $\frac{1}{l}$ unverändert. Wendet man dieses auf $u$ und $v$ an, setzt also $\frac{1}{u}$ und $\frac{1}{v}$ statt $u$ und $v$, so folgt, dass $v^pu^r$ und $v^{n+1-p}u^{n+1-r}$ dieselben Factoren haben müssen. Wird also die Modulargleichung nach absteigenden Potenzen von $v$ entwickelt und die Factoren der Potenzen von $v$ nach aufsteigenden Potenzen von $u$, so haben die Terme, welche gleich weit vom Anfang und Ende der Gleichung entfernt sind, dieselben Factoren, welche für $n=8m\pm3$ verschiedene Zeichen haben. Zur Aufstellung einer grossen Anzahl numerischer Factoren der einzelnen Terme einer Modulargleichung dienen die folgenden Betrachtungen.

Es ist $\sin\operatorname{coam} w = \sin\operatorname{am}(K-w) = i\operatorname{tang}\operatorname{am}\left(\frac{K-w}{i}, k'\right)$. Nimmt man $u = 1$, also auch $k = 1$ und $k' = 0$, so folgt:

$$\sin\operatorname{coam}(w, 1) = i\operatorname{tang}\operatorname{am}\left(\frac{K-w}{i}, 0\right) = i\operatorname{tang}\frac{K-w}{i},$$

oder rechts Exponentialgrössen eingeführt:

$$\sin\operatorname{coam}(w, 1) = \frac{e^{K-w} - e^{-(K-w)}}{e^{K-w} + e^{-(K-w)}},$$

welche Gleichung sich auch schreiben lässt:

$$\sin\operatorname{coam}(w, 1) = \frac{e^{2(K-w)} - 1}{e^{2(K-w)} + 1} = \frac{1 - e^{-2(K-w)}}{1 + e^{-2(K-w)}}.$$

Für $w = 4r\frac{mK+m'iK'}{n}$ folgt:

$$\sin\operatorname{coam}\left(4r\frac{mK+m'iK'}{n}, 1\right) = \frac{1 - e^{-2\frac{n-4mr}{n}K + \frac{8rm'iK'}{n}}}{1 + e^{-2\frac{n-4mr}{n}K + \frac{8rm'iK'}{n}}} =$$

$$\frac{e^{-2\frac{4mr-n}{n}K} - e^{\frac{8rm'iK'}{n}}}{e^{-2\frac{4mr-n}{n}K} + e^{\frac{8rm'iK'}{n}}}.$$

Für $k = 1$ ist $K = \infty$ und $K' = \frac{\pi}{2}$. Wenn $n - 4mr > 0$ ist, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$24)\quad \sin\operatorname{coam}\left(4r\frac{mK+m'iK'}{n}\right) = +1,\ n - 4mr > 0,$$

dagegen folgt:

$$25)\quad \sin\operatorname{coam}\left(4r\frac{mK+m'iK'}{n}\right) = -1,\ 4mr - n > 0.$$

Es sei nun:

$$26)\quad \omega = \frac{mK+m'iK'}{n}$$

und

$$27)\quad v = u^n \sin\operatorname{coam} 4\omega \sin\operatorname{coam} 8\omega \ldots \sin\operatorname{coam} 2(n-1)\omega.$$

Für $u = 1$ und $m = 0$ zeigt die Gleichung 24), dass sich in 27) jeder Factor der rechten Seite auf $+1$ reducirt, es ist dann $v = 1$ für $u = 1$.

Für $m = 1$ zeigen die Gleichungen 24) und 25), dass in 27) $\operatorname{sin coam} 4r\varpi = 1$, wenn $\frac{n}{4} > r$, dagegen $\operatorname{sin coam} 4r\varpi = -1$, wenn $r > \frac{n}{4}$, es nimmt $r$ die ganzzahligen Werthe $1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}$ an.

I. $n = 8\mu+1$, $r = 1, 2, \ldots 4\mu$.

Es ist $8\mu+1 > 4r$ für $r = 1, 2, \ldots 2\mu$. In 27) reduciren sich für $u = 1$ $2\mu$ Factoren auf $+1$, die übrigen $2\mu$ Factoren auf $-1$, also $v = 1$.

II. $n = 8\mu-1$, $r = 1, 2, \ldots 4\mu-1$.

Es ist $8\mu-1 > 4r$ für $r = 1, 2, \ldots 2\mu-1$. In 27) reduciren sich für $u = 1$ $2\mu-1$ Factoren auf $+1$, die übrigen $2\mu$ Factoren auf $-1$, also $v = 1$.

III. $n = 8\mu+3$, $r = 1, 2, \ldots 4\mu+1$.

Es ist $8\mu+3 > 4r$ für $r = 1, 2, \ldots 2\mu$. Für $u = 1$ werden in 27) $2\mu$ Factoren gleich $+1$, die übrigen $2\mu+1$ Factoren gleich $-1$, also $v = -1$.

IV. $n = 8\mu-3$, $r = 1, 2, \ldots 4\mu-2$.

Es ist $8\mu-3 > 4r$ für $r = 1, 2, \ldots 2\mu-1$. Für $u = 1$ werden in 27) $2\mu-1$ Factoren gleich $+1$, die übrigen $2\mu-1$ Factoren gleich $-1$, also $v = -1$.

Nimmt man $u = 1$, so werden sämmtliche $n+1$ Werthe von $v$ gleich $+1$, wenn $n = 8\mu \pm 1$. Die Modulargleichung reducirt sich auf $(v-1)^{n+1} = 0$. Ist $n = 8\mu \pm 3$, so ist für $u = 1$ ein Werth von $v$ gleich $+1$, die übrigen sind gleich $-1$. Die Modulargleichung reducirt sich dann auf $(v-1)(v+1)^n = 0$. Nach dem Vorhergehenden hat die Modulargleichung folgende Form:

$$v^{n+1} + v^n u^s(\alpha + \beta u^8 + \gamma u^{16} \ldots) + v^{n-1} u^{s'}(\alpha' + \beta' u^8 + \ldots)$$
$$+ \ldots - 2^{\frac{n-1}{2}} uv + (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} u^{n+1} = 0.$$

Es ist selbstverständlich, dass die Exponenten der Potenzen von $u$, welche in den Factoren von $v^n$, $v^{n-1}$ etc. vorkommen, kleiner wie $n+1$ sind.

Lassen sich mittelst der vorhergehenden Regeln nicht alle Coefficienten bestimmen, so bieten sich zur vollständigen Herstellung der Gleichung zwei Wege dar. Man setze in die Modulargleichung

für $u$ und $v = v_1$ ihre Werthe aus 20) und 21). Durch Annullirung der Factoren gleicher Potenzen von $q$ ergeben sich lineare Gleichungen zur Bestimmung der in Rede stehenden Coefficienten. Diese Methode ist ungemein weitläufig; um dieselbe anzuwenden hat *Sohnke* (l. c. p. 113—115) die 20 ersten Potenzen der unendlichen Reihe, auf der rechten Seite der Gleichung 20) dargestellt.

Die zweite Methode besteht darin die Coefficienten der Gleichung 16) mit Hülfe der Summen gleicher Potenzen der Wurzeln zu berechnen. Setzt man allgemein:

$$v_1^m + v_2^m + \ldots + v_{n+1}^m = S_m,$$

so finden die bekannten Gleichungen statt:

$$28) \quad \begin{cases} S_1 + C_1 = 0, \\ S_2 + C_1 S_1 + 2C_2 = 0, \\ S_3 + C_1 S_2 + C_2 S_1 + 3C_3 = 0, \\ \text{etc.} \end{cases}$$

In der Gleichung 20) werde die unendliche Summe auf der rechten Seite durch $f(q)$ bezeichnet, so dass also:

$$29) \quad u = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8}} f(q),$$

wo:

$$\begin{aligned} 30) \quad f(q) = {} & 1 - q + 2q^2 - 3q^3 + 4q^4 - 6q^5 + 9q^6 - 12q^7 + 16q^8 - 22q^9 \\ & + 29q^{10} - 38q^{11} + 50q^{12} - 64q^{13} + 82q^{14} - 105q^{15} \\ & + 132q^{16} - 166q^{17} + 208q^{18} - 258q^{19} + 320q^{20} \\ & - 395q^{21} + 484q^{22} - 592q^{23} + 722q^{24} - 876q^{25} \\ & + 1060q^{26} - \ldots . \end{aligned}$$

Die Werthe von $v_1, v_2, \ldots v_{n+1}$ ergeben sich aus 29) durch Vertauschung von $q$ mit

$$q^n,\ q^{\frac{1}{n}},\ \alpha q^{\frac{1}{n}},\ \ldots\ \alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}},$$

wo für $v_1$ noch das Vorzeichen zu berücksichtigen ist. Es lassen sich die Gleichungen 6) durch die folgenden ersetzen:

$$31) \quad \begin{cases} v_1 = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}} f(q^n),\ v_2 = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{8n}} f(q^{\frac{1}{n}}), \\ v_3 = \sqrt{2}\, (\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{8}} f(\alpha q^{\frac{1}{n}}) \ldots . v_{n+1} = \sqrt{2}\, (\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{8}} f(\alpha^{n-1} q^{\frac{1}{n}}). \end{cases}$$

Die Gleichung 30) schreibe man etwas allgemeiner auf folgende Weise:

$$32)\quad f(q) = 1+A_1q+A_2q^2+\ldots.$$

Mittelst der Gleichungen 31) lassen sich $S_1$, $S_2$ ... in Function von $q$ darstellen. Der Factor von $A_r$ in:

$$\frac{v_2+v_3+\ldots+v_{n+1}}{\sqrt{2}}$$

ist:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=n-1} (\alpha^\mu q^{\frac{1}{n}})^{\frac{8r+1}{8}}.$$

Wegen $\alpha^n = 1$ verschwindet diese Summe, wenn $8r+1$ kein Multiplum von $n$ ist. Wenn aber

$$33)\quad 8r+1 = ln,$$

so reducirt sich die Summe auf $nq^{\frac{l}{8}}$. Es ergiebt sich so:

$$34)\quad S_1 = v_1+v_2+\ldots.+v_{n+1} =$$
$$\pm\sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}}\,[1+A_1q^n+A_2q^{2n}+\ldots.]$$
$$+n\sqrt{2}\, q^{\frac{l}{8}}[A_r+A_{r+n}q+A_{r+2n}q^2+\ldots],$$

wo zwischen $r$ und $l$ die Gleichung 33) besteht.

Die Gleichung 33) giebt:

für $n = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots.$
ist $r = 1, 3, 6, 4, 8, 2, 7, \ldots.$
und $l = 3, 5, 7, 3, 5, 1, 3, \ldots$

Die Reihe:

$$q^{\frac{l}{8}}(A_r+A_{r+n}q+A_{r+2n}q^2+\ldots)$$

ist bis zu dem Terme $A_{r+sn}q^{\frac{l}{8}+s} = A_{r+sn}q^{\frac{l+8s}{8}}$ fortzusetzen, in welchem $l+8s$ der Zahl $n$ am nächsten kommt. Da in $f(q^n)$ mit Ausnahme des ersten Termes, welcher gleich der Einheit ist, höhere Potenzen von $q$ wie die $n^{te}$ enthalten sind, so ist von $v_1$ nur der eine Term

$$(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}\sqrt{2}\, q^{\frac{n}{8}}$$

mit in Rechnung zu ziehn. Man erhält so:

$n = 3,\ S_1 = \sqrt{2}[-1+3A_1]q^{\frac{3}{8}},$
$n = 5,\ S_1 = \sqrt{2}[-1+5A_3]q^{\frac{5}{8}},$
$n = 7,\ S_1 = \sqrt{2}[+1+7A_6]q^{\frac{7}{8}},$

$$n = 11,\ S_1 = \sqrt{2}[(-1+11A_{15})q+11A_4]q^{\frac{3}{8}},$$
$$n = 13,\ S_1 = \sqrt{2}[(-1+13A_{21})q+13A_8]q^{\frac{5}{8}},$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Setzt man analog wie 32):

$$f(q)^2 = 1+B_1q+B_2q^2+\ldots$$
$$f(q)^3 = 1+C_1q+C_2q^2+\ldots$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

so ist:

$$S_2 = 2q^{\frac{n}{4}}[1+B_1q^n+B_2q^{2n}+\ldots]$$
$$+2q^{\frac{1}{4n}}[1+B_1q^{\frac{1}{n}}+B_2q^{\frac{2}{n}}+\ldots]$$
$$+2(\alpha q^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{4}}[1+B_1\alpha q^{\frac{1}{n}}+B_2(\alpha q^{\frac{1}{n}})^2+\ldots]$$
$$\cdot$$
$$+2(\alpha^{n-1}q^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{4}}[1+B_1\alpha^{n-1}q^{\frac{1}{n}}+B_2(\alpha^{n-1}q^{\frac{1}{n}})^2+\ldots].$$

Mit Rücksicht auf die Terme, welche weiter nicht in Rechnung kommen, ist:

$$35)\quad S_2 = 2nq^{\frac{\nu}{4}}[B_r+B_{r+n}q+\ldots],$$

wo $4r+1 = l'n$, oder $8r+2 = 2l'n$ ist. Man findet ähnlich:

$$S_3 = 2\sqrt{2}.nq^{\frac{l''}{8}}[C_r+C_{r+n}q+\ldots],$$

mit der Bedingung $8r+3 = l''n$ u. s. f.

Die Anwendung dieser Methode soll bei der Modulargleichung für die Transformation dreizehnter Ordnung gezeigt werden. Für die Transformationen von der dritten, fünften, siebenten und eilften Ordnung genügen die zu Anfang bemerkten einfachen Regeln wie aus dem Nachstehenden hervorgeht.

## Modulargleichung für die Transformation III. Ordnung.

Die Gleichung hat die Form:

$$v^4+av^3u^3+bvu-u^4 = 0.$$

Da für $u = 1$ die linke Seite sich auf $(v-1)(v+1)^3$ reducirt, so ist:

$$v^4+av^3+bv-1 = (v-1)(v+1)^3,$$

hieraus $a = 2$, $b = -2$. Die gesuchte Gleichung ist folglich:

$$v^4+2v^3u^3-2vu-u^4 = 0.$$

Diese Gleichung hat *Jacobi* auf folgende Art transformirt (Fund. p. 68). Es ist:

$$(1-u^4)(1+v^4) = 1+v^4-u^4-v^4u^4.$$

Da nach der Modulargleichung $v^4-u^4 = 2uv(1-u^2v^2)$, so folgt:

$$(1-u^4)(1+v^4) = 1-u^4v^4+2uv(1-u^2v^2).$$

Ebenso findet man:

$$(1+u^4)(1-v^4) = 1-u^4v^4-2uv(1-u^2v^2).$$

Das Product der letzten beiden Gleichungen giebt:

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-u^4v^4)-4u^2v^2(1-u^2v^2) = (1-u^2v^2)^4.$$

Nun ist $u^4 = k$, $v^4 = l$, also $1-u^8 = k'^2$, $1-v^8 = l'^2$. Die vorstehende Gleichung wird hierdurch:

$$(k'l')^2 = (1-u^2v^2)^4 \text{ oder } \sqrt{k'l'} = 1-u^2v^2.$$

Setzt man $u^2v^2 = \sqrt{kl}$, so folgt:

$$\sqrt{kl}+\sqrt{k'l'} = 1.$$

## Modulargleichung für die Transformation V. Ordnung.

Die Gleichung hat die Form:

$$v^6+av^5u^5+bv^4u^2+cv^2u^4+dvu-u^6 = 0.$$

Für $u = 1$ ist:

$$v^6+av^5+bv^4+cv^2+dv-1 = (v-1)(v+1)^5,$$

also $a = 4$, $b = 5$, $c = -5$, $d = -4$. Die gesuchte Gleichung ist:

$$v^6-u^6-4uv(1-u^4v^4)+5u^2v^2(v^2-u^2) = 0.$$

Diese Gleichung hat *Jacobi* auf folgende Art transformirt. (Fund. p. 69). Mittelst der Modulargleichung folgt:

$$(u^2-v^2)(u+v)^4 = -4uv(1-u^4)(1+v^4),$$
$$(u^2-v^2)(u-v)^4 = -4uv(1+u^4)(1-v^4).$$

Das Product dieser Gleichungen giebt:

$$(u^2-v^2)^6 = 16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8) = 16u^2v^2u'^8v'^8.$$

Da gleichzeitig $k$ in $k'$ und $l$ in $l'$ oder $u$ in $u'$ und $v$ in $v'$ übergeht, so ist auch:

$$(v'^2-u'^2)^6 = 16u'^2v'^2(1-u'^8)(1-v'^8) = 16u'^2v'^2u^8v^8.$$

Die letzten Gleichungen geben durch Division und Ausziehung der sechsten Wurzel:

$$\frac{u^2-v^2}{v'^2-u'^2} = \frac{u'v'}{uv} \text{ oder } (u^2-v^2)uv = (v'^2-u'^2)u'v',$$

d. i.

$$(\sqrt{k}-\sqrt{l})\sqrt[4]{kl} = (\sqrt{l}-\sqrt{k'})\sqrt[4]{k'l'}.$$

*Legendre* (Suppl. p. 75) schreibt die Modulargleichung auf folgende Art:

$$\frac{u^4+6u^2v^2+v^4}{4uv(u^2+v^2)} = \frac{1-u^4v^4}{u^4-v^4}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar:

$$\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^4 = \frac{1+u^4}{1-u^4}\frac{1-v^4}{1+v^4},$$

d. i.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{k}+\sqrt[4]{l}}{\sqrt[4]{k}-\sqrt[4]{l}}\right)^4 = \frac{1+k}{1-k}\cdot\frac{1-l}{1+l}.$$

## Modulargleichung für die Transformation VII. Ordnung.

Die Gleichung hat die Form:

$$v^8+av^7u^7+bv^6u^6+cv^5u^5+dv^4u^4+ev^3u^3+fv^2u^2+guv+u^8 = 0.$$

Für $u = 1$ ist:

$$v^8+av^7+bv^6+cv^5+dv^4+ev^3+fv^2+gv+1 = (v-1)^8,$$

also $a = g = -8$, $b = f = 28$, $c = e = -56$, $d = 70$. Die gesuchte Gleichung ist:

$$v^8-8v^7u^7+28v^6u^6-56v^5u^5+70v^4u^4-56v^3u^3$$
$$+28v^2u^2-8uv+u^8 = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich schreiben:

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-uv)^8,$$

d. i.

$$k'^2l'^2 = (1-\sqrt[4]{kl})^8,$$

oder:

$$\sqrt[4]{kl}+\sqrt[4]{k'l'} = 1,$$

welche Gleichung zuerst *Guetzlaff* (Crelle. J. t. XII p. 173—177) auf folgende Art gefunden hat. Es ist:*)

$$k^2\cos\mathrm{am}a\cos\mathrm{am}b\cos\mathrm{am}(a+b)+k'^2 = \Delta\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}(a+b)$$

oder:

$$\frac{k^2\cos\mathrm{am}a\cos\mathrm{am}b\cos\mathrm{am}(a+b)}{\Delta\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}(a+b)}+\frac{k'^2}{\Delta\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}(a+b)} = 1.$$

*) Note V Gleichung 13).

Man setze hierin $a = \frac{2K}{7}$, $b = \frac{4K}{7}$ also $a+b = \frac{6K}{7}$. Nun ist nach pag. 254 für $n = 7$:

$$l = k^7 \left( \frac{\cos\mathrm{am}\frac{2K}{7}\cos\mathrm{am}\frac{4K}{7}\cos\mathrm{am}\frac{6K}{7}}{\Delta\mathrm{am}\frac{2K}{7}\Delta\mathrm{am}\frac{4K}{7}\Delta\mathrm{am}\frac{6K}{7}} \right)^4,$$

$$l' = \frac{k'^7}{\left(\Delta\mathrm{am}\frac{2K}{7}\Delta\mathrm{am}\frac{4K}{7}\Delta\mathrm{am}\frac{6K}{7}\right)^4}.$$

Die Combination dieser Gleichungen führt direct auf die oben bemerkte Modulargleichung.

## Modulargleichung für die Transformation XI. Ordnung.

Die Gleichung hat die Form:

$$v^{12}+v^{11}u^3(a_1+a_2u^8)+bv^{10}u^6+v^9u(c_1+c_2u^8)$$
$$+dv^8u^4+ev^7u^7+v^6u^2(f_1+f_2u^8)+gv^5u^5+hv^3u^3$$
$$+v^3u^3(i_1+i_2u^8)+k_1v^2u^6+vu(l_1+l_2u^8)-u^{12} = 0.$$

Da die linke Seite sich für $u = 1$ auf $(v-1)(v+1)^{11}$ reducirt, so folgt:

$$a_1+a_2 = 10,\ b = 44,\ c_1+c_2 = 110,\ d = 165,\ e = 132,$$
$$f_1+f_2 = 0,\ g = -132,\ h = -165,\ i_1+i_2 = -110,$$
$$k_1 = -44,\ l_1+l_2 = -10.$$

Es ist $l_1 = -2^{\frac{u-1}{2}} = -2^5 = -32$.

Da $v^p u^m$ und $v^m u^p$ gleiche Coefficienten mit verschiedenen Zeichen haben, ebenso $v^p u^m$ und $v^{12-p} u^{12-m}$, so erhält man:

$$i_2 = a_1,\ f_2 = -b,\ l_2 = c_1,\ h = -d,\ k_1 = -f_1,$$

und:

$$l_2 = -a_1,\ l_1 = -a_2,\ k_1 = -b,\ i_2 = -c_1,\ i_1 = -c_2,$$
$$h = -d,\ g = -e,\ f_2 = -f_1.$$

Diese Gleichungen geben $l_1 = -32$, $l_2 = 22$, $a_1 = -22$, $a_2 = 32$, $c_1 = 22$, $c_2 = 88$, $i_1 = -88$, $i_2 = -22$.

Die Modulargleichung wird hierdurch:

$$v^{12}-v^{11}u^3(22-32u^8)+44v^{10}u^6+22v^9u(1+4u^8)$$
$$+165v^8u^4+132v^7u^7+44v^6u^2(1-u^8)-132v^5u^5$$
$$-165v^4u^8-22v^3u^3(4+u^8)-44v^2u^6$$
$$-vu(32-22u^8)-u^{12}=0,$$

oder auch:

$$(v-u)^{11}(v+u)+44u^2v^2(v^4-u^4)(1-u^4)(1-v^4)$$
$$-32uv(1+u^{10})(1-v^{10})$$
$$-22uv(1+u^2)(1-v^2)(v^2+u^2)[4u^2v^2-(u^2-v^2)^2]$$
$$-88u^3v^3(1-u^4)(1-v^4)(1-u^2v^2)=0.$$

Modulargleichung für die Transformation XIII. Ordnung.

Die Gleichung hat folgende Form:

$$v^{14}+v^{13}u^5(a_1+a_2u^8)+v^{12}u^2(b_1+b_2u^8)+cv^{11}u^7$$
$$+v^{10}u^4(d_1+d_2u^8)+v^9u(e_1+e_2u^8)+fv^8u^6+v^7u^3(g_1+g_2u^8)$$
$$+hv^6u^8+v^5u^5(i_1+i_2u^8)+v^4u^2(k_1+k_2u^8)+l_1v^3u^7$$
$$+v^2u^4(m_1+m_2u^8)+vu(n_1+n_2u^8)-u^{14}=0.$$

Für den Factor $n_1$ von $vu$ besteht die Gleichung $n_1=-2^{\frac{13-1}{2}}=-64$. Da $v^pu^m$ und $v^mu^p$, ebenso $v^{14-p}u^{14-m}$ und $v^pu^m$ gleiche Coefficienten mit entgegengesetzten Zeichen haben, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$i_2=a_1$, $m_2=-b_1$, $d_2=-b_2$, $g_2=c$, $k_2=-d_1$, $n_2=e_1$, $h=-f$, $l_1=g_1$, $m_1=-k_1$,

und

$$n_2=-a_1,\ n_1=-a_2,\ m_2=-b_1,\ m_1=-b_2,\ l_1=-c,$$
$$k_2=-d_1,\ k_1=-d_2,\ i_2=-e_1,\ i_1=-e_2,\ h=-f,$$
$$g_2=-g_1.$$

Die Bedingung, dass die linke Seite der Modulargleichung für $u=1$ die Form $(v-1)(v+1)^{13}$ annimmt, führt auf folgende Relationen:

$$a_1+a_2=12,\ b_1+b_2=65,\ c=208,\ d_1+d_2=429,$$
$$e_1+e_2=572,\ f=429,\ g_1+g_2=0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen lässt sich die Modulargleichung auf folgende Form bringen:

$$36)\quad v^{14}-v^{13}u^5(52-64u^8)+v^{12}u^2(b_1+b_2u^8)+208v^{11}u^7$$
$$+v^{10}u^4[429+b_2-b_2u^8]+v^9u(52+520u^8)+429v^8u^6$$
$$+v^7u^3(208-208u^8)-429v^6u^8-v^5u^5(520+52u^8)$$
$$+v^4u^2[b_2-(429+b_2)u^8]-208v^3u^7-v^2u^4(b_2+b_1u^8)$$
$$-vu(64-52u^8)-u^{14}=0.$$

In dieser Gleichung sind noch $b_1$ und $b_2$ zu bestimmen. Nach 16) und 28) ist:

$$u^2(b_1+b_2u^8)=C_2=\frac{S_1^2-S_2}{2}.$$

In 33) nehme man $n=13$, also $r=8$ und $l=5$. Die Gleichung 34) giebt:

$$S_1=-\sqrt{2}\,q^{\frac{13}{8}}(1+A_1q^{13}+A_2q^{26}+\ldots)$$
$$+13\sqrt{2}\,q^{\frac{5}{8}}(A_8+A_{21}q+\ldots).$$

Für den folgenden Gebrauch kann man einfacher setzen:

$$S_1=\sqrt{2}\,[13A_8+(13A_{21}-1)q]\,q^{\frac{5}{8}}.$$

Da $A_8$ und $A_{21}$ die Factoren von $q^8$ und $q^{21}$ in $f(q)$ sind, wo $f(q)$ durch die Gleichung 30) bestimmt ist, so hat man $A_8=16$, $A_{21}=-395$, also

$$S_1=\sqrt{2}\,[13.16-(13.395+1)q]\,q^{\frac{5}{8}}.$$

Die Gleichung $4r+1=13l'$ giebt 3 als kleinsten Werth von $r$, mithin $l'=1$. Hierdurch wird die Gleichung 35):

$$S_2=26[B_3+B_{16}q+..]q^{\frac{1}{4}},$$

wo $B_3$ und $B_{16}$ die Factoren von $q^3$ und $q^{16}$ sind in $f(q)^2$. Mittelst der Gleichung 30) folgt $B_3=-10$ und $B_{16}=3348$. Es ist also

$$S_2=26[-10+3348q..]q^{\frac{1}{4}}.$$

Die beiden Werthe von $S_1$ und $S_2$ geben:

$$\frac{S_1^2-S_2}{2}=130(1-2q\ldots)q^{\frac{1}{4}},$$

wo rechts innerhalb der Klammer nur höhere Potenzen von $q$ vorkommen. Die linke Seite ist gleich $u^2(b_1+b_2u^8)$, man erhält also:

$$b_1u^2+b_2u^{10}=130(1-2q\ldots)q^{\frac{1}{4}}.$$

Setzt man hierin für $u$ seinen Werth aus 20), dividirt auf beiden Seiten durch $q^{\frac{1}{4}}$, so folgt:

$$2b_1(1-2q+5q^2\ldots)+32b_2q(1-10q\ldots) = 130(1-2q\ldots).$$

Die Factoren gleicher Potenzen von $q$ geben die Relationen:

$$2b_1 = 130, \quad -2.2b_1+32b_2 = -2.130,$$

also $b_1 = 65$, $b_2 = 0$. Setzt man diese Werthe von $b_1$ und $b_2$ in die Gleichung 36), so erhält man die Modulargleichung XIII. Ordnung, welche *Sohnke* auf folgende Form gebracht hat:

$$\begin{aligned}(v-u)^{13}(v+u) &- 52uv(1+u^4)(1-v^4)[3u^4v^4+4u^2v^2(u^2+v^2)^2] \\ &- 52uv(1-u^8)(1-v^8)(1-u^4v^4) \\ &- 12uv(1+u^4)(1-v^4)(1-u^4+u^8)(1+v^4+v^8) = 0.\end{aligned}$$

Das im Vorhergehenden angewandte Verfahren zur Bestimmung von $b_1$ und $b_2$ ist etwas verschieden von der Methode, deren sich *Sohnke* bedient hat; welche darin besteht, $S_1$, $S_2$ etc. als rationale Functionen von $u$ darzustellen. Da in 16) $C_1$. $C_2 \ldots C_{n+1}$ rationale Functionen von $u$ sind, so ist dieses nach 28) auch mit $S_1$, $S_2\ldots$ der Fall. Man stelle $S_m$ als Function von $q$ dar in Form einer unendlichen Reihe, welche mit einem Ausdrucke von der Form $q^{\frac{s}{8}}$ multiplicirt ist. Die Gleichung 20) zeigt leicht, welche Potenzen $u^2$, $u^3\ldots$ von $u$ den Factor $q^{\frac{s}{8}}$ enthalten können. Man multiplicire diese Potenzen mit Constanten, setze die Summe gleich $S_m$ und vergleiche darauf die Factoren gleicher Potenzen von $u$. Hierdurch ergeben sich lineare Gleichungen zur Bestimmung der bemerkten Constanten. Die Gleichungen 28) zeigen, dass $S_1$ höchstens vom Grade $n+1$, also $S_2$ höchstens vom Grade $2(n+1)$ u. s. f. in Beziehung auf $u$ sein kann, wodurch die Anzahl der Terme, welcher $S_m$ gleich sein kann, begränzt ist.

Als Beispiel werde die Gleichung 36) genommen. Dieselbe giebt direct

$$37) \quad S_1 = u^5(52-64u^8), \quad C_2 = u^2(b_1+b_2u^8).$$

Es ist nun

$$S_2 = 26[-10+3348q+\ldots]q^{\frac{1}{4}}.$$

Der Factor $q^{\frac{1}{4}}$ kommt nach 20) nur vor in $u^2$, $u^{10}$, $u^{18}$, $u^{26}\ldots$ Es kann $S_2$ nur eine lineare Function von $u^2$, $u^{10}$, $u^{18}$ und $u^{26}$ sein. Man hat nur nöthig die Factoren von $u^2$ und $u^{10}$ zu bestimmen, da $C_2$ keine höheren Potenzen von $u$ enthält. Sind $m$, $m'$, $m''$ und

$m'''$ Constanten, so kann man setzen:

38) $mu^2+m'u^{10}+m''u^{18}+m'''u^{26} = 26[-10+3348q+\ldots]q^{\frac{1}{4}}$.

Setzt man links für $u^2$ und $u^{10}$ ihre Werthe aus 20) ein, so geben die Factoren gleicher Potenzen von $q$:

$$2m = -26.10,\ 32m'-4m = 26.3348,$$

also $m = -130$, $m' = 2704$. Folglich ist:

$$S_2 = -130u^2+2704u^{10}+m''u^{18}+m'''u^{26}.$$

Setzt man hieraus den Werth von $S_2$, ferner aus 37) die Werthe von $S_1$ und $C_2$ in:

$$C_2 = \frac{S_1{}^2-S_2}{2},$$

so folgt:

39) $b_1u^2+b_2u^{10} = 65u^2-\frac{104.64+m''}{2}u^{18}+\frac{4096-m'''}{2}u^{26}$.

Berechnet man $m''$ und $m'''$ direct mittelst der Gleichung 38), so folgt $104.64+m'' = 0$, $4096 = m'''$, wodurch die Gleichung 39) übergeht in $b_1u^2+b_2u^{10} = 65u^2$, d. i. $b_1 = 65$ und $b_2 = 0$, wie schon oben gefunden wurde. Wenn es sich, wie im vorhergehenden Beispiel, nur darum handelt, die Factoren der Potenzen von $u$ in $C_m$ zu bestimmen, so folgt, da $u^n$ die höchste Potenz von $u$ in $C_n$ ist, dass man allgemein $S_m$ nur bis zum Terme $u^n$ zu entwickeln braucht, weil alle höheren Potenzen von $u$ bei der Bestimmung von $C_m$, wie im vorliegenden Beispiel wegfallen müssen. Man findet in der angeführten Abhandlung von *Sohnke* dieses Verfahren auf die Modulargleichungen der Transformationen von der XVII. und XIX. Ordnung angewandt. Für die Transformationen von der XI., XIII. und XVII. Ordnung hatte *Sohnke* die Modulargleichungen ohne Deduction schon 1834 aufgestellt. (Crelle. J. t. 12 p. 178). Einige Zusätze abgerechnet ist der Inhalt dieses § wesentlich der Abhandlung von *Sohnke* entnommen. Die Bemerkung über die Form der Modulargleichang, wenn $u$ unendlich klein ist, findet sich bei *Mathieu*: „Mémoire sur les fonctions elliptiques". (Journal de l'École Polytechn. T. XXV Cahier 42 p. 265—295).*)

*) Ausser den weiter oben erwähnten Schriften und Abhandlungen von *Königsberger* und *Betti* sind noch folgende Abhandlungen anzuführen, welche

## § 49 Die Theta-Functionen für einige besondere Werthe des Arguments. Allgemeine Formel für das Product zweier Theta-Functionen von Schröter.

Die Bemerkung zu Anfang des vorhergehenden §, dass zur Aufstellung der Modulargleichung die Herstellung der algebraischen Relation zwischen

$$\frac{\vartheta_2(0, q)}{\vartheta_3(0, q)} \text{ und } \frac{\vartheta_2(0, q^n)}{\vartheta_3(0, q^n)}$$

genügt, ist in einer sehr ausgezeichneten Weise von *Schröter* für eine Anzahl von Modulargleichungen durchgeführt worden. Die Resultate finden sich in:

*Schröter:* De aequationibus modularibus. Regiomonti (1854).

---

die Modulargleichungen und Anwendungen derselben enthalten.

*Hermite:* Sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (Comptes Rendus 1858 T. 46 p. 508—515). Sur la résolution de l'équation du quatrième degré, (ib. 715—722, 961—967). Lettre de Mr. Kronecker. (ib. 1150—1152).

* *Hermite:* Sur la théorie des équations modulaires. (C. R. 1859 t. 48 p. 940—947, 1079—1084, 1095—1102 t. 49 p. 16—24, 110—118, 141—144).

Diese Aufsätze gesammelt u. d. T. Hermite: Sur la théorie des équations modulaires et la résolution de l'équation du cinquième degré. Paris 1859. 68pp. in 4°. In Verbindung hiermit stehn folgende Arbeiten:

*Joubert:* Sur divers équations analogues aux équations modulaires, dans la théorie des fonctions elliptiques. (C. R. 1858 t. 47 p. 341—345).

*Brioschi:* Sur divers équations etc. (ib. 337—340).

*Schläfli:* Beweis der Hermite'schen Verwandlungstafeln für die elliptischen Modularfunctionen. (Borchardt. Journ. t. 72 p. 360—369).

Die Modulargleichungen sind ferner behandelt in:

*Jordan:* Notes sur les équations modulaires. (Compt. R. 1868 p. 308—312).

Die von *Kronecker* und *Hermite* im Jahre 1858 gleichzeitig aufgestellte Lösung der allgemeinen Gleichung fünften Grades hat eine Anzahl von Arbeiten hervorgerufen, welche mit den Modulargleichungen oder Multiplicatorgleichungen in enger Verbindung stehn. Hiervon ist noch zu nennen:

*Joubert:* Note sur la résolution de l'équation du cinquième degré. (Comptes R. 1859 t. 48 p. 290—294).

*Brioschi:* Sulle equazioni del moltiplicatore per la transformazione delle funzioni ellitiche. (Annali di Mathematica 1858 t. I p. 175—177).

*Brioschi:* Sulla risoluzione della equazioni del quinto grado. (A. d. M. t. I p. 256—259. 326—328).

*Joubert:* Sur l'équation du sixième degré. (C. R. 1867 t. 64 p. 1025—1028, 1081—1085, 1237—1240).

*Brioschi:* Sur l'équation du cinquième degré. (C. R. 1871 t. 73 p. 1470—1472).

Kurze Notizen hieraus sind enthalten in:

Extrait d'une lettre adressée à *M. Liouville* par *M. Schröter*. (Journal de Math. Deux. série. 1858 t. III p. 258—264).

Ueber Modulargleichungen der elliptischen Functionen. (Borchardt Journ. t. 58 p. 378—379).

Weitere Ausführungen über einige Formeln der obigen Dissertation enthält die Schrift:

*Schröter:* Ueber die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten $\vartheta$ und die Theilung dieser Functionen. Breslau 1855.

Hierbei ist die auf pag. 335 in der Note erwähnte Abhandlung von *Göring* noch zu erwähnen.

Die obige Arbeit von *Schröter* scheint nicht die genügende Beachtung gefunden zu haben, die kurzen Auszüge in den Journalen von *Liouville* und *Borchardt* sind nicht hinreichend, eine zu Anfang der Abhandlung aufgestellte sehr allgemeine Relation zwischen Theta-Functionen ohne Weiteres herleiten zu können.

Die von *Schröter* angewandte Methode besteht wesentlich darin, das Product zweier Theta-Functionen durch eine Summe ähnlicher Producte auszudrücken.

Für besondere Werthe der Argumente reduciren sich die Theta-Functionen auf Quantitäten, welche nur von den Moduln und den ganzen elliptischen Integralen abhängen. Die elliptischen Integrale fallen durch Division weg, es bleibt nur eine Relation zwischen den Moduln, d. h. die Modulargleichung. Der besseren Uebersicht halber mögen einige Entwickelungen von Theta-Functionen für besondere Werthe des Arguments vorangehn.

Es ist:

$$1)\quad \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k},\ \frac{\vartheta(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'},\ \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}.$$

Die Gleichungen 5), 6) und 7) auf pag. 296 geben:

$$2)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta_3(0)\sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}}\sqrt{k'}, \\ \vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \vartheta_3(0)\sqrt[4]{\frac{1-k'}{2}}\sqrt{k'}. \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(\frac{i}{4}\log q\right) = \vartheta_2\left(\frac{i}{4}\log q\right) = \vartheta_3(0)\, q^{-\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\sqrt{k}}, \\ \vartheta\left(\frac{i}{4}\log q\right) = i\vartheta_1\left(\frac{i}{4}\log q\right) = \vartheta_3(0)\, q^{-\frac{1}{16}} \sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\sqrt{k}}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 1) und 2) giebt die Gleichung 1) auf pag. 295, $x = \frac{\pi}{8}$ gesetzt:

$$2\left[\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = \sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}} + \sqrt{k'^3}\sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}} + \sqrt{k^3}\sqrt[4]{\frac{1-k'}{2}\sqrt{k'}}.$$

Wegen:

$$\sqrt{k^3} = \sqrt[4]{1-k'^2} = \sqrt[4]{1+k'}\sqrt[4]{1-k'},$$

ist

$$2\left[\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = \sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}}\,[1+k'^{\frac{3}{2}}+(1+k')^{\frac{1}{2}}(1-k')].$$

Da:

$$1+k'^{\frac{3}{2}} = (1+\sqrt{k'})(1-\sqrt{k'}+k'),$$

so folgt:

$$1+k'^{\frac{3}{2}}+(1+k')^{\frac{1}{2}}(1-k') = (1+\sqrt{k'})(\sqrt{1+k'}+1)(\sqrt{1+k'}-\sqrt{k'}).$$

Wendet man ähnliche einfache Transformationen an, so geben die Gleichungen 1)—4) auf pag. 295 mittelst der obigen Gleichungen 2) und 3) die folgenden:

$$4)\quad \begin{cases} 2\left[\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = (1+\sqrt{k'})(\sqrt{1+k'}+1)(\sqrt{1+k'}-\sqrt{k'})M, \\ 2\left[\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = (1+\sqrt{k'})(\sqrt{1+k'}-1)(\sqrt{1+k'}+\sqrt{k'})M, \\ 2\left[\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = (1-\sqrt{k'})(\sqrt{1+k'}+1)(\sqrt{1+k'}+\sqrt{k'})M, \\ 2\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = (1-\sqrt{k'})(\sqrt{1+k'}-1)(\sqrt{1+k'}-\sqrt{k'})M, \end{cases}$$

wo $M = \sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}\sqrt{k'}}$.

Man findet ganz analog:

$$5)\quad \begin{cases} 2\left[\dfrac{\vartheta_3\left(\dfrac{i\log q}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{16}}(1+\sqrt{k})\,(\sqrt{1+k}+1)\,(\sqrt{1+k}-\sqrt{k})\,N, \\ 2\left[\dfrac{\vartheta\left(\dfrac{i\log q}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{16}}(1-\sqrt{k})\,(\sqrt{1+k}+1)\,(\sqrt{1+k}+\sqrt{k})\,N, \\ 2\left[\dfrac{\vartheta_2\left(\dfrac{i\log q}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{16}}(1+\sqrt{k})\,(\sqrt{1+k}-1)\,(\sqrt{1+k}+\sqrt{k})\,N, \\ 2\left[\dfrac{\vartheta_1\left(\dfrac{i\log q}{8}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{16}}(1-\sqrt{k})\,(\sqrt{1+k}-1)\,(\sqrt{1+k}-\sqrt{k})\,N, \end{cases}$$

$$\text{wo } N = \sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\sqrt{k}}.$$

In den Gleichungen 4) und 5) ist die vierte Wurzel, mit Ausnahme in der letzten Gleichung gleich $+1$ zu nehmen. Wegen Gleichung 7) auf pag. 296 ist allgemein

$$\vartheta_1\left(\frac{i\log q}{m}\right) = -iQ,$$

wo $Q$ eine reelle Grösse bedeutet.

Nach pag. 85 ist:

$$6)\quad \begin{cases} \vartheta_3\left(\dfrac{\pi+i\log q}{2}\right) = 0, \\ \vartheta\left(\dfrac{\pi+i\log q}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0) = q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{k}\;\vartheta_3(0), \\ \vartheta_2\left(\dfrac{\pi+i\log q}{2}\right) = iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta(0) = iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{k'}\,\vartheta_3(0), \\ \vartheta_1\left(\dfrac{\pi+i\log q}{2}\right) = q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3(0). \end{cases}$$

Setzt man in den Gleichungen 1)—4) auf pag. 295 $x = \frac{\pi+i\log q}{4}$, so ergiebt sich mittelst der Gleichungen 6) folgendes System von Gleichungen:

7)

$$\left[\frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi+i\log q}{4}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{k'+ik}{2} = iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{k-ik'}{2} =$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}}\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{k-ik'}{2} = e^{\frac{\pi i}{2}}\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\left(\frac{\sqrt{1+k}-i\sqrt{1-k}}{2}\right)^2,$$

$$\left[\frac{\vartheta\left(\frac{\pi+i\log q}{4}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^4 = q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{k'-ik}{2} =$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}}\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\left(\frac{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}}{2}\right)^2,$$

$$\left[\frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi+i\log q}{4}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^2 = q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{ik-k'}{2} = iq^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{k+ik'}{2} =$$

$$e^{\frac{\pi i}{2}}\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\left(\frac{\sqrt{1+k}+i\sqrt{1-k}}{2}\right)^2,$$

$$\left[\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi+i\log q}{4}\right)}{\vartheta_3(0)}\right]^2 = q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\,\frac{-ik-k'}{2} =$$

$$e^{-\frac{\pi i}{2}}\,q^{-\frac{1}{4}}\sqrt{kk'}\left(\frac{\sqrt{1+k}-i\sqrt{1-k}}{2}\right)^2.$$

Die Gleichungen 2)—7) sind mit einiger Vollständigkeit dargestellt, da dieselben noch bei andern Untersuchungen Verwendung finden. Man kann mittelst dieser Gleichungen die Werthe der Theta-Functionen mit den Argumenten:

$$\frac{\pi}{2^n},\quad \frac{i\log q}{2^n},\quad \frac{\pi+i\log q}{2^n}$$

für $n = 3, 4\ldots$ successive berechnen, mit Rücksicht auf die Gleichungen 1)—4) auf pag. 295.

Bei der zweiten Herleitung des Multiplicationstheorems der Theta-Functionen auf p. 100 und 101 ist das Product zweier Theta-Functionen mit dem zweiten Argumente $q$ durch ähnliche Ausdrücke mit dem zweiten Argumente $q^2$ ersetzt. Dieses Verfahren hat *Schröter* auf folgende Art bedeutend verallgemeinert.

Nehmen $r$ und $s$ alle ganzzahligen Werthe an, so ist:

$$\vartheta_3(x, q^\alpha)\ \vartheta_3(y, q^\beta) = \Sigma\Sigma q^{\alpha r^2+\beta s^2+2rxi+2syi}.$$

Statt $s$ werde in der Doppelsumme rechts ein neues summirendes Element $t$ mittelst der Gleichung $s = r+t$ eingeführt. Es ist dann:

$$\vartheta_3(x, q^\alpha)\ \vartheta_3(y, q^\beta) = \Sigma\Sigma q^{(\alpha+\beta)r^2+2\beta rt+\beta t^2} e^{2r(x+y)i+2tyi},$$

oder $q^{\alpha+\beta}$ statt $q$ gesetzt:

$$8)\quad \vartheta_3(x, q^{\alpha(\alpha+\beta)})\ \vartheta_3(y, q^{\beta(\alpha+\beta)}) = \Sigma\Sigma q^{[(\alpha+\beta)r+\beta t]^2+\alpha\beta t^2} e^{2r(x+y)i+2tyi}.$$

An Stelle des summirenden Elements $t$ in der Doppelsumme rechts führe man $s$ mittelst der Gleichung $t = (\alpha+\beta)s+\mu$ ein. Nimmt $\mu$ die ganzzahligen Werthe 0, 1, 2,... $\alpha+\beta-1$ an, so durchläuft $s$ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $\infty$, wenn dieses mit $t$ der Fall ist. Die Gleichung 8) wird hierdurch:

$$9)\quad \vartheta_3(x, q^{\alpha(\alpha+\beta)})\ \vartheta_3(y, q^{\beta(\alpha+\beta)}) = \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1} \Sigma\Sigma q^\varrho\, e^{2\sigma i},$$

wo:

$$\sigma = r(x+y)+y[(\alpha+\beta)s+\mu],$$
$$\varrho = [(\alpha+\beta)(r+\beta s)+\beta\mu]^2+\alpha\beta[(\alpha+\beta)s+\mu]^2,$$

oder:

$$\sigma = (r+\beta s)(x+y)+(\alpha y-\beta x)s+\mu y,$$
$$\varrho = (\alpha+\beta)^2[(r+\beta s)^2+\alpha\beta s^2]+\beta(\alpha+\beta)\mu^2 +2(\alpha+\beta)\beta[(r+\beta s)\mu+\alpha s\mu].$$

In der Gleichung 9) werde $q^{\alpha+\beta}$ einfach durch $q$ ersetzt. An Stelle von $r$ werde $r'$ als summirendes Element mittelst der Gleichung $r+\beta s = r'$ eingeführt. Die Gleichung 9) geht hierdurch über in:

$$10)\quad \vartheta_3(x, q^\alpha)\ \vartheta_3(y, q^\beta) = \sum_{0}^{\alpha+\beta-1} q^{\beta\mu^2} e^{2\mu yi}\,\Theta,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Theta = \Sigma\Sigma q^{(\alpha+\beta)r'^2+2\beta r'\mu+\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2+2\alpha\beta s\mu}\, e^{2\sigma' i},$$
$$\sigma' = r'(x+y)+(\alpha y-\beta x)s.$$

Nun ist allgemein $q^m = e^{m \cdot \log q}$, also:

$$q^{2\beta r'\mu} = e^{2\beta\mu r' \log q}, \quad q^{2\alpha\beta s\mu} = e^{2\alpha\mu s \log q}.$$

Der Ausdruck von $\Theta$ lässt sich mittelst dieser Gleichungen als Product zweier Summen darstellen. Es ist dann offenbar:

$$\Theta =$$
$$\Sigma q^{(\alpha+\beta)r'^2} e^{2(x+y-\mu\beta i \log q)r'i} \times$$
$$\Sigma q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)s^2} e^{2(\alpha y-\beta x-\mu\alpha\beta i \log q)si},$$

oder einfach:

$$\Theta =$$
$$\vartheta_3(x+y-\mu\beta i \log q,\ q^{\alpha+\beta})\ \vartheta_3(\alpha y-\beta x-\mu\alpha\beta i \log q,\ q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}).$$

Setzt man diesen Werth von $\Theta$ in die Gleichung 10), so erhält man folgende bemerkenswerthe Gleichung:

$$11) \quad \vartheta_3(x, q^\alpha)\ \vartheta_3(y, q^\beta) =$$
$$\sum_0^{\alpha+\beta-1} q^{\beta\mu^2} e^{2\mu y i}\ \vartheta_3(x_1, q^{\alpha+\beta})\ \vartheta_3(y_1, q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}),$$

$$x_1 = x+y-\mu\beta i \log q,$$
$$y_1 = \alpha y-\beta x-\mu\alpha\beta i \log q.$$

Da die linke Seite durch gleichzeitige Vertauschung von $x$ mit $y$ und $\alpha$ mit $\beta$ ungeändert bleibt, so ist auch:

$$12) \quad \vartheta_3(x, q^\alpha)\ \vartheta_3(y, q^\beta) =$$
$$\sum_0^{\alpha+\beta-1} q^{\alpha\mu^2} e^{2\mu x i}\ \vartheta_3(x', q^{\alpha+\beta})\ \vartheta_3(y', q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}),$$

$$x' = x+y-\alpha\mu i \log q,\ y' = \beta x-\alpha y-\mu\alpha\beta i \log q.$$

Diese Gleichung giebt zu vielen interessanten, speciellen Fällen Veranlassung, von denen nur die folgenden hervorgehoben werden mögen.

Für $x = \alpha z+a$, $y = \beta z+b$ erhält man:

$$13) \quad \begin{cases} \vartheta_3(\alpha z+a, q^\alpha)\ \vartheta_3(\beta z+b, q^\beta) = \\ \sum_0^{\alpha+\beta-1} q^{\alpha\mu^2+2(\alpha z+a)\mu i}\ \vartheta_3(x', q^{\alpha+\beta})\ \vartheta_3(y', q^{\alpha\beta(\alpha+\beta)}), \\ x' = (\alpha+\beta)z+a+b-\mu\alpha i \log q, \\ y' = \beta a-\alpha b-\mu\alpha\beta i \log q. \end{cases}$$

Diese Gleichung zeichnet sich dadurch aus, dass unter dem Summenzeichen eine der Theta-Functionen von $z$ unabhängig ist.

Für $a = x$, $\alpha = 1$, $b = -x$, $z = y$ und $\beta = n$ wird die Gleichung 13) einfacher:

$$14)\quad \vartheta_3(x+y, q)\,\vartheta_3(ny-x, q^n) = \sum_{\mu=0}^{\mu=n} q^{\mu^2} e^{2\mu(x+y)i}\,\vartheta_3[(n+1)y - \mu i \log q,\ q^{n+1}] \times \vartheta_3[(n+1)x - n\mu i \log q,\ q^{n(n+1)}].$$

Auf diese Gleichung hat *Schröter* die Construction der Modulargleichungen begründet.

Es sei $n$ eine ungrade, also $n+1$ eine grade Zahl. Setzt man in 14) $x+\frac{\pi}{2}$ statt $x$, so folgt:

$$\vartheta(x+y, q)\,\vartheta(ny-x, q^n) = \sum_{0}^{n}(-1)^{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu(x+y)i}\,\vartheta_3[(n+1)y - \mu i \log q,\ q^{n+1}] \times \vartheta_3[(n+1)x - n\mu i \log q,\ q^{n(n+1)}].$$

Diese Gleichung zur Gleichung 14) addirt giebt:

$$15)\quad \vartheta_3(x+y, q)\,\vartheta_3(ny-x, q^n) + \vartheta(x+y, q)\,\vartheta(ny-x, q^n) = 2\sum_{0}^{\frac{n-1}{2}} q^{4\mu^2} e^{4\mu(x+y)i}\,\vartheta_3[(n+1)y - 2\mu i \log q,\ q^{n+1}] \times \vartheta_3[(n+1)x - 2n\mu i \log q,\ q^{n(n+1)}].$$

Unter Anwendung der beiden Gleichungen:

$$16)\quad \begin{cases} 2\vartheta_3(2x, q^4) = \vartheta_3(x, q) + \vartheta(x, q), \\ 2\vartheta_2(2x, q^4) = \vartheta_3(x, q) - \vartheta(x, q), \end{cases}$$

lässt sich die Gleichung 15) noch weiter transformiren. Mittelst der Gleichungen 16) folgt:

$$17)\quad \vartheta_3(z, q)\,\vartheta_3(z_1, q_1) + \vartheta(z, q)\,\vartheta(z_1, q_1) = 2\vartheta_3(2z, q^4)\,\vartheta_3(2z_1, q_1^4) + \vartheta_2(2z, q^4)\,\vartheta_2(2z_1, q_1^4).$$

Man setze $z = x+y$, $z_1 = ny-x$ und $q_1 = q^n$. Die linke Seite von 15) ersetze man durch die rechte Seite von 17), nehme darauf $x$, $y$ statt $2x$, $2y$ und $q^{\frac{1}{4}}$ statt $q$. Man erhält so:

18) $$\vartheta_3(x+y, q)\ \vartheta_3(ny-x, q^n)+\vartheta_2(x+y, q)\ \vartheta_2(ny-x, q^n) =$$
$$\sum_0^{\frac{n-1}{2}} q^{\mu^2} e^{2\mu(x+y)i}\ \vartheta_3\left[\frac{n+1}{2}y-\frac{\mu i}{2}\log q, q^{\frac{n+1}{4}}\right]\times$$
$$\vartheta_3\left[\frac{n+1}{2}x-\frac{n\mu i}{2}\log q, q^{\frac{n(n+1)}{4}}\right].$$

Es sei $n = 4m-1$, setzt man in der vorstehenden Gleichung $x+\frac{\pi}{2}$ statt $x$, addirt die so erhaltene Gleichung zur Gleichung 18), so folgt:

19)
$$\begin{aligned}
&\vartheta_3[x+y, q]\ \vartheta_3[(4m-1)y-x, q^{4m-1}]\\
&+\vartheta_2[\ \ \ \ ]\ \vartheta_2[\ \ \ \ \ \ \ \ ]\\
&+\vartheta\ [\ \ \ \ ]\ \vartheta\ [\ \ \ \ \ \ \ \ ]\\
&-\vartheta_1[\ \ \ \ ]\ \vartheta_1[\ \ \ \ \ \ \ \ ] =\\
&2\sum_0^{m-1} q^{4\mu^2} e^{4\mu(x+y)i}\ \vartheta_3[2my-\mu i\log q, q^m]\times\\
&\qquad\qquad \vartheta_3[2mx-(4m-1)\mu i\log q, q^{m(4m-1)}].
\end{aligned}$$

In der Abhandlung „Ueber die Entwickelung der Potenzen etc." hat *Schröter* die Gleichung 14) noch etwas verallgemeinert (l. c. p. 6). Da indessen die Ableitung dieser Gleichung etwas weitläufig ist und dieselbe nicht weiter im Folgenden angewandt wird, so möge hier der Hinweis auf die bemerkte Abhandlung genügen.

Wird in den Gleichungen 1)—7) $q$ durch $q^n$ ersetzt, so mögen $k$ und $k'$ respective übergehn in $l$ und $l'$, so dass z. B. die erste Doppelgleichung auf folgende führt:

$$\vartheta_3\left(\frac{i\log q^n}{4}, q^n\right) = \vartheta_2\left(\frac{i\log q^n}{4}, q^n\right) =$$
$$\vartheta_3(0, q^n) q^{-\frac{n}{16}} \sqrt{\frac{1+l}{2}\sqrt{l}}.$$

## § 50 Anwendung der Theta-Functionen auf die Construction von Modulargleichungen nach Schröter.

Die Gleichungen 14), 17) und 19) des vorhergehenden § gestatten Relationen zwischen Theta-Functionen herzustellen, welche für besondere Werthe des Arguments unmittelbar auf Modular-

gleichungen führen. Man kann sich hierbei noch mit Vortheil der Transformationen zweiter Ordnung bedienen. Die Gleichungen 5), 6), 9), 10), 11), 24), 25) und 26) von § 40 geben:

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_3(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt{\dfrac{1+k'}{2}},\ \dfrac{\vartheta_2(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt{\dfrac{1-k'}{2}},\ \dfrac{\vartheta(0,q^2)}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt[4]{k'}, \\ \dfrac{\vartheta_3(0,\sqrt{q})}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt{1+k},\ \dfrac{\vartheta(0,\sqrt{q})}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt{1-k},\ \dfrac{\vartheta_2(0,\sqrt{q})}{\vartheta_3(0,q)} = \sqrt{2}\sqrt[4]{k}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen sollen im Folgenden einige Anwendungen gemacht werden.

## Modulargleichung für die Transformation III. Ordnung.

Für $m = 1$ giebt die Gleichung 19) des vorhergehenden §

$$\vartheta_3(x+y,q)\ \vartheta_3(3y-x,q^3)+\vartheta_2(x+y,q)\ \vartheta_2(3y-x,q^3) +\vartheta(x+y,q)\ \vartheta(3y-x,q^3)-\vartheta_1(x+y,q)\ \vartheta_1(3y-x,q^3) = 2\vartheta_3(2y,q)\ \vartheta_3(2x,q^3).$$

Für $x = y = \frac{z}{2}$ folgt hieraus:

$$2)\quad \vartheta_2(z,q)\ \vartheta_2(z,q^3)+\vartheta(z,q)\ \vartheta(z,q^3)-\vartheta_1(z,q)\ \vartheta_1(z,q^3) = \vartheta_3(z,q)\ \vartheta_3(z,q^3).$$

Setzt man hierin $z = 0$, so folgt:

$$\vartheta_2(0,q)\ \vartheta_2(0,q^3)+\vartheta(0,q)\ \vartheta(0,q^3) = \vartheta_3(0,q)\ \vartheta_3(0,q^3)$$

d. i.

$$\sqrt{kl}+\sqrt{k'l'} = 1,$$

was die von *Legendre* gefundene Gleichung ist. (Fonct. ell. I. p. 230, Suppl. p. 70).

Ist $\mu$ eine ganze Zahl, so giebt die Gleichung 3) für $z = \mu i \log q$:

$$3)\quad \vartheta_3(0,q)\ \vartheta_3(\mu i\log q, q^3) = \vartheta_2(0,q)\ \vartheta_2(\mu i\log q, q^3)\cdot +\vartheta(0,q)\ (-1)^\mu\ \vartheta(\mu i\log q, q^3).$$

## Modulargleichung für die Transformation V. Ordnung.

In der Gleichung 15) von § 49 nehme man $n = 5$ und $\sqrt{q}$ statt $q$, ferner in der Gleichung 18) $n = 5$ und $q^2$ statt $q$. Es folgt so:

4) $\vartheta_3(x+y, \sqrt{q})\ \vartheta_3(5y-x, \sqrt{q^5})+\vartheta(x+y, \sqrt{q})\ \vartheta(5y-x, \sqrt{q^5}) =$

$$2\sum_0^2 q^{2\mu^2} e^{4\mu(x+y)i}\ \vartheta_3(6y-\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_3(6x-5\mu i\log q, q^{15}),$$

5) $\vartheta_3(x+y, q^2)\ \vartheta_3(5y-x, q^{10})+\vartheta_2(x+y, q^2)\ \vartheta_2(5y-x, q^{10}) =$

$$\sum_0^2 q^{2\mu^2} e^{4\mu(x+y)i}\ \vartheta_3(3y-\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_3(3x-5\mu i\log q, q^{15}).$$

In 4) nehme man $x = 0$, $y = \frac{i\log q}{4}$, ferner $y = 0$, $x = \frac{5i\log q}{4}$.

Nun ist:

$$\vartheta_3\left(\frac{i\log q}{4}, \sqrt{q}\right) = \vartheta_3\left(\frac{i\log\sqrt{q}}{2}, \sqrt{q}\right) = q^{-\frac{1}{8}}\ \vartheta_2(0, \sqrt{q}).$$

$$\vartheta\left(\frac{i\log q}{4}, \sqrt{q}\right) = 0.$$

Durch Vertauschung von $q$ mit $q^5$ ergeben sich zwei analoge Gleichungen. Es ist ferner:

$$\vartheta_3\left(\frac{3i\log q}{2}-\mu i\log q, q^3\right) = \vartheta_3(\mu i\log q-\frac{i\log q^3}{2}, q^3) =$$

$$q^{-\frac{3}{4}} e^{\mu\log q}\ \vartheta_2(\mu i\log q, q^3) = q^{\mu-\frac{3}{4}}\ \vartheta_2(\mu i\log q, q^3).$$

Mit Rücksicht auf diese Entwickelungen erhält man:

6)
$$\begin{cases} \vartheta_2(0, \sqrt{q})\ \vartheta_2(0, \sqrt{q^5}) = 2\sum_0^2 q^{2\mu^2}\ \vartheta_2(\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_3(5\mu i\log q, q^{15}), \\ \vartheta_2(0, \sqrt{q})\ \vartheta_2(0, \sqrt{q^5}) = 2\sum_0^2 q^{2\mu^2}\ \vartheta_3(\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_2(5\mu i\log q, q^{15}). \end{cases}$$

Die Gleichung 5) giebt $x = 0$, $y = \frac{\pi}{4}$ und $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ gesetzt:

7)
$$\begin{cases} \vartheta(0, q^2)\ \vartheta(0, q^{10}) = \\ \sum_0^2 (-1)^\mu q^{2\mu^2}\ \vartheta(\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_3(5\mu i\log q, q^{15}), \\ \vartheta(0, q^2)\ \vartheta(0, q^{10}) = \\ \sum_0^2 (-1)^\mu q^{2\mu^2}\ \vartheta_3(\mu i\log q, q^3)\ \vartheta(5\mu i\log q, q^{15}). \end{cases}$$

In der Gleichung 3) setze man $q^5$ statt $q$ und schreibe die resultirende Gleichung auf folgende Art:

$$\vartheta_2(0, q^5)\,\vartheta_2(5\mu i \log q, q^{15}) + \vartheta(0, q^5)\,(-1)^\mu\,\vartheta(5\mu i \log q, q^{15}) = \vartheta_3(0, q^5)\,\vartheta_3(5\mu i \log q, q^{15}).$$

Diese Gleichung multiplicire man mit der Gleichung 3), das erhaltene Product mit $q^{2\mu^2}$ und setze $\mu = 0, 1, 2$. Die Summe dieser Gleichungen giebt nach 6) und 7):

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\,\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_2(0, q^5)\,.\,\vartheta_2(0, \sqrt{q})\,\vartheta_2(0, \sqrt{q^5})\\ &+\vartheta_3(0, q)\,\vartheta(0, q^5)\,.\,\vartheta(0, q^2)\,\vartheta(0, q^{10}) =\\ &\tfrac{1}{2}\,\vartheta_3(0, q^5)\,\vartheta_2(0, q)\,.\,\vartheta_2(0, \sqrt{q})\,\vartheta_2(0, \sqrt{q^5})\\ &+\vartheta_3(0, q^5)\,\vartheta(0, q)\,.\,\vartheta(0, q^2)\,\vartheta(0, q^{10})\end{aligned}$$

oder:

$$\tfrac{1}{2}[\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_2(0, q^5) - \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_3(0, q^5)]\,\vartheta_2(0, \sqrt{q})\,\vartheta_2(0, \sqrt{q^5}) = [\vartheta(0, q)\,\vartheta_3(0, q^5) - \vartheta_3(0, q)\,\vartheta(0, q^5)]\,\vartheta(0, q^2)\,\vartheta(0, q^{10})$$

d. i. nach 1):

$$(\sqrt{l} - \sqrt{k})\,\sqrt[4]{kl} = (\sqrt{k'} - \sqrt{l'})\,\sqrt[4]{k'l'},$$

was die von *Jacobi* gegebene Gleichung ist.

## Modulargleichung für die Transformation VII. Ordnung.

Die Gleichung 19) des vorhergehenden § giebt für $m = 2$, $x = 0$ und $y = 0$:

$$\vartheta_3(0, q)\,\vartheta_3(0, q^7) + \vartheta_2(0, q)\,\vartheta_2(0, q^7) + \vartheta(0, q)\,\vartheta(0, q^7) = 2[\vartheta_3(0, q^2)\,\vartheta_3(0, q^{14}) + \vartheta_2(0, q^2)\,\vartheta_2(0, q^{14})].$$

Nach 1) wird diese Gleichung:

$$1 + \sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} = \sqrt{(1+k')(1+l')} + \sqrt{(1-k')(1-l')}.$$

Um hieraus die von *Guetzlaff* gegebene Gleichung zu erhalten, bilde man das Quadrat der vorstehenden Gleichung. Nach einer einfachen Reduction folgt:

$$2\sqrt{kl} + 2\sqrt{k'l'} + 2\sqrt{kl}\,\sqrt{k'l'} = 1 + kl + k'l',$$

oder:

$$4\sqrt{kl}\,\sqrt{k'l'} = [1 - \sqrt{kl} - \sqrt{k'l'}]^2.$$

Durch Ausziehung der Wurzel folgt:

$$2\sqrt[4]{kl}\sqrt[4]{k'l'} = 1-\sqrt{kl}-\sqrt{k'l'}$$

d. i.

$$(\sqrt[4]{kl}+\sqrt[4]{k'l'})^2 = 1.$$

Hieraus ergiebt sich unmittelbar die gesuchte Gleichung:

$$\sqrt[4]{kl}+\sqrt[4]{k'l'} = 1.$$

## Modulargleichung für die Transformation XI. Ordnung.

Die Gleichung 19) des vorhergehenden § wird für $m = 3$:

8) $\vartheta_3(x+y, q)\ \vartheta_3(11y-x, q^{11})+\vartheta_2(x+y, q)\ \vartheta_2(11y-x, q^{11})$
$+\vartheta(x+y, q)\ \vartheta(11y-x, q^{11})-\vartheta_1(x+y, q)\ \vartheta_1(11y-x, q^{11}) =$
$2\sum_0^2 q^{4\mu^2} e^{4\mu(x+y)i}\,\vartheta_3(6y-\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_3(6x-11\mu i\log q, q^{33}).$

Die rechte Seite lässt sich mittelst der Gleichung 3) reduciren. Wird in 3) $q^{11}$ statt $q$ gesetzt, so lässt sich folgende Gleichung herstellen:

$$\vartheta_2(0, q^{11})\ \vartheta_2(11\mu i\log q, q^{33})+\vartheta(0, q^{11})(-1)^\mu\ \vartheta(11\mu i\log q, q^{33})$$
$$= \vartheta(0, q^{11})\ \vartheta_3(11\mu i\log q, q^{33}).$$

Man multiplicire diese Gleichung mit der Gleichung 3), darauf mit $q^{4\mu^2}$, setze $\mu = 0, 1, 2$ und bilde die Summe der so erhaltenen Gleichungen.

Hierdurch folgt:

9) $\vartheta_3(0, q)\ \vartheta_2(0, q^{11})\sum_0^2 q^{4\mu^2}\,\vartheta_3(\mu i\log q, q^3)\ \vartheta_2(11\mu i\log q, q^{33})$

$+\vartheta_3(\ ,\ )\ \vartheta(\ ,\ )\sum(-1)^\mu q^{4\mu^2}\,\vartheta_3(\ ,\ )\ \vartheta(\ ,\ )$

$= \vartheta_2(\ ,\ )\ \vartheta_3(\ ,\ )\sum q^{4\mu^2}\,\vartheta_2(\ ,\ )\ \vartheta_3(\ ,\ )$

$+\vartheta(\ ,\ )\ \vartheta_3(\ ,\ )\sum(-1)^\mu q^{4\mu^2}\,\vartheta(\ ,\ )\ \vartheta_3(\ ,\ ).$

Die vorkommenden Summen lassen sich leicht mittelst der Gleichung 8) durch Theta-Functionen darstellen, in denen das zweite Argument respective $q$ und $q^{11}$ ist. Zu diesem Zwecke setze man in der Gleichung 8) successive:

$$y = 0,\ x = \frac{11 i \log q}{4};$$

$$y = 0,\ x = \frac{\pi}{4};$$

$$x = 0,\ y = \frac{i \log q}{4};$$

$$x = 0,\ y = \frac{\pi}{4}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 2) und 3) von § 49 findet man:

$$\sum_0^2 q^{4\mu^2}\, \vartheta_3(\mu i \log q, q^3)\, \vartheta_2(11\mu i \log q, q^{33}) =$$

$$q^{\frac{3}{4}}\left[\vartheta_3\left(\frac{i\log q}{4}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{i\log q^{11}}{4}, q^{11}\right) - \vartheta\left(\frac{i\log q}{4}, q\right)\vartheta\left(\frac{i\log q^{11}}{4}, q^{11}\right)\right] =$$

$$\vartheta_3(0, q)\, \vartheta_3(0, q^{11})\left[\sqrt[4]{\frac{(1+k)(1+l)}{4}} - \sqrt[4]{\frac{(1-k)(1-l)}{4}}\right]\sqrt[8]{kl}.$$

$$\sum_0^2 (-1)^\mu q^{4\mu^2}\, \vartheta_3(\mu i \log q, q^3)\, \vartheta(11\mu i \log q, q^{33}) =$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q^{11}\right) + \vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q^{11}\right) =$$

$$\vartheta_3(0, q)\, \vartheta_3(0, q^{11})\left[\sqrt[4]{\frac{(1+k')(1+l')}{4}} + \sqrt[4]{\frac{(1-k')(1-l')}{4}}\right]\sqrt[8]{k'l'}.$$

$$\sum_0^2 q^{4\mu^2}\, \vartheta_2(\mu i \log q, q^3)\, \vartheta_3(11\mu i \log q, q^{33}) =$$

$$q^{\frac{3}{4}}\left[\vartheta_3\left(\frac{i\log q}{4}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{i\log q^{11}}{4}, q^{11}\right) + \vartheta\left(\frac{i\log q}{4}, q\right)\vartheta\left(\frac{i\log q^{11}}{4}, q^{11}\right)\right] =$$

$$\vartheta_3(0, q)\, \vartheta_3(0, q^{11})\left[\sqrt[4]{\frac{(1+k)(1+l)}{4}} + \sqrt[4]{\frac{(1-k)(1-l)}{4}}\right]\sqrt[8]{kl}.$$

$$\sum_0^2 (-1)^\mu q^{4\mu^2}\, \vartheta(\mu i \log q, q^3)\, \vartheta_3(11\mu i \log q, q^{33}) =$$

$$\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q^{11}\right) - \vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q\right)\vartheta_2\left(\frac{\pi}{4}, q^{11}\right) =$$

$$\vartheta_3(0, q)\, \vartheta_3(0, q^{11})\left[\sqrt[4]{\frac{(1+k')(1+l')}{4}} - \sqrt[4]{\frac{(1-k')(1-l')}{4}}\right]\sqrt[8]{k'l'}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichungen lässt sich die Gleichung 9) auf folgende Form bringen:

$$\left[(\sqrt{k}-\sqrt{l})\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}\frac{1+l}{2}}+(\sqrt{k}+\sqrt{l})\sqrt[4]{\frac{1-k}{2}\frac{1-l}{2}}\right]\sqrt[8]{kl}=$$

$$\left[(\sqrt{l'}-\sqrt{k'})\sqrt[4]{\frac{1+k'}{2}\frac{1+l'}{2}}+(\sqrt{l'}-\sqrt{k'})\sqrt[4]{\frac{1-k'}{2}\frac{1-l'}{2}}\right]\sqrt[8]{k'l'}.$$

Analog der Gleichung 3) hat *Schröter* noch mehrere einfache Relationen aufgestellt, welche in ähnlicher Weise zur Verwendung kommen, wie die Gleichung 3) bei den Modulargleichungen für die Transformationen V. und XI. Ordnung. Für eine weitere Behandlung des Gegenstandes muss auf die früher citirte, ausgezeichnete Dissertation verwiesen werden, da die sehr ausgedehnten, wenn auch sehr symmetrischen, Formelsysteme sich nicht wohl an diesem Orte wiedergeben lassen. Die Modulargleichungen sind nicht immer in der einfachsten Form aufgestellt, wie die Notizen in den Journalen von *Liouville* und *Borchardt* zeigen. Es scheint hier noch ein weites Feld für umfassende Untersuchungen vorzuliegen, sowohl was eine Weiterführung der gewonnenen Resultate, wie eine mögliche Vereinfachung derselben anbelangt.

# Note I.

## Ueber einige Integrale, welche sich auf elliptische Integrale reduciren lassen.

Im ersten Bande des „Traité des fonctions elliptiques“ hat *Legendre* an verschiedenen Stellen, namentlich in Chap. XXVI, XXVII, XXXII und XXXIII, Integrale betrachtet, welche auf elliptische reductibel sind und deren ziemlich einfache Formen es gestatten ohne Zuhülfenahme anderer Theorien die Reduction einfach direct ausführen zu können.

Es sollen zunächst die im Chap. XXXII p. 252—256 behandelten Fälle mitgetheilt werden.

Sind $P$, $Q$, $R$, $S$ Functionen von $x^2$, so lässt sich jede, rationale, gebrochene Function auf die Form bringen:

$$T = \frac{P+Qx}{R+Sx},$$

oder Zähler und Nenner mit $R-Sx$ multiplicirt:

$$T = \frac{PR-QSx^2+(QR-PS)x}{R^2-S^2x^2} = M+Nx,$$

wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $x^2$ sind.

Sind $A$, $B$, $C$, $D$ und $Z$ Polynome von $z$, so lässt sich durch Multiplication und Division mit $C-D\sqrt{Z}$ der Ausdruck:

$$R = \frac{A+B\sqrt{Z}}{C+D\sqrt{Z}}$$

auf die Form:

$$R = \frac{AC-BDZ+(BC-AD)\sqrt{Z}}{C^2-D^2Z} = U+V\sqrt{Z}$$

bringen, wo $U$ und $V$ rationale Functionen von $z$ sind.

I. Setzt man $x^2 = z$ in:

$$\int \frac{M+Nx}{\sqrt{a+bx^2+b'x^4+a'x^6}}\,dx,$$

wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $x^2$ sind, so geht das Integral über in:

$$\frac{1}{2}\int \frac{Mdz}{\sqrt{z}\sqrt{a+bz+b'z^2+a'z^3}} + \frac{1}{2}\int \frac{Ndz}{\sqrt{a+bz+b'z^2+a'z^3}},$$

wo nun $M$ und $N$ rationale Functionen von $z$ sind. Die beiden Integrale in Beziehung auf $z$ sind elliptische Integrale.

Im Chap. XXXIII, p. 259—272 hat *Legendre* das obige Integral genauer untersucht und dabei eine Anzahl interessanter Specialfälle betrachtet.

II. Es bedeute $T$ eine rationale Function von $x$, so kann man setzen $T = M+Nx$, wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $x^2$ sind. Sei:

$$H = \int \frac{M+Nx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}}\,dx.$$

Man setze:

$$\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4} = z$$

und nehme die Wurzel:

$$cx^2 = -b+\sqrt{b^2+(z^4-a)c},$$

also:

$$xdx = \frac{z^3dz}{\sqrt{b^2+(z^4-a)c}}.$$

Es ist $N = U+V\sqrt{b^2+(z^4-a)c}$, wo $U$ und $V$ rationale Functionen von $z^4$ sind. Man erhält so:

$$\int \frac{Nxdx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}} = \int \frac{Uz^2dz}{\sqrt{b^2+(z^4-a)c}} + \int Vz^2dz.$$

Um:

$$\int \frac{Mdx}{\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}}$$

zu reduciren, setze man:

$$\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4} = xy$$

oder:

$$x^2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-a(c-y^4)}}{c-y^4}.$$

Differentiirt man den Logarithmen dieser Gleichung, so folgt:

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{a(b^2-ac+ay^4)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{b^2-a(c-y^4)}-b} + \frac{2}{c-y^4}\right)y^3dy.$$

Multiplicirt und dividirt man im ersten Terme rechts mit $\sqrt{b^2-a(c-y^4)}+b$, so folgt einfacher:

$$\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{b^2-a(c-y^4)}-b}{c-y^4}\,\frac{y^3dy}{\sqrt{b^2-a(c-y^4)}}.$$

oder:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{x^2y^2dy}{\sqrt{b^2-a(c-y^4)}}.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\int \frac{Mdx}{\sqrt{a+2bx^2+cx^4}} = \int \frac{U_1y^2dy}{\sqrt{b^2-a(c-y^4)}} + \int V_1y^2dy,$$

wo $U_1$ und $V_1$ rationale Functionen von $y^4$ sind.

Sind wieder $M$ und $N$ rationale Functionen von $x^2$, so lässt sich ganz auf dieselbe Weise wie $H$ das Integral:

$$H_1 = \int (M+Nx)\sqrt[4]{a+2bx^2+cx^4}\,dx$$

transformiren. Auf die Integrale $H$ und $H_1$ lässt sich das Integral:

$$\int (M+Nx).(a+2bx^2+cx^4)^{\pm\frac{3}{4}}\,dx$$

reduciren, und ebenso für $t = x^2$ das Integral:

$$\int L.(a+2bt+ct^2)^{\pm\frac{1}{4}}\,dt,$$

wo $L$ eine rationale Function von $t$ ist.

III. Das Integral:

$$J = \int (M+Nx)\,(a+2bx+cx^2+a'x^3)^{\pm\frac{1}{3}}\,dx,$$

wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $x^2$ sind, lässt sich auf mehrfache Weise auf elliptische Integrale reduciren. Man kann sich zuerst einer der folgenden Substitutionen bedienen.

$$\sqrt[3]{a+2bx+cx^2+a'x^3} = \sqrt[3]{a+t},$$
$$\sqrt[3]{a+2bx+cx^2+a'x^3} = x\sqrt[3]{a'+t}.$$

Man kann zweitens eine der Constanten $a$ oder $a'$ in

$$(a+2bx+cx^2+a'x^3)^{+\frac{1}{3}}$$

wegschaffen, indem man $x = m+y$ oder $x = m+\frac{1}{y}$ setzt und für $m$ eine reelle Wurzel der Gleichung $a+2bm+cm^2+a'm^3 = 0$ nimmt. Es sei auf diese Art die Quantität $a'$ weggeschafft. Setzt man dann:

$$a+2bx+cx^2 = z^3 \text{ oder } cx = -b+\sqrt{b^2+(z^3-a)c},$$

so lässt sich $J$ auf die Form bringen:

$$\int \frac{U dz}{\sqrt{b^2+(z^3-a)c}} + \int V dz,$$

wo $U$ und $V$ rationale Functionen von $z$ sind.

Offenbar lässt sich auf dem von *Legendre* angegebenen Wege auch das Integral:

$$\int (M+Nx)\,(a+2bx+cx^2+a'x^3)^{\pm\frac{2}{3}}\,dx$$

behandeln.

Die in dieser Nummer behandelten Integrale sind mehrfach reproducirt worden, man hat auf dieselben Sätze angewandt, welche einfache Consequenzen der Lehre von den elliptischen Integralen sind. In einer sonst sehr hübschen kleinen Notiz „Théorème relatif à une certaine fonction transcendante" (Crelle. Journ. t. 9 p. 295—296) hat *Minding* das Integral:

$$\int \sqrt[3]{1+\alpha x^3}\,dx$$

behandelt und sich dazu eines allgemeinen Satzes von *Abel* (Crelle. Journ. t. 4 p. 200) bedient. *Richelot* (Crelle. Journ. t. 9 p. 407—408) hat schon bemerkt, dass das von *Minding* behandelte Integral als besonderer Fall in dem obigen von *Legendre* behandelten Integrale enthalten ist. Unter dem Titel „Note relative à l'intégration d'une équation remarquable" hat *Allégret* in den „Comptes Rendus" (t. 63 p. 1144) die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{(A+Bx+Cx^2+Dx^3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{(A+By+Cy^2+Dy^3)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

behandelt. Die Unkenntniss der Arbeiten von *Legendre* und eine pompöse Ankündigung neuer Entdeckungen haben dem Verfasser, unachtet einiger eleganten Entwickelungen, eine sehr scharfe Kritik von *Serret* und *Liouville* (Compt. *R.* 1174) nicht erspart.

Die in II und III behandelten Integrale finden sich erweitert und vollständiger ausgeführt in der Dissertation: „De quibusdam generibus integralium ellipticorum" (Berolini 1857) von *Röthig*. Ein Auszug dieser lesenswerthen Abhandlung ist unter dem Titel „Ueber einige Gattungen elliptischer Integrale" im Journ. f. Math. t. 56 p. 197—203 mitgetheilt.

IV. Es sei $P$ eine rationale Function von $x$, in dem Intregrale:

$$H = \int \frac{P.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2+gx^3+cx^4+bx^5+ax^6}},$$

oder, was dasselbe ist, in dem Integrale:

$$H = \int \frac{Px^{-\frac{3}{2}}\,dx}{\sqrt{a(x^3+x^{-3})+b(x^2+x^{-2})+c(x+x^{-1})+g}}$$

setze man $x+x^{-1} = 2z$, also $x = z \pm \sqrt{z^2-1}$,

$$\frac{1}{x} = z \mp \sqrt{z^2-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{z+1} \mp \sqrt{z-1}}{\sqrt{2}}.$$

Die letzte Gleichung differentiirt giebt:

$$-\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{dz}{\sqrt{z+1}} \pm \frac{dz}{\sqrt{z-1}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$2a(4z^3-3z)+2b(2z^2-1)+2cz+g = Z,$$

so nimmt $H$ die Form an:

$$H = \int \frac{Z_1 dz}{\sqrt{(z+1)Z}} + \int \frac{Z_2 dz}{\sqrt{(z-1)Z}},$$

wo $Z_1$ und $Z_2$ rationale Functionen von $z$ sind.

V. Ist $Q$ eine rationale Function von $y$, so kann man setzen $Q = M+Ny$, wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $y^2$ sind. Es sei nun:

$$H_1 = \int \frac{Q dy}{\sqrt{b+cy^2+gy^4+cy^6+by^8}}.$$

Für $y^2 = x$ nimmt das Integral:

$$\int \frac{M dy}{\sqrt{b+cy^2+gy^4+cy^6+by^8}}$$

genau die Form des in IV behandelten Integrals an, wenn dort $a = b$ gesetzt wird. Für $y^2 = x$ reducirt sich:

$$\int \frac{Ny dy}{\sqrt{b+cy^2+gy^4+cy^6+by^8}}$$

offenbar auf ein elliptisches Integral.

VI. Auf das Integral $H_1$ in $V$ lässt sich das Integral:

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{a+2bx^4+cx^8}}$$

reduciren, wo $P$ eine rationale Function von $x$ ist, mittelst der Substitution $x = \left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{8}} z$. Diese Substitution setzt voraus, dass $a$ und $c$ gleiche Zeichen haben.

Für den Fall, dass $b = 0$, $a = \pm 1$ und $c = \mp 1$, das Integral also die Form hat:

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{\pm(1-x^8)}},$$

vergleiche man über dessen Reduction eine Abhandlung von *Richelot* in Crelle. Journ. t. 32 p. 213—218.

VII. Es bedeute $Q$ eine rationale Function von $\sin^2\varphi$. Ist in:

$$V = \int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1-m\sin^2\varphi}}$$

$m > 1$, so setze man $m = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ und $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\psi$. Es geht dann $V$ über in:

$$V = \int \frac{\sin\alpha\, Qd\psi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\psi}},$$

wo $Q$ eine rationale Function von $\sin^2\psi$ ist.

VIII. Ist $m$ positiv, sonst beliebig, so folgt mittelst der Substitution: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$:

$$\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{1+m\sin^2\varphi}} = -\sqrt{1-k^2}\int \frac{Qd\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},$$

wo $k^2 = \frac{m}{1+m}$. Es bedeutet $Q$ eine rationale Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ oder von $\cos\psi$ und $\sin\psi$.

IX. Ist $Q$ eine rationale Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so setze man zur Reduction des Integrals:

$$\int \frac{Qd\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi+c\sin\varphi}}$$

$\varphi = 2\psi+\alpha$ und bestimme $\alpha$ durch: $b\sin\alpha = c\cos\alpha$. Es wird dann

$$a+b\cos\varphi+c\sin\varphi = a+(b\cos\alpha+c\sin\alpha)\cos 2\psi$$
$$= a+b\cos\alpha+c\sin\alpha-2(b\cos\alpha+c\sin\alpha)\sin^2\psi$$

oder kürzer $a+b\cos\varphi+c\sin\varphi = a'\pm b'\sin^2\psi$. Der Ausdruck für $Q$ nimmt die Form an $Q = M+N\sin\psi\cos\psi$, wo $M$ und $N$ rationale Functionen von $\sin^2\psi$ sind. Das obige Integral nimmt die Form an:

$$\frac{1}{2}\int \frac{Md\psi}{\sqrt{a'\pm b'\sin^2\psi}} + \frac{1}{2}\int \frac{N\sin\psi\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{a'\pm b'\sin^2\psi}}.$$

Das erste der vorstehenden Integrale lässt sich auf elliptische

Integrale reduciren, das zweite wird rational mittelst der Substitution $a' \pm b' \sin^2 \psi = x^2$.

X. Ist $Q$ eine rationale Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, setzt man: $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2} = x$, $\frac{\varphi}{2} = \operatorname{arctang} x$, also:

$$\cos\varphi = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin\varphi = \frac{2x}{1+x^2}, \quad d\varphi = \frac{2dx}{1+x^2},$$

so geht das Integral:

$$\int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+D\cos^2\varphi+E\sin\varphi\cos\varphi+F\sin^2\varphi}}$$

unmittelbar in ein elliptisches Integral über.

Ein anderes sehr ausgezeichnetes Verfahren dieses Integral zu reduciren rührt von *Gauss* her. (Werke III p. 333).*)

XI. Es bedeute $Q$ eine Function von $\sin^2\varphi$. Für:

$$\operatorname{tang}\varphi = m \operatorname{tang}\psi, \quad \sin^2\varphi = \frac{m^2\sin^2\psi}{\cos^2\psi+m^2\sin^2\psi},$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos^2\psi}{\cos^2\psi+m^2\sin^2\psi}, \quad d\varphi = \frac{m d\psi}{\cos^2\psi+m^2\sin^2\psi},$$

nimmt das Integral:

$$J = \int \frac{Q d\varphi}{\sqrt{a+b\sin^2\varphi}\,\sqrt{a'+b'\sin^2\varphi}},$$

die Form an:

$$J = \int \frac{m Q d\psi}{\sqrt{R}},$$

wo:

$$R = [a\cos^2\psi+(a+b)m^2\sin^2\psi]\,[a'\cos^2\psi+(a'+b')m^2\sin^2\psi].$$

Es nimmt $J$ die Form eines elliptischen Integrales an, wenn $m$ durch eine der Gleichungen $a = (a+b)m^2$, oder $a' = (a'+b')m^2$ bestimmt wird, was voraussetzt, dass $a$ und $a+b$, oder $a'$ und $a'+b'$ gleiche Zeichen haben. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so setze man $\sin\varphi = x$ und betrachte $Q$ allgemeiner als eine rationale Function von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Man kann dann setzen $Q = X_1 + X_2\sqrt{1-x^2}$, wo $X_1$ und $X_2$ rationale Functionen von $x$ sind. Das Integral $J$ geht dann über in:

$$J = \int \frac{X_1 dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{a+bx^2}\,\sqrt{a'+b'x^2}} + \int \frac{X_2 dx}{\sqrt{a+bx^2}\,\sqrt{a'+b'x^2}}.$$

*) Vide § 5.

Das erste der vorstehenden Integrale ist in I behandelt, das zweite hat die Form eines elliptischen Integrals.

Ausser den in I—XI betrachteten Integralen hat *Legendre* im Chap. XXVII auf p. 178 und p. 180 noch einige Integrale reducirt, deren vollständige Ausführung hier zu weit führen würde. Da die behandelten Integrale als specielle Fälle der in IV und V aufgestellten Integrale erscheinen, so sollen dieselben, von diesem Gesichtspunct aus, hier noch kurz angemerkt werden.

In dem Integrale:

$$A = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi}},$$

setze man:

$$\sqrt[4]{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi} = y\sqrt[4]{\sin\alpha},$$

also:

$$\cos\alpha\,\sin\varphi = \sqrt{1-y^4\sin\alpha},\ \cos\alpha\,\cos\varphi = \sqrt{\sin\alpha}\,\sqrt{y^4-\sin\alpha}.$$

Man erhält so:

$$A = -2\int \frac{y^2(\sin\alpha)^{\frac{1}{4}}\,dy}{\sqrt{-\sin\alpha(1+y^8)+(1+\sin^2\alpha)y^4}},$$

welches Integral sich auf $H_1$ in V reducirt für:

$$b = -\sin\alpha,\ c = 0,\ \text{und}\ g = 1+\sin^2\alpha.$$

Setzt man:

$$\sqrt[3]{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi} = x\sqrt[3]{\sin\alpha},$$

so geht das Integral:

$$B = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi}}$$

über in:

$$B = -\frac{3}{2}\int \frac{x(\sin\alpha)^{\frac{1}{3}}\,dx}{\sqrt{-\sin\alpha.(1+x^6)+(1+\sin^2\alpha)x^3}}.$$

Dieses Integral kommt auf das durch $H$ bezeichnete Integral in IV zurück, für $a = -\sin\alpha$, $b = 0$, $c = 0$ und $g = 1+\sin^2\alpha$. Das von *Legendre* p. 183 behandelte Integral:

$$C = \int \sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha\,\sin^2\varphi}{\sin\varphi}}\,d\varphi$$

nimmt für $\sin\varphi = \frac{y^2}{\sqrt{\cos\alpha}}$ die Form an:

$$C = 2\sqrt[4]{\cos\alpha}\int \frac{(1-\cos\alpha\,y^4)\,dy}{\sqrt{(1+y^8)\,\cos\alpha-(1+\cos^2\alpha)\,y^4}}.$$

Das rechts stehende Integral ist ein besonderer Fall des in V untersuchten Integrals $H_1$.

Bei dieser Gelegenheit mögen zu § 5 folgende Abhandlungen nachträglich angemerkt werden, welche sich mit der Reduction elliptischer Integrale auf die Normalform beschäftigen, oder Untersuchungen über derartige Integrale enthalten.

*Heine:* Die Reduction der elliptischen Integrale in ihre kanonische Form. (Borchardt Journ. t. 53 p. 199—230).

Die Abhandlung enthält allgemeine und ausführliche Untersuchungen über den Fall, dass die Constanten, welche in einem elliptischen Differential vorkommen, nicht reell sind.

*Müller:* Beziehungen zwischen dem Modul der elliptischen Functionen und den Invarianten der biquadratischen binären Formen. (Zeitschrift für Mathem. Jahrg. 18 p. 280—287).

Eine directe Anwendung der Reductionsmethode von *Legendre* mit Rücksicht auf die Gränzen des Integrals, enthält:

*Lindman:* De formula integrali

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{Bx^3+Cx^2+Dx+E}},$$

(Grunert: Archiv für Mathematik. Theil 27 p. 1—12).

Sehr ausführlich ist die Reduction behandelt bei

*Gudermann:* Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale. Siebzehnter Abschnitt. (Crelle. Journal t. 23 p. 301—353).

Die angewandten Methoden, an sich ziemlich elementar, enthalten schon theilweise Begriffe und Bezeichnungen elliptischer Functionen.

*Brioschi:* Sopra una transformazione dell' integrale ellitico. (Annali di Matematica t. 3 p. 216—220).

*Genocchi:* Intorno alla riduzione degl' integrali ellitici. (Annali d. M. t. 6 p. 5—17).

---

## Note II.

### Die Reihen von Lagrange und Fourier.

Da die Entwickelung einer Function in eine trigonometrische Reihe bei verschiedenen Problemen, betreffend die Theta-Functionen, zur Anwendung kommt, so soll eine kurze Herleitung derartiger Reihen hier ausgeführt werden. Der befolgte Weg ist im Wesentlichen mit

dem übereinstimmend, welchen *Schlömilch* in der Schrift: Die Reihenentwickelungen der Differential- und Integralrechnung (Dresden 1851) eingeschlagen hat.

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass die Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$ endlich und stetig bleiben innerhalb der Gränzen des Arguments, für welche sie zur Anwendung kommen.

Die geometrische Progression führt, wenn $-1 < y < 1$, auf:

$$\frac{1}{1-ye^{zi}} = 1+ye^{zi}+y^2e^{2zi}+\ldots$$

Hieraus erhält man unmittelbar:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{1-ye^{zi}}-\frac{1}{1-ye^{-zi}}\right) = \frac{y\sin z}{1-2y\cos z+y^2} = y\sin z+y^2\sin 2z+\ldots,$$

oder durch $y$ dividirt:

$$\frac{\sin z}{1-2y\cos z+y^2} = \sum_1^\infty y^{n-1}\sin nz.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung folgt:

$$1)\quad \int_0^1 \frac{\sin z}{1-2y\cos z+y^2}\,dy = \sum_1^\infty \sin nz \int_0^1 y^{n-1}\,dy,$$

d. i.

$$2)\quad \operatorname{arctang}\frac{\sin z}{1-\cos z} = \sum_1^\infty \frac{\sin nz}{n}.$$

Das Integral auf der linken Seite der Gleichung 1) bleibt endlich und stetig, wenn der Nenner $1-2y\cos z+y^2$ von Null verschieden ist. Dieses findet statt, wenn $z$ innerhalb der Gränzen 0 und $2\pi$ liegt, welchen Werth auch $y$ von 0 bis 1 annehmen möge. In 2) wird folglich $0 < z < 2\pi$ angenommen. Da für ein positives $a$:

$$\operatorname{arctang} a+\operatorname{arctang}\frac{1}{a} = \frac{\pi}{2},\quad \operatorname{arctang}(\operatorname{tang} a) = a,\ a < \pi$$

so ist:

$$\operatorname{arctang}\frac{\sin z}{1-\cos z} = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctang}\left(\operatorname{tang}\frac{z}{2}\right) = \frac{\pi-z}{2},$$

wenn $0 < \frac{z}{2} < \pi$ d. i. $0 < z < 2\pi$. Die Gleichung 2) wird hierdurch:

$$3)\quad \frac{\pi-z}{2} = \sum_1^\infty \frac{\sin nz}{n},\quad 0 < z < 2\pi.$$

Durch Vertauschung von $z$ mit $\pi-z$ folgt:

$$4)\quad \frac{z}{2} = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\sin nz}{n},\quad -\pi < z < \pi.$$

Es sei:

$$5)\quad A = \int_0^\pi \varphi'(u) \sum_1^\infty \frac{\sin n(u+x)}{n}\, du,\quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Da $0 < x+u < 2\pi$, so lässt sich $A$ nach 3) auf folgende Form bringen:

$$6)\quad A = \int_0^\pi \varphi'(u) \frac{\pi - x - u}{2}\, du =$$

$$-\frac{\pi}{2}\varphi(\pi) - \frac{\pi - x}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(u)\, du.$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\int_0^\pi \varphi'(u) \frac{\sin n(u+x)}{n}\, du = (-1)^n \frac{\sin nx}{n}\varphi(\pi) - \frac{\sin nx}{n}\varphi(0)$$

$$-\int_0^\pi \varphi(u) \cos n(u+x)\, du.$$

Summirt man in Beziehung auf $n$, wendet die Gleichungen 3) und 4) an, so folgt, wegen der Bedeutung von $A$ aus 5):

$$7)\quad A = -\frac{\pi}{2}\varphi(\pi) - \frac{\pi - x}{2}\varphi(0) - \int_0^\pi \varphi(u) \cos n(u+x)\, du.$$

Die gleichzeitige Anwendung der Gleichungen 3) und 4) giebt, wenn $x$ statt $z$ gesetzt wird $-\pi < x < \pi$, $0 < x < 2\pi$; es ist also in den Gleichungen 6) und 7) $0 < x < \pi$. Setzt man:

$$8)\quad \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(u)\, du + \int_0^\pi \varphi(u) \sum_1^\infty \cos n(u+x)\, du = S,$$

so giebt der doppelte Werth von $A$ aus 6) und 7) $S = 0$, wenn $0 < x < \pi$. Für $x = 0$ ist:

$$9)\quad A = \int_0^\pi \varphi'(u) \sum \frac{\sin nu}{n}\, du = \int_0^\pi \varphi'(u) \frac{\pi - u}{2}\, du =$$

$$-\frac{\pi}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(u)\, du.$$

Durch partielle Integration folgt auch:

$$A = \int_0^{\pi} \varphi'(u) \sum \frac{\sin nu}{n} du = -\int_0^{\pi} \varphi(u) \sum \cos nu \, du.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit 9) zeigt, dass:

$$10) \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(u)\, du + \int_0^{\pi} \varphi(u) \sum \cos nu \, du = \frac{\pi}{2} \varphi(0).$$

Für $x = \pi$ geben die Gleichungen 4) und 5):

$$11) \quad A = \int_0^{\pi} \varphi'(u) \sum (-1)^n \frac{\sin nu}{n} du = -\int_0^{\pi} \varphi'(u) \frac{u}{2} du =$$

$$-\frac{\pi}{2} \varphi(\pi) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(u)\, du.$$

Wendet man wieder die partielle Integration an, so ist auch:

$$A = \int_0^{\pi} \varphi'(u) \sum (-1)^n \frac{\sin nu}{n} du =$$

$$-\int_0^{\pi} \varphi(u) \sum (-1)^n \cos nu \, du = -\int_0^{\pi} \varphi(u) \sum \cos n(u+\pi) du.$$

Aus dieser Gleichung und der Gleichung 11) folgt:

$$12) \quad \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \varphi(u)\, du + \int_0^{\pi} \varphi(u) \sum \cos n(u+\pi)\, du = \frac{\pi}{2} \varphi(\pi).$$

Die Zusammenstellung der Gleichungen 8), 11) und 12) giebt:

$$13) \quad \begin{cases} S = 0, \ 0 < x < \pi. \\ S = \frac{\pi}{2} \varphi(0), \ x = 0. \\ S = \frac{\pi}{2} \varphi(\pi), \ x = \pi. \end{cases}$$

In dem Integrale:

$$14) \quad B = \int_0^{\pi} \varphi'(u) \sum_1^{\infty} \frac{\sin n(u-x)}{n} du,$$

liege $x$ zwischen den Gränzen 0 und $\pi$. Man zerlege das Integral in zwei andere mit den Gränzen $(x, \pi)$ und $(0, x)$. Da im zweiten Integrale $u < x$, so setze man $\sin n(u-x) = -\sin n(x-u)$. Man erhält so:

$$15) \quad B = \int_x^{\pi} \varphi'(u) \sum \frac{\sin n(u-x)}{n} du - \int_0^{x} \varphi'(u) \sum \frac{\sin n(x-u)}{n} du.$$

Im ersten Integrale ist $0 < u - x < \pi$, im zweiten $0 < x - u < \pi$. Wendet man also die Reihe 3) an, so wird der Werth von $B$:

$$16)\quad B = \int_x^{\pi} \varphi'(u) \frac{\pi - u + x}{2} du - \int_0^{x} \varphi'(u) \frac{\pi + u - x}{2} du =$$

$$\frac{\pi + x}{2} \int_x^{\pi} \varphi'(u)\, du - \frac{\pi - x}{2} \int_0^{x} \varphi'(u)\, du - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi'(u)\, u du =$$

$$\frac{\pi - x}{2} \varphi(0) + \frac{x}{2} \varphi(\pi) - \pi \varphi(x) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(u)\, du.$$

Aus 14) oder 15) erhält man durch partielle Integration:

$$B = \varphi(\pi) \sum (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n} + \varphi(0) \sum \frac{\sin nx}{n} = \int_0^{\pi} \varphi(u) \cos n(u - x) du,$$

d. i. nach 3) und 4):

$$17)\quad B = \frac{x}{2} \varphi(\pi) + \frac{\pi - x}{2} \varphi(0) - \int_0^{\pi} \varphi(u) \cos n(u - x)\, du.$$

Setzt man:

$$18)\quad \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(u)\, du + \int_0^{\pi} \varphi(u) \sum_1^{\infty} \cos n(u - x)\, du = S_1,$$

so giebt der doppelte Werth von $B$ aus 16) und 17) $S_1 = \pi \varphi(x)$, wenn $0 < x < \pi$. Da die Werthe von $S$ und $S_1$ aus 8) und 18) zusammenfallen für $x = 0$ und $x = \pi$, so ist:

$$S_1 = \pi \varphi(x),\ 0 < x < \pi.$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2} \varphi(0),\ x = 0.$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2} \varphi(\pi),\ x = \pi.$$

Stellt man diese Relationen mit den Gleichungen 13) zusammen, so folgt durch Addition und Subtration:

$$S_1 + S = \pi \varphi(x),\ 0 \leqq x \leqq \pi,$$

$$S_1 - S = \pi \varphi(x),\ 0 < x < \pi.$$

Die Substitution der Werthe von $S$ und $S_1$ aus 8) und 18) führt auf die folgenden Reihen, welche unter dem Namen der Reihen von *Lagrange* und *Fourier* bekannt sind.

$$19)\quad \pi \varphi(x) = \int_0^{\pi} \varphi(u)\, du + 2 \sum \cos nx \int_0^{\pi} \varphi(u) \cos nu\, du,\ 0 \leqq x \leqq \pi.$$

$$20)\quad \pi\varphi(x) = 2\sum \sin nx \int_0^{\pi} \varphi(u)\sin nu\, du,\quad 0 < x < \pi.$$

Man setze $x = \frac{\pi}{a}z$, in den Integralen rechts $u = \frac{\pi v}{a}$, die Gleichungen 19) und 20) werden dann:

$$a\varphi\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \int_0^a \varphi\left(\frac{\pi v}{a}\right)dv + 2\sum \cos\frac{n\pi z}{a}\int_0^a \varphi\left(\frac{\pi v}{a}\right)\cos\frac{n\pi v}{a}\,dv,$$

$$a\varphi\left(\frac{\pi z}{a}\right) = 2\sum \sin\frac{n\pi z}{a}\int_0^a \varphi\left(\frac{\pi v}{a}\right)\sin\frac{n\pi v}{a}\,dv,$$

oder $\varphi\left(\frac{\pi z}{a}\right) = \psi(z)$ und $x$ statt $z$ gesetzt:

$$21)\quad a\psi(x) = \int_0^a \psi(v)\,dv + 2\sum \cos\frac{n\pi x}{a}\int_0^a \psi(v)\cos\frac{n\pi v}{a}\,dv,\quad 0 \leqq x \leqq a.$$

$$22)\quad a\psi(x) = 2\sum \sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a \psi(v)\sin\frac{n\pi v}{a}\,dv,\quad 0 < x < a.$$

In der Gleichung 21) nehme man $\psi(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, in 22) $\psi(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Da nun allgemein:

$$\int_0^a F(v)\,f(-v)\,dv = \int_{-a}^0 F(-v)\,f(v)\,dv,$$

so geben die Gleichungen 21) und 22):

$$a\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{1}{2}\int_{-a}^a f(v)\,dv + \sum \cos\frac{n\pi x}{a}\int_{-a}^a f(v)\cos\frac{n\pi v}{a}\,dv,$$

$$a\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \sum \sin\frac{n\pi x}{a}\int_{-a}^a f(v)\sin\frac{n\pi v}{a}\,dv.$$

Aus der Summe dieser Gleichungen erhält man:

$$2a\,f(x) = \int_{-a}^a f(v)\,dv + 2\sum_1^{\infty}\int_{-a}^a f(v)\cos\frac{x-v}{a}n\pi\,dv.$$

Setzt man rechts:

$$2\cos\alpha = e^{\alpha i} + e^{-\alpha i},$$

so ist auch:

$$2af(x) = \int_{-a}^{a} f(v)\,dv + \sum_{1}^{\infty} e^{\frac{n\pi xi}{a}} \int_{-a}^{a} f(v) e^{-\frac{n\pi vi}{a}}\,dv +$$

$$\sum_{1}^{\infty} e^{-\frac{n\pi xi}{a}} \int_{-a}^{a} f(v) e^{\frac{n\pi vi}{a}}\,dv.$$

Nimmt man in der ersten Summe rechts $n = m$, in der zweiten $n = -m$, so ist einfacher:

$$2af(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{\frac{m\pi xi}{a}} \int_{-a}^{a} f(v) e^{-\frac{m\pi vi}{a}}\,dv.$$

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich die allgemeine Entwickelung:

$$22)\quad f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{\frac{m\pi xi}{a}},$$

wo:

$$23)\quad 2a\,A_m = \int_{-a}^{a} f(v) e^{-\frac{m\pi vi}{a}}\,dv.$$

Bedeutet $\nu$ eine unbegränzt zunehmende Zahl, so giebt die Gleichung 19) für $x = 0$:

$$\pi\varphi(0) = \int_{0}^{\pi} \varphi(u)\left[1 + 2\sum_{1}^{\nu} \cos nu\right] du = \int_{0}^{\pi} \varphi(u) \frac{\sin(2\nu+1)\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Setzt man im Integral links $\frac{u}{2} = v$, ferner $\varphi(2v) = \psi(v)$, so folgt:

$$24)\quad \frac{\pi}{2}\psi(0) = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \psi(v) \frac{\sin(2\nu+1)v}{\sin v}\,dv,\quad (\nu = \infty).$$

Ist $\psi(v) = f(v+z)$, so giebt die vorstehende Gleichung:

$$\frac{\pi}{2} f(z) = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} f(v+z) \frac{\sin(2\nu+1)v}{\sin v}\,dv,\quad (\nu = \infty).$$

Es sei:

$$25)\quad C = \int_{0}^{\infty} f(u+z) \frac{\sin(2\nu+1)u}{\sin u}\,du,$$

wo $\nu$ eine ganze, positive Zahl bedeutet. Man zerlege $C$ in eine unendliche Reihe von Integralen, indem man setzt:

$$C = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \dots$$

Im ersten Integrale rechts substituire man $u = w$, im zweiten $u = \pi + w$, im dritten $u = 2\pi + w$ u. s. f. Die Gränzen der sämmtlichen Integrale werden dann 0 und $\pi$. Vereinigt man dieselben zu einem Integral, so nimmt $C$ folgende Form an:

$$C = \int_0^{\pi} [f(w+z) + f(\pi+w+z) + f(2\pi+w+z) + \dots] \frac{\sin(2\nu+1)w}{\sin w}\, dw.$$

Das Integral rechts zerlege man in zwei Integrale mit den Gränzen $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Im ersten Integral substituire man $w = v$, im zweiten $w = \pi - v$. Die Gränzen beider Integrale sind dann $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ihre Vereinigung giebt:

$$26) \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(v) \frac{\sin(2\nu+1)v}{\sin v}\, dv,$$

$$27) \quad F(v) = f(v+z) + f(\pi+v+z) + f(2\pi+v+z) + \dots + f(\pi-v+z) + f(2\pi-v+z) + \dots$$

Man lasse $\nu$ unbegränzt zunehmen, nach 24) geht dann die Gleichung 26) über in:

$$C = \frac{\pi}{2} F(0),$$

d. i. nach 27):

$$C = \frac{\pi}{2} \left[f(z) + 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} f(r\pi + z)\right].$$

Substituirt man den Werth von $C$ aus 25), so erhält man folgende Gleichung, welche von *Lejeune-Dirichlet* herrührt:

$$\lim \int_0^{\infty} f(u+z) \frac{\sin(2\nu+1)u}{\sin u}\, du = \frac{\pi}{2} \left[f(z) + 2 \sum_{1}^{\infty} f(r\pi + z)\right], \quad (\nu = \infty).$$

Es ist dieses die Gleichung, welche im § 17 zur Anwendung gekommen ist.

Ist $\alpha$ eine beliebige Quantität, so giebt die Gleichung 19),

$$\varphi(x) = e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}$$

gesetzt:

$$\pi \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}} = \frac{1}{\alpha} + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha \cos nx}{\alpha^2 + n^2}, \quad 0 \leqq x \leqq \pi.$$

Für $x = \pi$ und $x = 0$ erhält man hieraus:

$$28)\quad \pi\frac{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}-\frac{1}{\alpha}=2\sum_1^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+n^2}.$$

$$\pi\frac{2}{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}-\frac{1}{\alpha}=2\sum_1^\infty\frac{(-1)^n\alpha}{\alpha^2+n^2}.$$

Die Differenz dieser Gleichungen giebt:

$$\pi\frac{e^{\frac{\alpha\pi}{2}}-e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}{e^{\frac{\alpha\pi}{2}}+e^{-\frac{\alpha\pi}{2}}}=4\sum_1^\infty\frac{\alpha}{\alpha^2+(2n-1)^2},$$

oder $\alpha$ mit $2\alpha$ vertauscht:

$$29)\quad \pi\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{e^{\alpha\pi}+e^{-\alpha\pi}}=8\sum_1^\infty\frac{\alpha}{4\alpha^2+(2n-1)^2}.$$

In 28) und 29) setze man $\alpha\pi=\beta t$ und multiplicire auf beiden Seiten mit $\beta$, dann folgt:

$$\beta\frac{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}-\frac{1}{t}=2\sum_1^\infty\frac{\beta^2 t}{\beta^2t^2+n^2\pi^2},$$

$$\beta\frac{e^{\beta t}-e^{-\beta t}}{e^{\beta t}+e^{-\beta t}}=8\sum_1^\infty\frac{\beta^2 t}{4\beta^2t^2+(2n-1)^2\pi^2}.$$

Diese Gleichungen mit $dt$ multiplicirt, nach $t$ zwischen den Gränzen 0 und 1 integrirt geben:

$$\log\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2\beta}=\sum_1^\infty\log\left(1+\frac{\beta^2}{n^2\pi^2}\right),$$

$$\log\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}=\sum_1^\infty\log\left(1+\frac{4\beta^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Geht man von den Logarithmen zu den Zahlen über, so ist:

$$\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2\beta}=\prod_1^\infty\left(1+\frac{\beta^2}{n^2\pi^2}\right),\quad \frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}=\prod_1^\infty\left(1+\frac{4\beta^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

In Folge der Ableitung ist $\beta$ ganz arbiträr. Nimmt man $\beta=ai-b=i(a+bi)$, so folgt:

$$\frac{e^{(a+bi)i}-e^{-(a+bi)i}}{2i(a+bi)}=\frac{\sin(a+bi)}{a+bi}=\prod_1^\infty\left[1-\left(\frac{a+bi}{n+\pi}\right)^2\right],$$

$$\frac{e^{(a+bi)i}+e^{-(a+bi)i}}{2}=\cos(a+bi)=\prod_1^\infty\left[1-\left(\frac{a+bi}{(n-\frac{1}{2})\pi}\right)^2\right].$$

Es sind dieses die Gleichungen, welche zur Reduction der unendlichen Doppelproducte des § 10 zur Anwendung gekommen sind.

# Note III.

## Transformationen einiger unendlichen Producte in Reihen.

In § 12 ist zur Darstellung einiger unendlichen Producte in Reihen das einfache Princip der Zerlegung in Partialbrüche angewandt. Allgemeinere Untersuchungen über diesen Gegenstand hat *Heine* gegeben in einer Abhandlung, welche eine Verallgemeinerung der sogenannten hypergeometrischen Reihe enthält. (Crelle. Journ. t. 34 p. 307). Eine bemerkenswerthe, hierauf sich beziehende Gleichung, ist in t. 39 des Journal v. Crelle p. 124—125 mitgetheilt. Eine weitere Darlegung der geistreichen Resultate würde hier zu weit führen.

Die Entwickelung des in § 15 aufgestellten unendlichen Products hat *Gauss* auf folgende Art ausgeführt in einer Notiz, welche den Titel trägt: Varia Imprimis De Integrali

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+\mu\mu\sin u^2}},$$

und vom November 1799 herrührt. (Gauss, Werke t. 3 p. 434). Es sei:

$$(1+qz)\,(1+q^3z)\,(1+q^5z)\ldots(1+qz^{-1})\,(1+q^3z^{-1})\,(1+q^5z^{-1})\ldots =$$
$$\ldots+\frac{R}{z^2}+\frac{Q}{z}+P+Qz+Rz^2+\ldots$$

Setzt man $zq^2$ statt $z$, so wird das links stehende Product reproducirt, dividirt durch $qz$. Hieraus folgt:

$$\left[\ldots\frac{R}{q^4z^2}+\frac{Q}{q^2z}+P+Qq^2z+Rq^4z\ldots\right]qz =$$
$$\ldots+\frac{R}{z^2}+\frac{Q}{z}+P+Qz+Rz^2+\ldots$$

Gleiche Potenzen von $z$ führen auf folgende Gleichungen:

$$\frac{Q}{q}=P,\ \frac{R}{q^3}=Q,\ \frac{S}{q^5}=R\ldots,$$

oder: $$Q=Pq,\ R=Pq^4,\ S=Pq^9,\ldots.$$

Es ist folglich:

1) $(1+qz)\,(1+q^3z)\ldots(1+qz^{-1})\,(1+q^3z^{-1})\ldots =$
$P\left[1+q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})+q^9(z^3+z^{-3})+\ldots\right].$

Ganz ähnlich wird das Quadrat des links stehenden Products entwickelt.

Die Bestimmung der Constanten $P$ ist nicht ohne einige Schwierigkeit, wie auch *Jacobi* bemerkt hat. (Fundamenta p. 178) Man vergleiche hierüber die folgende Note.

Mit unendlichen Producten, wie das in der Gleichung 1) enthaltene, hat sich *Cauchy* in den folgenden Abhandlungen beschäftigt, welche gleichzeitig Anwendungen der sogenannten Residuen-Rechnung enthalten.

Mémoire sur une certaine classe de fonctions transcendantes liées entre elles par un système qui fournissent comme cas particuliers, les développements des facteurs elliptiques en séries. (Comptes Rendus 1843 t. XVII p. 640—651.)

Mémoire sur les factorielles géométriques. (ib. 693—703).

Mémoire sur les fractions rationelles que l'on peut extraire d'une fonction transcendante, et spécialement du rapport entre deux produits de factorielles reciproques. (ib. 921—925).

Mémoire sur les fonctions qui servent à décomposer en fractions rationelles le rapport entre deux produits de factorielles reciproques. (ibid. 1159—1164).

Als Supplement zu diesen Abhandlungen dient:

Note sur les propriétés de certaines factorielles et sur la décomposition des fonctions en facteurs. (C. R. 1844 t. XIX p. 1069—1067).

---

## Note IV.

### Theorem über die Theta-Functionen. Transformation einer Reihe in ein Product.

Legt man die Reihen des § 16 als Definitionen der Theta-Functionen zu Grunde, so kann man nach dem Vorgange von *Jacobi* auf folgende einfache Weise umgekehrt von den Reihen zu den Producten übergehn.

Die Gleichung 22) der Note II giebt für $q = \pi$:

$$1) \quad f(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} A_m e^{mxi}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung ergiebt sich sehr leicht der Satz: „Jede Function, welche der Bedingung:

$$f(x+i\log q) = -q^{-1} e^{2xi} f(x)$$

genügt, ist von der Form $A\vartheta(x)+B\vartheta_1(x)$, wo $A$ und $B$ von $x$ unabhängig sind."

Die bemerkte Bedingung in Verbindung mit der Gleichung 1) giebt:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} A_m q^{-m} e^{mxi} = -q^{-1} e^{2xi} \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{mxi} = -q^{-1} \sum_{-\infty}^{\infty} A_m e^{(m+2)xi}.$$

In der Summe rechts $m$ mit $m-2$ vertauscht giebt:

$$\sum A_m q^{-m} e^{mxi} = -q^{-1} \sum A_{m-2} e^{mxi}.$$

Da $x$ arbiträr ist, so kann diese Gleichung nur stattfinden für: $A_m q^{-m} = -q^{-1} A_{m-2}$. Je nachdem $m$ grade oder ungrade folgt hieraus:

$$A_{2r} = -q^{2r-1} A_{2r-2}, \quad A_{2r+1} = -q^{2r} A_{2r-1}.$$

Diese Gleichungen führen auf:

$$A_{2r} = (-1)^r q^{r^2} A_0, \quad A_{2r+1} = (-1)^r q^{r^2+r} A_1,$$

wo $A_0$ und $A_1$ beliebige Constanten sind. Die Gleichung 1) wird für die vorstehenden Werthe der Coefficienten:

$$f(x) = A_0 \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^r q^{r^2} e^{2rxi} + A_1 \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^r q^{r^2+r} e^{(2r+1)xi}.$$

Für $A_0 = A$ und $A_1 = -iBq^{\frac{1}{4}}$ ist einfacher:

$$f(x) = A\vartheta(x) + B\vartheta_1(x),$$

was die zu beweisende Gleichung ist. Jenachdem $f(-x) = f(x)$ oder $f(-x) = -f(x)$ ist $f(x) = A\vartheta(x)$ oder $f(x) = B\vartheta_1(x)$.*)

Nach § 16 ist:

$$\vartheta(x \pm \frac{2n-1}{2} i \log q) = \pm i q^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} e^{\pm(2n-1)xi} \vartheta_1(x).$$

Für $x = 0$ folgt hieraus:

$$\vartheta\left(\pm \frac{2n-1}{2} i \log q\right) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass $\vartheta(x)$ verschwindet für

$$x = \pm \frac{2n-1}{2} i \log q, \text{ oder für } \pm 2xi = (2n-1)\log q = \log q^{2n-1}$$

d. h. also wenn:

$$e^{\pm 2xi} = q^{2n-1} \text{ oder } 1 = q^{2n-1} e^{\pm 2xi}.$$

Hieraus folgt, dass $1 - q^{2n-1} e^{2xi}$, $1 - q^{2n-1} e^{-2xi}$ Factoren von $\vartheta(x)$ sind, in welchen $n$ alle ganzzahligen, positiven Werthe annehmen kann. Bezeichnet man das Product aller dieser Factoren durch $f(x)$, so ist:

---

*) Ueber den bemerkten Satz vergleiche man:
Extraits de deux lettres de *M. Ch. Hermite* à *M. Jacobi*. Crelle. J. t. 32 p. 284.

$$2)\quad f(x) = \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1} e^{2xi})(1 - q^{2n-1} e^{-2x}) =$$

$$\prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{4n-2}).$$

Diese Gleichung giebt:

$$f(x + i \log q) = \prod (1 - q^{2n-3} e^{2xi})(1 - q^{2n+1} e^{-2xi}) =$$

$$\frac{1 - q^{-1} e^{2xi}}{1 - q\, e^{-2xi}} \prod (1 - q^{2n-1} e^{2xi})(1 - q^{2n-1} e^{-2xi}) = -q^{-1} e^{2xi} f(x).$$

Da nun nach 2) $f(-x) = f(x)$, so unterscheidet sich $f(x)$ von $\vartheta(x)$ nur durch einen Factor, welcher von $x$ unabhängig ist. Mit Rücksicht auf 2) folgt also:

$$3)\quad \vartheta(x) = F(q) \prod_1^\infty (1 - 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{4n-2}),$$

wo $F(q)$ eine Function von $q$ ist. Dieses ist dieselbe Gleichung, welche nach Note III *Gauss* auf umgekehrtem Wege gefunden hat, für $z = -e^{2xi}$ und $P.F(q) = 1$.

Zur Bestimmung von $F(q)$ dienen die Gleichungen 18) von § 20, nämlich:

$\vartheta_3(x, q) = \vartheta_3(2x, q^4) + \vartheta_2(2x, q^4)$, $\vartheta(x, q) = \vartheta_3(2x, q^4) - \vartheta_2(2x, q^4)$.

Für $x = \frac{\pi}{4}$ erhält man hieraus:

$$4)\quad \vartheta_3\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = \vartheta\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = \vartheta(0, q^4).$$

Nach 3) ist:

$$\vartheta(0, q) = F(q) \prod_1^\infty (1 - q^{2n-1})^2,$$

also $q^4$ statt $q$ gesetzt:

$$5)\quad \vartheta(0, q^4) = F(q^4) \prod_1^\infty (1 - q^{8n-4})^2.$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$ giebt die Gleichung 3):

$$6)\quad \vartheta\left(\frac{\pi}{4}, q\right) = F(q) \prod_1^\infty (1 + q^{4n-2}).$$

Da die linken Seiten der Gleichungen 5) und 6) nach 4) einander gleich sind, so ergiebt sich zur Bestimmung von $F(q)$:

$$F(q) \prod (1 + q^{4n-2}) = F(q^4) \prod (1 - q^{8n-4})^2$$

oder:

7) $F(q) = F(q^4)\,\Pi(1-q^{8n-4})(1-q^{4n-2})$.

In $\Pi(1-q^{4n-2})$ unterscheide man die graden und ungraden Werthe von $n$, so dass:

$$\Pi(1-q^{4n-2}) = \Pi(1-q^{8r-2})(1-q^{8r-6}),$$

oder rechts wieder $n$ statt $r$ gesetzt:

$$\Pi(1-q^{4n-2}) = \Pi(1-q^{8n-2})(1-q^{8n-6}).$$

Die Gleichung 7) wird hierdurch:

8) $F(q) = F(q^4)\,\Pi(1-q^{8n-2})(1-q^{8n-4})(1-q^{8n-6})$.

Es sind alle graden Zahlen in einer der vier Formen enthalten: $8n$, $8n-2$, $8n-4$, $8n-6$. Multiplicirt man die Gleichung 8) auf beiden Seiten mit $\Pi(1-q^{8n})$, so lässt sich der Factor von $F(q^4)$ auf der rechten Seite einfach schreiben $\Pi(1-q^{2n})$. Man erhält so:

$$F(q)\,\Pi(1-q^{8n}) = F(q^4)\,\Pi(1-q^{2n}),$$

oder:

$$\frac{F(q)}{\Pi(1-q^{2n})} = \frac{F(q^4)}{\Pi(1-q^{8n})}.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt, dass jede Seite constant ist. Nimmt man $q = 0$, so reducirt sich jede Seite auf $F(0)$, es ist also $F(q) = F(0)\,\Pi(1-q^{2n})$. Für $q = 0$ ist also $\vartheta(x, 0) = 1$. Die Gleichung 3) giebt dann $1 = F(0)$, hieraus folgt schliesslich:

$$F(q) = \Pi(1-q^{2n}),$$

und noch 3):

9) $\vartheta(x) = \Pi(1-q^{2n})\,\Pi(1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})$.

Aus dieser Gleichung lassen sich wieder die unendlichen Doppelproducte herstellen, welche im dritten Abschnitt als Zähler und Nenner der elliptischen Functionen auftraten. Da die Ausführung keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, so soll dieselbe hier der Kürze halber übergangen werden.

Die vorstehende Darstellung der Transformation einer Reihe in ein Product, mittelst der Reihen von *Fourier* und *Lagrange* rührt von *Jacobi* her, welcher eine directe Verification zwischen Reihe und Product, indem er jeden dieser Ausdrücke logarithmisch differentiirte, zum Gegenstande einer interessanten Abhandlung gemacht hat. Man vergleiche hierüber: „Ueber die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel in der Theorie der elliptischen Functionen“ enthalten in Crelle's Journal t. 36 p. 75—80, oder auch *Jacobi*: Mathemat. Werke II. p. 7—12.

Nimmt man in der Gleichung 1) von Note III $z = -e^{2xi}$, so ergiebt sich durch Vergleichung mit der Gleichung 9):

$$P = \frac{1}{\Pi(1-q^{2n})}.$$

Da $z$ in der Note III nur die Bedingung zu erfüllen hat, dass Product und Reihe endliche Werthe haben, so gilt in Folge davon die Gleichung 9) für ein beliebiges reelles oder complexes $x$.

---

## Note V.

### Ueber einige Folgerungen Jacobi's aus dem Additionstheorem der elliptischen Functionen durch Combinationen der betreffenden Gleichungen und Integration.

In der Abhandlung „Sur la rotation d'un corps" hat *Jacobi* (Crelle Journ. t. 39 p. 325, Werke II, p. 171) ein System von 16 Gleichungen aufgestellt, von denen 12 je zwei der Functionen:

$$\sin\mathrm{am}(a+b),\ \cos\mathrm{am}(a+b),\ \Delta\mathrm{am}(a+b)$$

enthalten, während in den vier übrigen sämmtliche drei Functionen vorkommen. Diese Gleichungen sind mehrfach abgeleitet worden z. B. von *Broch* in der Abhandlung „Sur les formules d'addition des fonctions elliptiques de M. C-G-J. Jacobi" (Comptes Rendus. t. 59 p. 99—1004) und *Björling* „Notes sur les formules d'addition des fonctions elliptiques" (Grunerts Archiv f. Math. t. 47 p. 399—402).

Aus den Gleichungen für $\cos\mathrm{am}(a+b)$ und $\Delta\mathrm{am}(a+b)$ ergiebt sich leicht die folgende Gleichung:

1) $\cos\mathrm{am}(a+b)+\sin\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}(a+b) = \cos\mathrm{am}a\,\cos\mathrm{am}b.$

Vertauscht man $a$ mit $a-b$, darauf $-b$ mit $b$, so folgt:

2) $\cos\mathrm{am}b\,\cos\mathrm{am}(a+b)+\sin\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}(a+b) = \cos\mathrm{am}a.$

Durch Vertauschung von $a$ und $b$ folgt hieraus:

3) $\cos\mathrm{am}a\,\cos\mathrm{am}(a+b)+\sin\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}b\,\sin\mathrm{am}(a+b) = \cos\mathrm{am}b.$

Wird in der Gleichung 1) $a$ durch $a+K$ ersetzt, so geht dieselbe über in:

4) $\Delta\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}(a+b)-\sin\mathrm{am}a\,\cos\mathrm{am}b\,\Delta\mathrm{am}(a+b) = \cos\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}b.$

Durch Vertauschung von $a$ mit $b$ giebt die vorstehende Gleichung:

5) $\Delta\mathrm{am}b\,\sin\mathrm{am}(a+b)-\sin\mathrm{am}b\,\cos\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}(a+b) = \cos\mathrm{am}b\,\sin\mathrm{am}a.$

In der Gleichung 4) setze man $a-b$ statt $b$, dann $b$ statt $-b$, es ist alsdann:

6) $\sin\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b) - \cos\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am} a \cos\mathrm{am}(a+b) =$
$-\sin\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am}(a+b).$

Durch Vertauschung von $a$ mit $b$ folgt hieraus:

7) $\sin\mathrm{am} a \cos\mathrm{am}(a+b) - \cos\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b) =$
$-\sin\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am}(a+b).$

In der Gleichung 4) vertausche man $b$ mit $b-a$ und darauf $a$ mit $-a$, man erhält so:

8) $-\cos\mathrm{am} a \sin\mathrm{am}(a+b)+\sin\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b) =$
$-\sin\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am} a.$

Diese Gleichung führt durch Vertauschung von $a$ mit $b$ auf:

9) $-\cos\mathrm{am} b \sin\mathrm{am}(a+b)+\sin\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am} a \cos\mathrm{am}(a+b) =$
$-\sin\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b.$

Ersetzt man in der Gleichung 1) $a$ durch $a+K$, $b$ durch $b+K$, so findet man:

10) $\Delta\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b)+k'^2 \sin\mathrm{am} a \sin\mathrm{am} b =$
$\cos\mathrm{am} a \cos\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am}(a+b).$

In der vorstehenden Gleichung $a-b$ statt $a$, dann $-b$ statt $b$ gesetzt führt auf:

11) $\Delta\mathrm{am} a \cos\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b)+k'^2 \sin\mathrm{am} b \sin\mathrm{am}(a+b) =$
$\cos\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am}(a+b).$

Durch Vertauschung von $a$ mit $b$ folgt hieraus:

12) $\Delta\mathrm{am} b \cos\mathrm{am} a \cos\mathrm{am}(a+b)+k'^2 \sin\mathrm{am} a \sin\mathrm{am}(a+b) =$
$\cos\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am}(a+b).$

Zwischen den Gleichungen 1) und 10) eliminire man das Product $\sin\mathrm{am} a \sin\mathrm{am} b$, man erhält dann die merkwürdige Gleichung:

13) $\Delta\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am}(a+b) - k^2 \cos\mathrm{am} a \cos\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b) = k'^2.$

Werden $a$ und $b$ hierin durch $a+K$ und $b+K$ ersetzt, so folgt:

14) $\Delta\mathrm{am}(a+b)+k^2 \sin\mathrm{am} a \sin\mathrm{am} b \cos\mathrm{am}(a+b) = \Delta\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am} b.$

Setzt man $a-b$ statt $a$ und darauf $-b$ statt $b$, so giebt die vorstehende Gleichung:

15) $\Delta\mathrm{am} b\ \Delta\mathrm{am}(a+b)+k^2 \sin\mathrm{am} b \cos\mathrm{am} a \sin\mathrm{am}(a+b) = \Delta\mathrm{am} a.$

Durch Vertauschung von $a$ mit $b$ erhält man schliesslich aus der vorstehenden Gleichung:

16) $\Delta\mathrm{am} a\ \Delta\mathrm{am}(a+b)+k^2 \sin\mathrm{am} a \cos\mathrm{am} b \sin\mathrm{am}(a+b) = \Delta\mathrm{am} b.$

Dieses sind die 16 Gleichungen *Jacobi's* in etwas verschiedener Anordnung wie sie *Björling* abgeleitet hat. Es verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichung 13) sich schon bei *Guetzlaff* in einem kleinen Aufsatze. „Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis" findet. (Crelle. Journ. t. 12 p. 173).

In der Abhandlung „Formulae novae in theoria transcendentium

ellipticarum fundamentales" (Crelle. J. t. XV p. 199—204) hat *Jacobi* durch ein sehr einfaches Integrationsverfahren eine merkwürdige Relation zwischen Sinus Amplitudinis aufgestellt, für welche *Richelot* (ibid. p. 201) einen directen Beweis gegeben hat.

Setzt man im Zähler von $\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)$ $\alpha = u+a$, $\beta = u+b$, so lässt sich derselbe schreiben:

$$\begin{aligned}&\sin\mathrm{am}(u+a)\cos\mathrm{am}(u+b)\,\Delta\mathrm{am}(u+b)\\&+\sin\mathrm{am}(u+b)\cos\mathrm{am}(u+a)\,\Delta\mathrm{am}(u+a)\\=\;&\sin\mathrm{am}(u+a)\frac{d\sin\mathrm{am}(u+b)}{du}+\sin\mathrm{am}(u+b)\frac{d\sin\mathrm{am}(u+a)}{du}\\=\;&\frac{d\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)}{du}.\end{aligned}$$

Setzt man ferner im Zähler von $\sin\mathrm{am}(\alpha+\beta)$ $\alpha = u$, $\beta = u+a+b$, so lässt sich derselbe auf die Form bringen:

$$\frac{d\sin\mathrm{am}\,u\,.\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)}{du}.$$

Die Gleichung beider Werthe von $\sin\mathrm{am}(2u+a+b)$ giebt:

$$\frac{\dfrac{d\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)}{du}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(u+a)\,\sin^2\mathrm{am}(u+b)}=\frac{\dfrac{d\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)}{du}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}(u+a+b)}.$$

Integrirt man in Beziehung auf $u$ von $u = 0$ bis $u = u$, so folgt, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\frac{1+k\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)}{1-k\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)}\cdot\frac{1-k\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b}{1+k\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}\,b}=\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)}{1-k\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)}.$$

Diese Gleichung entwickelt giebt:

17) $\sin\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}b+\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)-\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)$
$= k^2\sin\mathrm{am}\,a\,\sin\mathrm{am}b\,\sin\mathrm{am}(u+a)\,\sin\mathrm{am}(u+b)\,\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b).$

Vertauscht man $u$, $a$, $b$ respective mit $ui$, $ai$, $bi$, ferner $k$ mit dem Complementärmodul $k'$, so giebt die vorstehende Gleichung:

18) $$\begin{cases}\mathrm{tang\,am}\,a\,\mathrm{tang\,am}\,b+\mathrm{tang\,am}\,u\,\mathrm{tang\,am}(u+a+b)-\\ \mathrm{tang\,am}(u+a)\,\mathrm{tang\,am}(u+b)=\\ k'^2\,\mathrm{tang\,am}\,a\,\mathrm{tang\,am}\,b\,\mathrm{tang\,am}(u+a)\,\mathrm{tang\,am}(u+b)\times\\ \mathrm{tang\,am}\,u\,\mathrm{tang\,am}(u+a+b).\end{cases}$$

Von der Gleichung 17) „quae est formula nova, maximi momenti

per totam theoriam functionum ellipticarum" hat *Jacobi* Anwendungen auf die Theorie der elliptischen Integrale gemacht. Der directe Beweis, welchen *Richelot* von der Gleichung 17) gegeben hat, beruht auf der folgenden sehr einfachen Betrachtung. Setzt man zur Abkürzung:

$$\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha = x,\ \sin^2 \mathrm{am}\,\beta = y,\ \sin^2 \mathrm{am}\,\gamma = z,$$

so ist nach § 24:

$$19)\quad \begin{cases} \sin \mathrm{am}(\alpha+\beta)\,\sin \mathrm{am}(\alpha-\beta) = \dfrac{x-y}{1-k^2xy}, \\ \sin \mathrm{am}(\gamma+\alpha)\,\sin \mathrm{am}(\gamma-\alpha) = \dfrac{z-x}{1-k^2xz}, \\ \sin \mathrm{am}(\beta+\gamma)\,\sin \mathrm{am}(\beta-\gamma) = \dfrac{y-z}{1-k^2yz}. \end{cases}$$

Bildet man die Summe dieser Gleichungen, bringt rechts die Ausdrücke auf denselben Nenner, so ist:

$$20)\quad \sin \mathrm{am}(\alpha+\beta)\,\sin \mathrm{am}(\alpha-\beta)+\sin \mathrm{am}(\gamma+\alpha)\,\sin \mathrm{am}(\gamma-\alpha)$$
$$+\sin \mathrm{am}(\beta+\gamma)\,\sin \mathrm{am}(\beta-\gamma) = -k^2\,\frac{(x-y)\,(z-x)\,(y-z)}{(1-k^2xy)\,(1-k^2xz)\,(1-k^2yz)}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist auch gleich dem Producte der rechten Seiten der Gleichungen 19) multiplicirt mit $-k^2$, also auch gleich dem Producte der linken Seiten der Gleichungen 19) multiplicirt mit $-k^2$. Die Gleichung 20) führt hierdurch auf folgende Gleichung:

$$\sin \mathrm{am}(\alpha+\beta)\,\sin \mathrm{am}(\alpha-\beta)-\sin \mathrm{am}(\gamma+\alpha)\,\sin \mathrm{am}(\gamma-\alpha)+$$
$$\sin \mathrm{am}(\beta+\gamma)\,\sin \mathrm{am}(\beta-\gamma) =$$
$$-k^2 \sin \mathrm{am}(\alpha+\beta)\,\sin \mathrm{am}(\alpha-\beta)\,\sin \mathrm{am}(\gamma+\alpha)\,\sin \mathrm{am}(\gamma-\alpha) \times$$
$$\sin \mathrm{am}(\beta+\gamma)\,\sin \mathrm{am}(\beta-\gamma).$$

Diese Gleichung fällt mit der Gleichung 17) zusammen für: $\alpha+\beta = a$, $\alpha-\beta = b$, $\gamma+\alpha = u+a+b$, also $\gamma-\alpha = u$, $\beta+\gamma = u+a$, $\beta-\gamma = -(u+b)$.

---

## Note VI.

### Das Theorem von Fagnano. Die Ellipsen- und Hyperbelbogen. Theorem von Landen.

Mit dieser Bezeichnung ist, wohl namentlich nach *Legendre*, ein geometrischer Satz belegt worden, dahin lautend, dass auf dem Umfange einer Ellipse sich auf unendlich viele Arten zwei Bogen bestimmen lassen, deren Differenz durch eine gerade Linie ausdrückbar ist.

Der Versuch, Bogen von Curven, welche Bogen nicht superposabel sind, mit einander zu vergleichen, ist schon vor *Fagnano* gemacht. In der folgenden Note sind einige Beispiele mitgetheilt von Curvenbogen, die sich nicht auf einander legen lassen und doch gleiche Länge haben, oder deren Differenz sich durch die Differenz zweier Geraden ausdrücken lässt. Was die Entdeckung *Fagnano's* besonders merkwürdig macht und sich bei *Legendre* nicht hervorgehoben findet, ist die Weise wie *Fagnano* seinen Satz, oder besser seine Sätze, mit Hülfe von Betrachtungen herleitet, welche eine bemerkenswerthe Analogie mit dem Verfahren zeigen, welches der unvergleichliche *Euler* bei dem Additionstheorem der elliptischen Integrale angewandt hat. Bei der eminenten historischen Bedeutung der Untersuchungen von *Fagnano* ist es wohl am Besten die eigenen Worte des hervorragenden italienischen Mathematikers anzuführen. Es sei noch bemerkt, dass sich über das Leben und die Arbeiten des *Conte di Fagnano* (geb. zu Sinigaglia 26. September 1682, gest. 1766) eine Reihe vorzüglicher Aufsätze findet in: Bulletino di bibliographia e di storia delle scienze matematiche e fisiche publicato da B. Boncompagni. Roma 1870. T. III p. 1—66.

Die betreffenden Resultate seiner Untersuchungen hat *Fagnano* zuerst mitgetheilt in: Giornale de 'Letterati d'Italia. Tomo Ventesimo sesto. Anno MDCCXVI. Venezia MDCCXVI. pag. 266—279. Das „Giornale" enthält in seinen verschiedenen Bänden eine Reihe mathematischer Mittheilungen von *Fagnano*, welche nebst andern Arbeiten später gesammelt erschienen unter dem Titel: Produzioni Matematiche Del Marchese Giulio Carlo De' Toschi Di Fagnano. Pesaro MDCCL. 2 vol. in $4^0$. Auf dem Titel jedes Bandes befindet sich innerhalb einer Vignette eine Lemniscate mit der Ueberschrift „Deo Veritatis Gloria", durch welche Curve die Entdeckungen von *Fagnano* angedeutet sind, welche er selbst für seine bedeutendsten gehalten hat. Die Aufsätze im „Giornale" sind von dem Verfasser mit der Unterschrift *Fagnani*, dem Plural von *Fagnano*, als „Patrizio Senogagliese" versehn.

Im Tomo Secondo p. 336 findet man:

Teorema

Da cui si deduce una nuova misura

Degli Archi Ellitici, Iperbolici e Cicloidali.

Ne' due polinomj infrascritti $X$, e $Z$, e nell' equazione (1) le lettere $K$, $l$, $f$, $g$, rappresentino qual sivoglia quantità costante.

Jo dico in primo lucgo, che se nell' equazione (1) l'esponente $s$ significa l'unità positiva, l'integrale dell' aggregato de' due polinomj $X+Z$ è uguale $a-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}$.

Jo dico in secondo luogo, che se nella medesima equazione (1) l'esponente $s$ esprime l'unità negativa, allora l'integrale di $X+Z$, è uguale $a$ $\frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$.

$$(X)\ \frac{dx\sqrt{hxx+l}}{\sqrt{fxx+g}}$$

$$(Z)\ \frac{dz\sqrt{hzz+l}}{\sqrt{fzz+g}}$$

$$(1)\ f^{s}hxxzz+f^{s}lxx+f^{s}lzz+g^{s}l^{s}=0.$$

Dimostrazione della prima parte del teorema.

Dall' equazione (1) nasce la seguente

$$(2)\quad z=\frac{\sqrt{-flxx-gl}}{\sqrt{fhxx+fl}}$$

e di più dalla medesima equazione (1) si deduce un valore di $x$ tale che la medesima $x$ è data per $z$, come appunto $z$ nell' equazione (2) è data per $x$. Laonde introducendo $z$ nel polinomio $X$, e $x$ nel polinomio $Z$ si à

$$(3)\quad X+Z=\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}+\frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}.$$

Ma l'equazione (1) differentiata, e poi divisa per $2fxz$ fa conoscere

$$hzdx+hxdz+\frac{ldx}{z}+\frac{ldz}{x}=0,$$

cioè trasponendo, e dividendo per $\sqrt{-fl}$

$$\frac{dx\sqrt{-l}}{z\sqrt{f}}+\frac{dz\sqrt{-l}}{x\sqrt{f}}=-\frac{hzdx}{\sqrt{-fl}}-\frac{hxdz}{\sqrt{-fl}}$$

dunque sostituendo il secondo membro di quest' ultima equazione in luogo del primo di essa nell' equazione (3) e poscia integrando si ottiene

$$(4)\quad \int X+\int Z=-\frac{hxz}{\sqrt{-fl}}.$$

Il che dovea dimostrarsi, $\int$ significa somma, ovvero integrale.

Dimostrazione della seconda parte del teorema.

Ponendo l'unità negativa in vece di $s$ nell' equazione (1), e facendo le debite operazioni ritrovasi

$$(5)\quad z=\frac{\sqrt{-ghxx-gl}}{\sqrt{fhxx+gh}}$$

vedesi ancora, che $x$ è data per $z$, come $z$ nell' antecedente equazione (5) è data per $x$, di modo che l'introduzione di $z$ nel polinomio $X$, e di $x$ nel polinomio $Z$ somministra

$$X+Z = \frac{zdx\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}+\frac{xdz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}$$

e integrando

$$(6)\quad \int X+\int Z = \frac{xz\sqrt{-h}}{\sqrt{g}}.$$

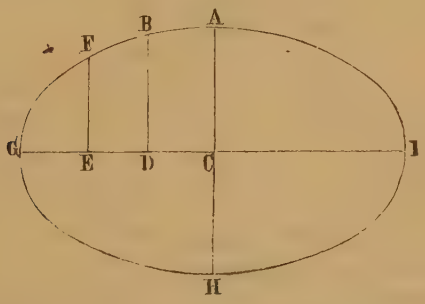
Il che dova dimostrarsi.

### Applicazione della prima parte del teorema all' elisse.

Uno degli assi dell' elisse $AGHJ$, sul quale si vogliono prendere l'abscisse, v. g. l'asse $IG$ si nomini $(2a)$, il suo parametro $(p)$, e $x$ l'abscissa variabile $CD$, che à per origini il centro $C$. È noto agl' intendenti della geometria interiore, che se per abbreviare si suppone $h = p-2a$, l'elemento dell' arco $AB$ corrispondente all' abscissa $CD$ è

$$\frac{dx\sqrt{hxx-2a^3}}{\sqrt{2a^3-2axx}}$$

Fig. 1.




Suppongasi dunque questo polinomio eguale al polinomio generale $X$, e si avrà $l = 2a^3$; $f = -2a$; $g = 2a^3$, i quali valori surrogati nell' equazione (2), e (4) fanno conoscere, che prendendo l'altra abscissa $CE = z$ di tal natura, che sia

$$z = \frac{a\sqrt{2a^3-2axx}}{\sqrt{hxx+2a^3}}$$

si à

$$\text{Arc } AB+\text{Arc}AF = -\frac{hxz}{2aa}+K$$

Per trovare il valore della costante $K$ si osservi, che quando $x = 0$ allora l'arco $AB$ è nullo, come anche l'espressione rettilinea $\frac{hxz}{2aa'}$, ma in questo caso l'arco $AF$ diviene uguale all' arco intiere $AG$, dunque $K$ è uguale a questo medesimo arco, e però trasponendo l'ultima equazione, e sostituendo l'arco $GF$ negativo in cambio di arc $AF$ — arc $AG$ finalmente si scopre

$$\text{Arc } AB - \text{arc } GF = -\frac{hxz}{2aa}.$$

## Applicazione della seconda parte all' iperbola

Il primo asse $HA$ dell' iperbola $ABF$ si chiami $(2a)$ il suo parametro $(p)$, e $x$ l'abscissa variabile $CD$, che nasce dal centro $C$, suppongasi ancora $h = p+2a$; sanno i conoscitori, che l'elemento dell' arco $AB$, il quale corrisponde all' abscissa $CD$ è

$$\frac{dx\sqrt{hxx-2a^3}}{\sqrt{2axx-2a^3}}$$

E questo polinomio essendo uguagliato al polinomio generale $X$, mostra, che $l = -2a^3$; $f = 2a$; $g = -2a^3$, i quali valori posti nell equazioni (5), e (6) fanno vedere, che assumendo l'altra abscissa $CE$ $(z)$ tale, che si abbia

$$z = \frac{a\sqrt{hxx-2a^3}}{\sqrt{hxx-haa}}.$$

Si ottiene

(7) $\text{Arc } AB + \text{arc } AE = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K.$

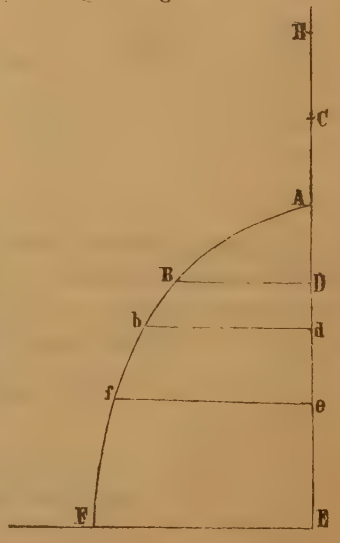
Si noti, che $z$ decresce al crescere di $x$ como ciascuno potrà da se medesimo assicurarsi.

Chiamisi ora $(t)$ l'abscissa $Gd$, ed $(u)$ l'altra abscissa $Ce$ in modo però, che $u$ sia data per $t$, eomo $z$ per $x$, e per la stessa ragione si avrà

$$\text{Arc } Ab + \text{Arc } Af = \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} + K.$$

Dunque sottraendo quest' ultima equazione dall' equazione (7) in fine

Fig. 2.



si scoprira

$$\text{Arc } Ff - \text{Arc } Bb = \frac{xz\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}} - \frac{tu\sqrt{h}}{a\sqrt{2a}}.$$

Egli è visibile, che uno dei duo archi $Ff$, $Bb$ è arbitrario. Analog wie auf die Ellipse wendet *Fagnano* den ersten Theil seines Theorems auf die Epicycloide an, welche Anwendung kein besonderes Interesse darbietet. Zum Schluss fügt er noch Folgendes bei:

### Altro teorema, che servo per misurare differentamente gli archi dell' iperbola.

### Teorema.

Sieno come sopra i due polinomj $X$, e $Z$; io dico, che se si prendera

$$z = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{gl}{fh}}$$

l'integrale di $X+Z$ sarà $\frac{1}{f}\sqrt{fxx+g}\,\sqrt{h+\frac{l}{xx}}$.

### Dimostrazione.

Introducendo nel polinomio $Z$ in luogo di $z$, e $dz$ i loro valori in $x$, e $dx$, e operando nel debito modo si avrà

$$Z = -\frac{ldx\sqrt{fxx+g}}{fxx\sqrt{hxx+l}}.$$

Perlochè $X+Z$ sarà eguale al differenziale di $\frac{1}{f}\sqrt{fxx+g}\,\sqrt{h+\frac{l}{xx}}$ Dunque, ec. *Q. E. D.*

### Applicazine all' iperbola.

Chiamisi $(2b)$ il secondo asse dell' iperbola, e $(q)$ il suo parametro, prendasi sul medesimo secondo asse prolungato qualunque abscissa $x$; egli è già noto, che l'arco correspondente a detta abscissa à per suo elemento

$$\frac{dx\sqrt{qxx+2bxx+2b^3}}{\sqrt{2bxx+2b^3}}.$$

Dunque uguagliando questo polinomio al polinomio generale $X$, si troverà $h = q+2b$, $l = g = 2b^3$, $f = 2b$, e si vedrà, che l'abscissa

$$z = \frac{bb\sqrt{b}}{x\sqrt{\frac{1}{2}q+b}}$$

della medesima iperbola tale, che la somma di queste due archi è uguale alla sotto scritta quantità variabile più, o meno una quantità costante

$$\sqrt{\frac{xx}{b}+b}\,\sqrt{\frac{1}{2}q+b+\frac{b^3}{xx}}$$

Nel resto si procederà, come sopra, ec.

Auf Untersuchungen, betreffend die Vergleichung von Bogen besonderer Hyperbeln und Ellipsen, beziehn sich noch zwei Abhandlungen im Tomo II der „Produzioni", nämlich:

Metodo per trovare nuove misure degli archi dell' iperbola equilatera, p. 504—509,

Metodo per misurare gli archi di quella elisse conica, Il di cui asse maggiore è medio proporzionale tra l'asse minore, e il doppio del medesimo asse minore p. 510—536.

Diese Abhandlungen, welche die letzten der Sammlung bilden, enthalten besonders Untersuchungen über Gleichungen zwischen Differentialen von den Formen:

$$\frac{z^{2m}}{\sqrt{1\pm z^4}}dz,\ \frac{z^{2m}}{\sqrt{z^4-1}}dz,$$

wenn $m$ eine ganze Zahl bedeutet.

Uebrigens hat *Fagnano* Relationen von der Form der Gleichung (1) und der im letzten „Teorema" über die Hyperbel enthaltenen, mehrfach bei anderen Gelegenheiten angewandt, bei Betrachtung von Curven, deren Bogen auf elliptische Integrale führen und ist dabei zu Theoremen gelangt, welche nicht minder bemerkenswerth sind, wie die vorhergehenden.

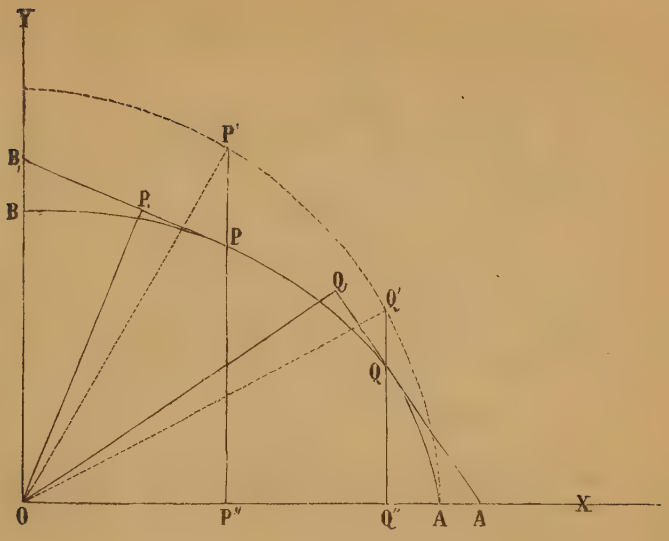
Was die Darstellung elliptischer Bogen durch Integrale betrifft, so ist die einfachste und gebräuchlichste Art folgende.

Die Hauptaxen einer Ellipse (Fig. 3) mögen mit den Coordinatenaxen zusammenfallen, so dass ihre Gleichung die bekannte Form annimmt:

$$1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Es sei $OA = a$, $OB = b$, wo $a > b$ ist. Um die Lage eines Punctes $P$ der Ellipse zu bestimmen, beschreibe man um den Mittelpunct $O$ mit dem Radius $OA = a$ einen Kreis, welcher von der verlängerten Ordinate $PP'$ des Punctes $P$ im Puncte $P'$ getroffen wird. Verbindet man $O$ mit $P'$ durch eine Gerade, so ist $OP' = a$. Ist

Fig. 3.




$OP'' = x$, so giebt das orthogonale Dreieck $OP'P''$ die Relation $x = a \cos P'OP''$. Aus dieser Gleichung und der Gleichung 1) folgt:

$$2) \quad x = a \cos P'OP'', \; y = b \sin P'OP''.$$

Der Winkel $P'OP''$ heisst die *excentrische Anomalie* des Punctes $P$. Für das Folgende ist es bequemer den Nebenwinkel $P'OY$ zu nehmen, d. h. das *Complement der excentrischen Anomalie*. Setzt man $P'OY = \varphi$, also $P'OP'' = 90^0 - \varphi$, so geben die Gleichungen 2):

$$3) \quad x = a \sin\varphi, \; y = b \cos\varphi.$$

Ist $ds$ das Bogenelement der Ellipse, so geben die Gleichungen 3):

$$4) \quad \frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2\varphi}.$$

Der Bogen der Ellipse werde vom Punkte $B$ an gerechnet, d. h. vom Endpuncte der kleinen Axe an, für welchen Punct das Complement der excentrischen Anomalie verschwindet. Integrirt man in 4) von $\varphi = 0$ an, setzt:

$$5) \quad \frac{a^2-b^2}{a^2} = k^2,$$

und bezeichnet die Integrationsvariabele durch $w$, so ergiebt sich für den Bogen $PB$ folgende Gleichung:

$$6) \quad \frac{\text{Arc } PB}{a} = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2 w}\, dw$$

oder, nach der Bezeichnung von *Legendre*:

$$7) \quad \frac{\text{Arc } PB}{a} = E(\varphi).$$

Ist der Punct $Q$ analog wie der Punct $P$ durch den Winkel $Q'OB = \psi$ bestimmt, so erhält man ähnlich wie die Gleichung 7):

$$8) \quad \frac{\text{Arc } QB}{a} = E(\psi).$$

Bildet man die Summe der Gleichungen 7) und 8), so lässt sich die rechte Seite mit Hülfe des Additionstheorems in § 26 transformiren. Man erhält dann:

$$9) \quad \frac{\text{Arc } PB + \text{Arc } QB}{a} = E(\sigma) + k^2 \sin\varphi \sin\psi . \sin\sigma.$$

Da nach 7) $E(\sigma)$ wieder das Verhältniss eines elliptischen Bogens zur halben grossen Axe ist, so giebt die Gleichung 9) eine Relation zwischen elliptischen Bogen, wo $\varphi$, $\psi$, $\sigma$ durch die Gleichung verbunden sind:

$$\int_0^{\varphi} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}} + \int_0^{\psi} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}} = \int_0^{\sigma} \frac{dw}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}},$$

oder $\varphi = \text{am}\, u$, $\psi = \text{am}\, v$ gesetzt $\sigma = \text{am}(u+v)$. Ist $\sigma = \frac{\pi}{2}$, so hat man:

$$10) \quad \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\psi}{k'\sin\varphi} = \frac{1}{\Delta(\varphi)} = \frac{\Delta(\psi)}{k'}.$$

Für $\sigma = \frac{\pi}{2}$ folgt aus 7) $\text{Arc } AB = a\,E\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Die Gleichung 9) wird dann:

$$\frac{\text{Arc } PB + \text{Arc } QB}{a} = \frac{\text{Arc } AB}{a} + k^2 \sin\varphi \sin\psi.$$

Da weiter $\text{Arc } AB - \text{Arc } QB = \text{Arc } QA$, so lässt sich die vorstehende Gleichung mittelst der Gleichungen 10) auch schreiben:

$$11) \quad \frac{\text{Arc } PB - \text{Arc } QA}{a} = k^2 \sin\varphi \sin\psi = k^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Diese Gleichung enthält das sogenannte Theorem von *Fagnano*. Es sei $PP_1B'$ die Tangente zur Ellipse im Puncte $P$, $P_1$ der Fusspunct des Perpendikels, gefällt vom Mittelpuncte $O$ auf die Tangente, $B'$ der Schnittpunct der Tangente mit der verlängerten kleinen Axe $OB$. Bringt man die allgemeine Gleichung der Tangente

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Yy}{b^2} = 1,$$

wenn $X$, $Y$ die laufenden Coordinaten bezeichnen, für den Punct $P$ mittelst der Gleichungen 3) auf folgende Form:

$$12) \quad \frac{X\sin\varphi}{a} + \frac{Y\cos\varphi}{b} = 1,$$

so findet man, mit Rücksicht auf 5):

$$13) \quad \frac{PP_1}{a} = k^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)}, \quad \frac{PB'}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \Delta(\varphi).$$

Es sei $A'QQ_1$ die Tangente im Puncte $Q$, $A'$ ihr Schnittpunct mit der verlängerten grossen Axe, $Q_1$ der Fusspunct des Perpendikels, gefällt vom Mittelpuncte $O$ auf diese Tangente. Ihre Gleichung ist dann:

$$\frac{X\sin\psi}{a} + \frac{Y\cos\psi}{b} = 1.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Gleichung und der Gleichungen 10) findet man:

$$\frac{QQ_1}{a} = k^2 \frac{\sin\psi \cos\psi}{\Delta(\psi)} = k^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)},$$

$$\frac{QA'}{a} = \frac{\cos\psi}{\sin\psi} \Delta(\psi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \frac{k'^2}{\Delta(\varphi)}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen 13) geben:

$$\frac{PP_1}{a} = \frac{QQ_1}{a} = \frac{PB' - QA'}{a} = k^2 \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

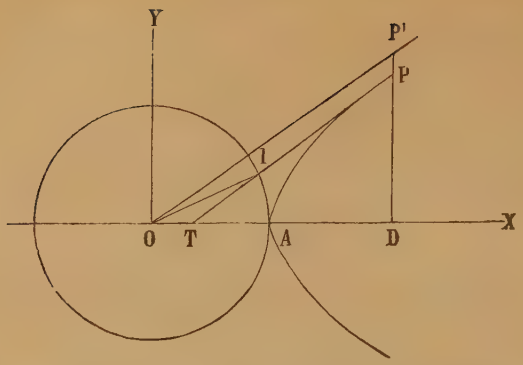
Die Gleichung 11) lässt sich hierdurch auf folgende Relation zwischen Bogen und Segmenten gerader Linien reduciren:

$$14) \quad \text{Arc } PB - \text{Arc } QA = PB' - QA' = PP_1 = QQ_1,$$

was die geometrische Bedeutung des Theorems von *Fagnano* ist. Für die Hyperbel ergiebt sich auf folgende Art ein Ausdruck für den Bogen. Die Gleichung der Curve auf ihre Hauptaxen bezogen ist:

$$15) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Fig. 4.




Um $x$ und $y$ in Function einer dritten Variabeln darzustellen, beschreibe man um den Mittelpunct $O$ mit dem Radius $OA = a$ einen Kreis. Die Tangente $PT$ zur Hyperbel in Puncte $P$ schneidet diesen Kreis in einem Puncte $I$, welcher mit dem Mittelpunct $O$ durch eine Gerade verbunden werde. Es sei $\angle OIT = w$. Setzt man $OD = x$, $PD = y$, so ist:

$$16) \quad \frac{Xx}{a^2} - \frac{Yy}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Tangente $PT$. Bezeichnet man die Coordinaten des Punctes $I$ durch $x_1$ und $y_1$, so genügen dieselben der Gleichung 16) und der Gleichung des obigen Kreises, d. h. man hat:

$$17) \quad \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1, \; x_1^2 + y_1^2 = a^2.$$

Die Gleichung der Graden $OI$ ist:

$$\frac{X}{x_1} = \frac{Y}{y_1}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 16) giebt:

$$\cos w = \frac{\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

d. i. nach 17):

$$\cos w = \frac{1}{a\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}$$

oder:

$$18)\quad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2\cos^2 w}.$$

Aus den Gleichungen 15) und 18) lassen sich $x$ und $y$ leicht als Functionen von $w$ darstellen. Zur Abkürzung setze man:

$$\frac{a^2}{a^2+b^2}=k^2,\quad b^2=a^2\frac{k'^2}{k^2}.$$

Aus den Gleichungen 15) und 18) findet man:

$$19)\quad \frac{x}{a}=\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}{\cos w},\quad \frac{y}{a}=\frac{k'^2}{k}\frac{\sin w}{\cos w},$$

welche Ausdrücke denen von *Legendre* analog sind. (Fonct. ell. I. p. 16). Bezeichnet man das Bogenelement der Hyperbel durch $ds$, so geben die Gleichungen 19):

$$\frac{1}{a}\frac{ds}{dw}=\frac{k'^2}{k\cos^2 w\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}$$

d. i.

$$20)\quad \frac{1}{a}\frac{ds}{dw}=\frac{1}{k}\frac{d\,\mathrm{tang}\,w\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}{dw}-\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2\sin^2 w}.$$

Für den Punct $A$ ist in Folge der Gleichungen 19) $w=0$. Für den Punct $P$ möge $w=\varphi$ sein. Integrirt man die Gleichung 20) von $w=0$ bis $w=\varphi$, so folgt:

$$\frac{\mathrm{Arc}\,AP}{a}=\frac{1}{k}\,\mathrm{tang}\,\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-\frac{1}{k}\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 w}\,dw,$$

oder kürzer:

$$21)\quad \frac{\mathrm{Arc}\,AP}{a}=\frac{\sin\varphi\,\Delta(\varphi)}{k\cos\varphi}-\frac{E(\varphi)}{k}.$$

Die Gleichungen 19) geben, wenn $w=\varphi$, für das Segment $PT$ der Tangente folgenden Ausdruck:

$$\frac{PT}{a}=\frac{k'^2\sin\varphi}{k\cos\varphi\,\Delta(\varphi)}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung 21) ab, so folgt:

$$22)\quad \frac{PT-\mathrm{Arc}\,AP}{a}=-\frac{k\sin\varphi\,\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{E(\varphi)}{k}.$$

Es sei $OP'$ die Asymptote der Hyperbel, $P'$ der Punct, in welchem die verlängerte Ordinate $PD$ des Punctes $P$ diese Asymptote schneidet. Für das Segment $OP'$ findet man:

$$OP'=x\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{x}{k}$$

d. i. nach 19) für $w=\varphi$:

$$\frac{OP'}{a} = \frac{\Delta(\varphi)}{k\cos\varphi}.$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung 21) ab, so folgt:

$$\frac{OP' - \operatorname{Arc} AP}{a} = \frac{\Delta(\varphi)}{k}\sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}} + \frac{E(\varphi)}{k}.$$

Lässt man den Punct $P$ sich vom Puncte $A$ immer weiter entfernen, so hat der Winkel $\varphi$ zur Gränze $90^0$. Die vorstehende Gleichung reducirt sich in diesem Falle auf:

$$\lim \frac{OP' - \operatorname{Arc} AP}{a} = \frac{E}{k},$$

welche Gleichung den bekannten Satz enthält, dass die Differenz zwischen der Länge der Asymptote und dem Bogen einer Hyperbel für einen unendlich weit sich entfernenden Punct der Curve einen bestimmten, endlichen Ausdruck zur Gränze hat.

Für einen Punct $Q$ der Hyperbel möge in den Gleichungen 19) $w = \psi$ sein. Es sei $S$ der Schnittpunct der Tangente im Puncte $Q$ mit der Axe $OX$. Analog zur Gleichung 22) ist dann:

$$\frac{QS - \operatorname{Arc} AQ}{a} = -\frac{k\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)} + \frac{E(\psi)}{k},$$

oder auch, analog zur Gleichung 21):

$$23)\quad \frac{\operatorname{Arc} AQ}{a} = \frac{\sin\psi\,\Delta(\psi)}{k\cos\psi} + \frac{E(\psi)}{k}.$$

Addirt man diese Gleichung zur Gleichung 21) und nimmt $k'\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\psi = 1$, so folgt:

$$\frac{\operatorname{Arc} AP + \operatorname{Arc} AQ}{a} = \frac{\sin\varphi\,\Delta(\varphi)}{k\cos\varphi} + \frac{\sin\psi\,\Delta(\psi)}{k\cos\psi} - k\sin\varphi\sin\psi - \frac{E}{k}$$

$$= \frac{\Delta(\varphi)}{k\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{E}{k}.$$

Abgesehn von der Bezeichnung kommt diese Gleichung mit derjenigen überein, von welcher *Fagnano* bei seinem Theorem über die Hyperbel ausgegangen ist.

Die Differenz der Gleichungen 21) und 22) giebt:

$$24)\quad \frac{\operatorname{Arc} AQ - \operatorname{Arc} AP}{a} = \frac{\operatorname{Arc} PQ}{a} =$$

$$\frac{\sin\psi\,\Delta(\psi)}{k\cos\psi} - \frac{\sin\varphi\,\Delta(\varphi)}{k\cos\varphi} - \frac{E(\psi) - E(\varphi)}{k}.$$

Da $E(\varphi)$ und $E(\psi)$ Ellipsenbogen proportional sind, so folgt, dass ein beliebiger Hyperbelbogen sich mit Hülfe von zwei Ellipsenbogen ausdrücken lässt. Dieses nicht sehr überraschende Resultat veranlasste seinen Entdecker *Landen* in der Abhandlung: „An Investigation of a

general Theorem for finding the Length of any Arc of any Conic Hyperbola, by Means of Two Elliptic Arcs, with some other new and useful Theorems deduced therefrom" (Philosophical Transactions. For the year 1775 p. 285. oder Mathematical Memoirs by John Landen. London 1780. p. 33) zu dem Ausruf:

„Thus beyond my expectation, I find that the *hyperbola* may in general be rectified by means of two *ellipses*!".

Diese Entdeckung hatte *Landen* schon 1771 in den Philos. Transact. angekündigt,*) es ist bemerkenswerth dass *Landen* weniger Gewicht auf einige andere Resultate derselben Abhandlung zu legen scheint, welche seinen Namen in der Theorie der elliptischen Functionen dauernd erhalten haben, wie auf das obige geometrische Theorem, welches an sich nach den Arbeiten von *Legendre* von geringer Bedeutung ist und dessen Urheber wohl schon längst vergessen sein würde.

Weitere Untersuchungen über die Bogen von Ellipsen und Hyperbeln hat *Legendre* in seinem „Traité" t. I p. 46—53 gegeben. Mit demselben Gegenstande, namentlich was die Theilung elliptischer Bogen anbelangt, beschäftigen sich die folgenden Abhandlungen von *Küpper*:

Démonstration géométrique de cette proposition, que toute fonction elliptique de première espèce peut être remplacée par deux fonctions elliptiques de seconde espèce, et Développement relative à la rectification de l'hyperbole. (Journ. f. Math. t. 55 p. 89—93).

Considérations géométriques, destinées à faciliter l'étude de la théorie des transcendantes elliptiques. (Journ. f. Math. t. 63 p. 40—57).

Da weder die Ableitung noch weitere Ausdehnungen des Satzes von *Fagnano* gegenwärtig besondere Schwierigkeiten darbieten, so erscheint es nicht nothwendig alle diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten hier anzuführen.

---

*) Man vergleiche hierüber: *Landen*: A Disquisition concerning certain Fluents, which are assignable by the Arcs of Conic Sections; wherein are investigated some new and useful theorems for computing such Fluents (Ph. Tr. 1771. Vol. LXI p. 298—309). Die Abhandlung, welche sich auf die Differenz zwischen dem Bogen und entsprechenden Segment der Asymptote einer Hyperbel bezieht, wenn beide Längen indefinit zunehmen, enthält am Schlusse die Ankündigung des oben bemerkten Satzes.

# Note VII.

## Historische Notizen über geometrische Anwendungen elliptischer Integrale. Maclaurin, d'Alembert, Jacob u. Johann Bernoulli, Fagnano, Euler, Legendre. Arbeiten über Fagnano. Brinkley, Wallace, Talbot, Libri.

Dass die Integrale, welche gegenwärtig den Namen „elliptische Integrale" führen, sich nicht durch bekannte Functionen ausdrücken lassen, wurde schon während des Entstehens der Integralrechnung bemerkt. Um nun mit den geometrischen Bedeutungen dieser Integrale, namentlich was die Länge und Construction von Curvenbogen anbetrifft, zu geometrischen Theoremen zu gelangen, haben die Geometer zu Ende des XVII. und im XVIII. Jahrhundert verschiedene Untersuchungen angestellt, von denen die bemerkenswerthesten angeführt werden sollen. Man verglich Curvenbogen mit den Bogen von Kegelschnitten, wobei die Kegelschnitte gleichsam als Normalcurven zu Grunde gelegt wurden. Derartige Vergleiche, welche keine besonderen Schwierigkeiten darbieten und nur von geringem Interesse sind, sollen hier nur kurz erwähnt werden. Ein Beispiel hierzu enthält die Note VI in dem Satze von *Landen*, dass ein Hyperbelbogen mit Hülfe zweier Ellipsenbogen sich ausdrücken lässt.

Eine andere Gattung von Problemen soll nur durch ein Beispiel angedeutet werden, da derartige Probleme einer allgemeinern Theorie, der Construction von Differentialgleichungen, angehören. Hierbei handelt es sich namentlich darum, Curven geometrisch zu construiren, bei welchen eine der Coordinaten explicite durch ein elliptisches Integral ausgedrückt ist, dessen Gränze die andere Coordinate enthält. Ein Beispiel hierzu bietet die „elastische Curve" definirt durch die Differentialgleichung:

$$dx = \pm \frac{y^2 dy}{\sqrt{a^4 - y^4}}.$$

Durch Integration führt die vorstehende Differentialgleichung auf eine Relation der bemerkten Art. *Jacob Bernoulli*, welcher der elastischen Curve besondere Aufmerksamkeit gewidmet, bemerkt über diesen Gegenstand in den „Acta Eruditorum" vom Jahre 1694, p. 272:

„Ego ob graves causas suspicor curvae nostrae constructionem a nullius sectionis conicae, seu quadratura, seu rectificatione pendere" (Jacobi Bernoulli Opera, Genevae MDCCXLIV p. 592).

Durch die vorstehenden Worte des grossen Mathematikers zu einer Behandlung des Problems angeregt, bemerkt *Maclaurin* im t. II. p. 744 seines berühmten Werkes „A Treatise of Fluxions" (Edingburgh MDCCXLII) unter Nr. 927 Folgendes im Anschluss an die obigen Worte von *Bernoulli*:

„But it is constructed by the rectification of the equilateral hyperbola, for if the base of a figure be always taken equal to the perpendicular from the centre on the tangent of such an hyperbola, and the ordinate equal to the excess of the tangent terminated by that perpendicular above the arc intercepted betwixt the vertex of the hyperbola and the point of contact, than the figure shall be the elastic curve."

Auf ähnliche Art hat *Maclaurin* die Integrale (Fluents) von Ausdrücken, wie die folgenden:

$$\frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{1+x^2}}}, \quad \frac{dx}{(1\mp x^2)^{\frac{3}{4}}}$$

und anderen analogen, welche sich auf elliptische Differentiale reduciren lassen, mit Hülfe der Bogen von Kegelschnitten construirt, worüber namentlich Nr. 799—808 auf p. 652—660 des „Treatise" zu vergleichen sind.*)

Die von *Maclaurin* gefundenen Resultate hat *d'Alembert* auf einfachere Art abgeleitet und um eine Reihe von Sätzen erweitert in der Abhandlung: „Recherches sur le calcul intégral". (Histoire de l'Académie de Berlin. Année MDCCXLVI p. 182—224). Der zweite Theil dieser Abhandlung „Des Différentielles qui se rapportent à la rectification de l'ellipse ou de l'hyperbole" behandelt eine Anzahl Differentiale, deren Integrale sich durch einfache Substitutionen und partielle Integrationen auf solche Integrale reduciren lassen, durch welche der Bogen einer Ellipse oder Hyperbel ausgedrückt wird. Lässt

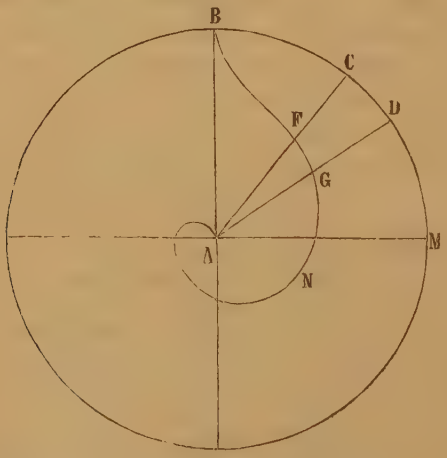
*) In einer kleinen Schrift: Lettere de Signor Giovanni Galfi al Signor Flavio Gangini contente alcuni osservazioni intorno tre articoli dell' opera del Signor Colin Maclaurin sopra il calcolo delle Flussioni. In Pesaro MDCCLIII. 11 pag. in 4° (Aus derselben Druckerei wie die Werke von Fagnano) sucht *Galfi* nachzuweisen, dass die Resultate, welche Maclaurin unter Nr. 802, 803 und 927 seiner Lehre von den Fluxionen angemerkt hat, schon längere Zeit vor Erscheinen dieses Werkes von *Fagnano* publicirt worden seien.

Eine Darstellung der hierhin gehörigen Arbeiten von *Maclaurin* findet man bei *Felix Müller*: Studien über Mac Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale. Berlin 1875. Programm d. Königl. Realschule zu Berlin. Ostern 1875.

sich ein Differentialausdruck auf das Differential des Bogenelements einer der bemerkten Curven reduciren, so nennt dieses *d'Alembert*, denselben mittelst einer Ellipse oder Hyperbel integrirt zu haben. Die rein analytische, ziemlich reichhaltige Abhandlung ist von einem ähnlichen Gedanken nach Classification elliptischer Differentiale durchdrungen, durch dessen Durchführung später *Legendre* der Entwickelung der Analysis einen so bedeutenden Dienst geleistet hat. Abgesehn von dem nicht zu unterschätzenden Einfluss der Arbeiten von *Legendre* auf *Abel* und *Jacobi* muss man die Ueberwindung von Schwierigkeiten nicht ausser Augen lassen, welche solche eminenten Geister wie *Maclaurin* und *d'Alembert* auf isolirte Resultate beschränkt haben.

Eine dritte Gattung von Problemen, von welcher hier besonders die Rede sein soll, besteht in Vergleichung von Bogen ein und derselben Curve unter einander, ohne dieselben erst mit einem Ellipsen- oder Hyperbelbogen zu vergleichen. Es kommt bei diesen Problemen besonders darauf an, durch glücklich gewählte Substitutionen besondere elliptische Integrale zu transformiren. Die Idee Bogen derselben Curve, welche Bogen nicht congruent zu sein brauchen, mit einander zu vergleichen, findet sich zuerst bei einem der Mitbegründer der Integralrechnung, dem genialen *Jacob Bernoulli* in der Abhandlung: „Specimen calculi differentialis in dimensione Parabolae helicoidis", welche die „Acta Eruditorum" vom Jahre 1691 (p. 13 u. f.) enthalten. (Auch Opera p. 431—442).

Fig. 5.




Die Axe einer gewöhnlichen Parabel werde auf dem Umfange eines Kreises *BCDM* aufgerollt. Die Curve, welche dann durch die

Endpuncte der ursprünglichen Ordinaten geht, nach dem Mittelpunct des Kreises zu gerichtet, nämlich *BFGNA*, heisst die *parabolische Spirale* (— dicitur nobis *Parabola helicoides*, vel si mavis, *Spiralis parabolica*).

Der Entstehensweise nach ist das Quadrat von *CF* proportional dem Bogen *BC*. Bezeichnet man durch $r$ den Radiusvector *AF* des Punctes *F*, durch $a$ den Halbmesser des Kreises, so ist $CF = a - r$. Ist ferner $w$ der Winkel *CBA*, so ist der Definition zu Folge: $(a-r)^2 = 2abw$, oder $a - r = \sqrt{2abw}$, wo $b$ eine Constante bedeutet, die Polargleichung der parabolischen Spirale. Ist $ds$ das Bogenelement der Curve, so folgt:

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 dw^2} = dr \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2r\sqrt{w}}{\sqrt{2ab}}\right)^2} = dr \sqrt{1 + \frac{r^2(a-r)^2}{a^2b^2}}.$$

Man bezeichne durch $s_1$ den Bogen, dessen Endpuncte den Werthen $\frac{a}{2}$ und $\frac{a}{2} + c$ von $r$ entsprechen, ferner durch $s_2$ den Bogen, dessen Endpuncte den Werthen von $\frac{a}{2} - c$ und $\frac{a}{2}$ von $r$ entsprechen. Es ist dann:

$$s_1 = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+c} \sqrt{1 + \frac{r^2(a-r)^2}{a^2b^2}}\, dr, \quad s_2 = \int_{\frac{a}{2}-c}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1 + \frac{r^2(a-r)^2}{a^2b^2}}\, dr.$$

Setzt man $r = \frac{a}{2} + z$ im Integrale für $s_1$, ferner $r = \frac{a}{2} - z$ im Integrale für $s_2$, so zeigt eine leichte Rechnung:

$$s_1 = s_2 = \int_0^c \sqrt{1 + \frac{1}{a^2b^2}\left(z^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2}\, dz,$$

woraus man unmittelbar mit *Bernoulli* (Opera p. 434) folgert:

„— unde patet quod, in curvis etiam illis quae rectificationem nondum acceperunt partes aequales dissimilares assignari possunt".

Diese Entdeckung theilte *Jacob Bernoulli* seinem geistig ebenbürtigen Bruder *Johann Bernoulli* mit, der sich wohl in Folge davon auf p. 374 der „Acta Eruditorum" vom Jahre 1695 das Problem stellte, zu einer gegebenen Curve eine andere zu finden, so dass die Summe oder Differenz der Bogen sich durch Kreisbogen ausdrücken lässt. Als Fortsetzung enthalten die „Acta Eruditorum" vom Jahre 1698 auf p. 462 u. f. (Vide auch Johannis Bernoulli Opera omnia t. I. p. 249. Lausannae et Genevae. MDCCXLII) die Abhandlung: „Theorema universale Rectificationi Linearum curvarum inserviens." In einem besonderen

Falle reduciren sich die beiden Curven auf eine Curve, nämlich die *cubische Parabel. Johann Bernoulli* bemerkt hierzu: (A. E. p. 465, Opera I. 252)

„— adeoque est Parabola cubicalis primaria quae cum se ipse comparata rectificari potest, seu in qua assignari possunt duo arcus, quorum differentia est rectificabilis. Hic ergo incidimus quasi fortuito in perelegantem hujus famosissimae curvae alias irrectificabilis proprietatem . . . .".

Da der Beweis dieser Eigenschaft der cubischen Parabel, enthalten in der Gleichung $3a^2y = x^3$, zusammenfällt mit analogen Theoremen für andere Curven, so soll er mit erwähnt werden bei Betrachtung anderer Parabeln.

Die bemerkte Abhandlung von *Johann Bernoulli* legte den Grund zu sehr scharfsinnigen Untersuchungen von *Fagnano,* enthalten in der Abhandlung:

„Nuovo metodo per rettificare la differenze die due archi (uno de' quali è dato) in infinite specie de Parabole irrettificabili",

welche zuerst 1715 im tomo ventesimo secondo (p. 229 u. f.) des „Giornale de' letterati d'Italia" erschien und auf p. 317—330 im t. II der „Produzioni" sich abgedruckt findet.

Im „Giornale" (Tomo Decimonono p. 438) hatte *Fagnano* 1714 den Mathematikern folgendes Problem vorgelegt:

„Sia data una parabola biquadratica primaria che à per equazione costitutiva $x^4 = y$ e sia data ancora una porzione di essa; dimando, che si assegni un' altra porzione nella medesima curva tale, che la differenza delle porzioni suddette sia rettificabile.

Se i geometri si degneranno riflettere a quanto scrive l'incomparabile sig. Giovanni Bernoulli negli atti di Lipsia dell' anno 1698 alla pag. 465. dopo la linea 5. non giudicheranno questo problema affato indegno della loro attenzione".

Da keine Lösung dieses Problems einlief, so gab *Fagnano* dieselbe in Verbindung mit ähnlichen Problemen in der oben angeführten Abhandlung.

*Fagnano* geht im Wesentlichen von folgenden Betrachtungen aus. Es sei $a$ eine Constante, $m$ eine beliebige, reelle Zahl und:

$$1) \quad y = \frac{2}{m+2} \frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}$$

die Gleichung einer parabolischen Curve. Durch $t$ bezeichne man das Segment der Tangente des Punctes $(x, y)$ zwischen diesem Puncte und

der Abscissenaxe. Die Gleichung der Curve giebt dann:

$$2)\quad t = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \frac{2x}{m+2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m},$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$ gesetzt ist. Bezeichnet man durch $s$ den Bogen, so ist für die obige Parabel:

$$3)\quad s = \int \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}\, dx.$$

Durch partielle Integration findet man leicht:

$$\frac{m+2}{2}\int \sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}\, dx = x\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m} + \frac{m}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}.$$

Diese Gleichung lässt sich nach 2) und 3) auch schreiben:

$$\frac{m+2}{2}(s-t) = \frac{m}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}},$$

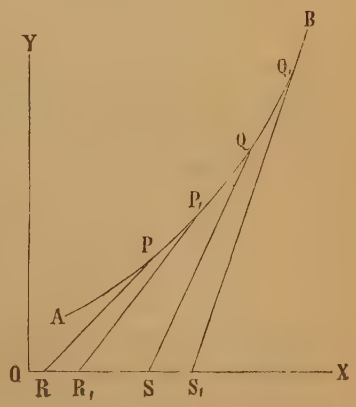
oder:

$$4)\quad \frac{m+2}{m}(s-t) = \int \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}.$$

Nimmt man das rechts stehende Integral zwischen zwei bestimmten Gränzen, so ist seine geometrische Bedeutung, das Product eines constanten Factors $\frac{m+2}{m}$ in die Länge eines Bogens der Parabel, vermindert um die Differenz der Längen der Tangenten, welche durch die Endpuncte des Bogens gehn. Unter der Länge der Tangente ist das Segment derselben zwischen Contactpunct und Schnittpunct mit der Abscissenaxe gemeint.

Es sei $AB$ ein Bogen der in Rede stehenden Parabel. Die Abscissen der Puncte $P$, $P_1$, $Q$ und $Q_1$ seien respective $x_0$, $x_1$, $z_0$ und $z_1$. Die Tangenten in diesen Puncten zur Curve mögen die Abscissenaxe in den Puncten $R$, $R_1$, $S$ und $S_1$ schneiden. Zu Folge der Gleichung 4) hat man dann:

Fig. 6.




$$5)\quad \frac{m}{m+2}\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} =$$

$$\text{Arc } PP_1 - (P_1R_1 - PR),$$

$$6)\quad \frac{m}{m+2}\int_{z_0}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} = \operatorname{Arc} QQ_1 - (Q_1S_1 - QS).$$

Lässt sich das Integral auf der linken Seite der Gleichung 5) so transformiren, durch Einführung einer Variabeln $z$, dass die Function unter dem Integralzeichen ungeändert bleibt, also das Integral in das Integral der Gleichung 5) übergeht, so erhält man durch Vergleichung der rechten Seiten der Gleichungen 5) und 6):

$$\operatorname{Arc} PP_1 - (P_1R_1 - PR) = \operatorname{Arc} QQ_1 - (Q_1S_1 - QS).$$

Es kommt hierbei wesentlich darauf an, ein Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} = \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}}$$

zu finden, oder von der folgenden:

$$7)\quad \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}} + \frac{dz}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{a}\right)^m}} = 0.$$

Für folgende Fälle hat *Fagnano* das Integral gegeben.

$m = 4$. Die Gleichung der Curve ist $y = \frac{x^3}{3a^2}$, man hat dann die cubische Parabel. Der Gleichung 7) genügt $xz = a^2$.

$m = 3$. Die Gleichung 1) giebt: $y = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}}$. Der Gleichung 7) wird genügt durch:

$$\frac{x}{a} = \frac{2-\frac{z}{a}}{1+\frac{z}{a}} \quad \text{oder} \quad \left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{z}{a}\right) = 3.$$

$m = 6$. Die Gleichung 1) giebt dann die Gleichung der biquadratischen Parabel $y = \frac{x^4}{4a^3}$. Zwischen $x$ und $z$ der Gleichung 7) besteht die Relation:

$$\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{z}{a}\right)^2 - 1}}.$$

Dieser Fall entspricht dem Problem von *Fagnano*. Ausserdem hat *Fagnano* noch folgende Fälle der Gleichung 1) behandelt:

$$m = -\frac{4}{3},\ y = 3a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}},\ \text{oder}\ y^3 = 27a^2x.$$

$$m = -\frac{6}{5},\ y = \frac{5}{2} a^{\frac{3}{5}} x^{\frac{2}{5}},\ \text{oder}\ y^5 = \frac{3125}{32} a^3x^2,$$

$$m = -\frac{3}{2},\ y = 4a^{\frac{3}{4}} x^{\frac{1}{4}},\ \text{oder}\ y^4 = 256a^3x.$$

Man bemerkt hierbei leicht, dass diese Gleichungen durch Vertauschung von $x$ und $y$ aus den vorhin behandelten drei Gleichungen sich ergeben. Sowohl die vorstehenden drei Fälle, sowie der Bogen der Curve, deren Gleichung aus 1) für $m = -\frac{4}{5}$ folgt, welchen *Fagnano* ebenfalls untersucht hat, lassen sich leicht direct behandeln, wenn man die Integrale für den Bogen auf die Normalform elliptischer Integrale reducirt. Zu bemerken ist, dass *Fagnano* von dem folgenden Resultat ausgeht. Setzt man:

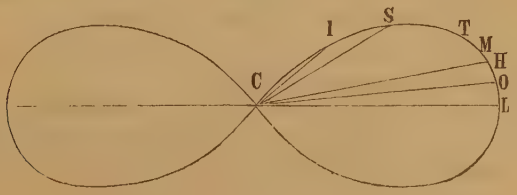
$$\frac{x^{n-1}(x^n+p)^{h-1}}{[(x^n+p)^2+q(x^n+p)+r]^h} = \varphi(x),$$

so ist $(x^n+p)(z^n+p) = r$ ein Integral der Differentialgleichung $\varphi(x)dx+\varphi(z)dz = 0$.

Die zu Anfang angeführte Abhandlung von *Fagnano* beginnt eine Reihe von Aufsätzen, in welchen der geistvolle Geometer in höchst scharfsinniger Weise seine relativ geringen Hülfsmittel auf eine detaillirte Untersuchung der Lemniscate und der cubischen Parabel anwendet. Da eine Anführung der einschlägigen Arbeiten zu weit führen würde, indem eine ziemliche Anzahl isolirter Formeln, welche in der Art ihrer Anwendung, keinen inneren Zusammenhang zeigen, sich nicht füglich reproduciren lässt, so sollen nur die wesentlichsten Entdeckungen hervorgehoben werden. Diese Entdeckungen, welche bei *Fagnano* den zur Ausführung gekommenen Wunsch erregten, dass zur Erinnerung auf seinem Grabsteine eine Lemniscate eingemeisselt werde, haben den Namen des italienischen Mathematikers in Verbindung mit Problemen der Integralrechnung erhalten, welche das grösste mathematische Genie zweier Jahrhunderte zum Gegenstand bewunderungswerther Arbeiten gemacht hat (*Gauss*, Werke I. p. 413).

Da sich sämmtliche Citate auf den Tomo Secondo der „Produzioni" beziehn, so sollen nur die Seitenzahlen angemerkt werden.

Fig. 7.



Auf p. 328 wird das Problem behandelt, den Quadranten der Lemniscate zu halbiren. Man ersetze die Gleichung der Lemniscate $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ durch:

$$8) \quad \frac{x}{a} = \sqrt{u+u^2}, \quad \frac{y}{a} = \sqrt{u-u^2}.$$

Der Bogen $CS$ werde vom Puncte $C$ an gerechnet. Hat $u$ für den Punct $S$ den Werth $m$, so ist:

$$9) \quad \text{Arc } CS = \frac{a}{\sqrt{2}} \int_0^m \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}}.$$

Für:

$$u = \frac{1-v}{1+v}$$

folgt:

$$10) \quad \int_0^m \frac{du}{\sqrt{u(1-u^2)}} = \int_{\frac{1-m}{1+m}}^1 \frac{dv}{\sqrt{v(1-v^2)}} = \int_0^1 - \int_0^{\frac{1-m}{1+m}}.$$

Ist in den Gleichungen 8) für den Punct $M$ $u = \frac{1-m}{1+m}$ und $u = 1$ für den Punct $L$, so geben die Gleichungen 9) und 10):

$$\text{Arc } CS = \text{Arc } CL - \text{Arc } CM = \text{Arc } LNM.$$

Ist $m = \frac{1-m}{1+m}$, so fallen die Puncte $S$ und $M$ im Puncte $T$ zusammen, der Quadrant der Lemniscate wird dann im Puncte $T$ halbirt.

Eine andere Methode der Halbirung beruht auf folgenden Formeln. Auf pag. 356 und 357 findet *Fagnano* aus:

$$11) \quad x = \frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1-z^4}}}{z}, \quad x = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}},$$

die Differentialgleichungen:

$$12) \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}, \quad \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{\sqrt{2}\,du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Mittelst der Gleichungen 11) und 12) lässt sich der Bogen der cubischen Parabel durch den Bogen der Lemniscate auf zwei verschiedene Arten ausdrücken. Weitere Formeln für denselben Zweck auf p. 357 und p. 358 bieten kein besonderes Interesse.

Eliminirt man $x$ zwischen den Gleichungen 11) und den Gleichungen 12), so folgt für das obere Zeichen:

$$13) \quad z = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}, \quad \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-z^4}}}{z} = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}.$$

$$14) \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{2du}{\sqrt{1-u^4}}.$$

Es sei $r$ der Radiusvector eines Punctes der Lemniscate, man setze $\frac{r}{a\sqrt{2}} = z$, ist $ds$ das Bogenelement, so findet man leicht:

$$\frac{1}{a\sqrt{2}} \frac{ds}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1-z^4}}.$$

Die Gleichungen 13) und 14) geben hierdurch ein Mittel den doppelten Bogen $CS$ eines Bogens $CI$ zu finden, oder umgekehrt die Hälfte $CI$ eines gegebenen Bogens algebraisch zu bestimmen.

In den Gleichungen 11) und 12) nehme man das untere Zeichen. Setzt man $t$ statt $u$, so folgt:

$$15) \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}}{z} = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^4}}, \quad z = \frac{2t\sqrt{1-t^4}}{1+t^4}.$$

$$16) \quad \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = -\frac{2dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Ist $CS = za\sqrt{2}$, $CH = ta\sqrt{2}$, so geben die vorstehenden Gleichungen Arc $CS = 2$ Arc $HZ$. Fallen die Puncte $H$ und $S$ zusammen, nimmt man in der Gleichung 15) $z = t$, also $z^4 = 2\sqrt{3} - 3$, so ist hierdurch algebraisch das Problem der Dreitheilung des Lemniscatenbogens gelöst.

Setzt man weiter:

$$CI = ua\sqrt{2}, \; CS = za\sqrt{2} \; CO = ta\sqrt{2},$$

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1-z^4}}}{z} = \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^4}}, \quad \frac{\sqrt{1+\sqrt{1-u^4}}}{u} = \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^4}},$$

so ist $CS = 2CI$; $CI = 2OL$, folglich $CS = 4OL$. Fallen die Puncte $S$ und $O$ zusammen, so wird dadurch der fünfte Theil des Quadranten der Lemniscate bestimmt.

Aus dem Vorhergehenden schliesst *Fagnano*, dass der Quadrant der Lemniscate sich algebraisch in gleiche Theile zerlegen lässt, wenn die Anzahl derselben in einer der drei Formen $2.2^m$, $3.2^m$, $5.2^m$ enthalten ist, wo $m$ eine positive, ganze Zahl bezeichnet:

„E questa è una nuova, e singolare proprietà della mia curva“ (p. 368).

Die ebenso eleganten wie merkwürdigen Theoreme von *Fagnano* bewogen *Euler* sein Additionstheorem in einer Reihe von Abhandlungen theils weiter auszuführen, theils geometrisch zu verwerthen. Der ziemliche Umfang dieser Abhandlungen gestattet keine eingehendere

Analyse derselben, einige Andeutungen der bemerkenswerthesten Resultate mögen genügen. Hier wie in fast allen Theilen der Mathematik tritt die wahrhaft staunenerregende Productivität *Euler's* in bemerkenswerther Weise hervor.

In der Abhandlung: „Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium" (Novi Commentarii Acad. Petropolitanae. T. VI p. 58—84. Petropoli 1761) bestimmt *Euler* auf dem Qudranten einer Ellipse zwei Bogen, deren Summe sich geometrisch ausdrücken lässt.

Wird die halbe grosse Axe zur Einheit genommen, ist $c$ die halbe kleine Axe, setzt man $1-c^2 = n$, so stellt sich *Euler* die Aufgabe, die Integrabilität des Differentialausdrucks

$$17) \quad dx\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}} + du\sqrt{\frac{1-nu^2}{1-u^2}}$$

zu bestimmen. Hierbei wird bemerkt: „— cum igitur tentaminibus totum negotium absolvi debeat, fingatur $\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}} = \alpha u$, et $\alpha$ ita concipiatur ut vicissem fiat $\sqrt{\frac{1-nu^2}{1-u^2}} = \alpha x$".

Da $n < 1$ ist, so führt die obige Annahme zu keinem rellen Resultate. *Euler* setzt daher (tentemus ergo alias formulas):

$$18) \quad \sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}} = \frac{\alpha}{u}, \quad \sqrt{\frac{1-nu^2}{1-u^2}} = \frac{\alpha}{x}.$$

Hieraus folgt $\alpha = 1$ und

$$19) \quad x^2+u^2 = 1+nx^2u^2.$$

Für $\alpha = 1$ ist nach 18) der Differentialausdruck in 17) gleich

$$\frac{dx}{u} + \frac{du}{x} = \frac{d(x^2+y^2)}{2xu}$$

d. i. nach 19):

$$\frac{dx}{u} + \frac{du}{x} = ndxu.$$

Findet die Gleichung 19) statt, so ist also

$$dx\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}} + du\sqrt{\frac{1-nu^2}{1-u^2}} = ndxu.$$

Da nach 10) $u = 1$ für $x = 0$, so giebt die vorstehende Gleichung integrirt:

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}} + \int_1^u du\sqrt{\frac{1-nu^2}{1-u^2}} = nxu.$$

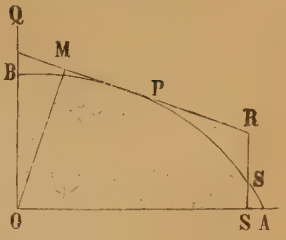
Diese Gleichung enthält Nichts weiter wie den Satz von *Fagnano*. *Euler* giebt für denselben folgende einfache, leicht zu beweisende Construction an.

Die Tangente im Puncte $P$ der Ellipse treffe die kleine Axe $OB$ im Puncte $Q$. Auf dieser Tangente werde $QR = OA$, d. h. gleich der halben grossen Axe abgeschnitten. Die Parallele zu $OB$ durch $R$ trifft die Ellipse im Puncte $S$. Es ist dann:

$$\text{Arc } PB - \text{Arc } AS = PM,$$

wo $M$ der Fusspunct des Perpendikels ist, gefällt vom Mittelpuncte $O$ der Ellipse auf die Tangente des Punctes $P$.

Fig. 8.




Im weiteren Verlauf der Abhandlung reproducirt *Euler* eine ziemliche Zahl der von *Fagnano* gefundenen Formeln. Zu diesen wird der folgende Satz hinzugefügt:

Theorema.

„Si corda arcus simplicis $CM$ fit $= z$ et corda arcus $n$ cupli $CM^{(n)} = u$, erit corda arcus $(n+1)$ cupli

$$CM^{(n+1)} = \frac{z\sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2}} + u\sqrt{\frac{1-z^2}{1+z^2}}}{1 - uz\sqrt{\frac{(1-u^2)(1-z^2)}{(1+u^2)(1+z^2)}}}.$$"

Der T. VII der „Novi Commentarii" (Petropoli 1761) enthält in verkehrter Reihenfolge die Abhandlungen *Euler's*;

Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi. (p. 83—127).

Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi de comparatione arcuum Ellipsis. (p. 3—48).

Es seien $X$ und $Y$ dieselben Functionen von $x$ und $y$. Nimmt man zwischen $x$ und $y$ die Gleichung $\alpha+2\beta(x+y)+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy = 0$ an, so lassen sich mittelst derselben Integrale herstellen, $\int Xdx$, $\int Ydy$ mit deren Hülfe sich die Summen von Kreisbogen und Parabelbogen ohne zu weitläufige Rechnungen ausdrücken lassen. Diese Methode bildet den Gegenstand der ersten Abhandlung. Mit seinem unübertrefflichen Talent, vom Einfachen zum Complicirten auf systematische Weise voranzugehn, nimmt *Euler* in der zweiten Abhandlung die „Aequatio canonica" $0 = \alpha+\gamma(xx+yy)+2\delta xy+\zeta xxyy$ als Ausgangspunct zur Herstellung seines Additionstheorems.

Setzt man zur Abkürzung mit *Euler*:

$$20) \quad \Pi(x) = \int_0^x \frac{A'+B'x^2+C'x^4}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}}\,dx,$$

so finden folgende Gleichungen statt (pag. 11):

$$\Pi(x)+\Pi(y)-\Pi(z)=$$

$$\frac{xyz}{\sqrt{A}}\left[-B'-\frac{x^2+y^2+z^2}{2}C'+\frac{x^2y^2z^2}{6A}EC'\right],$$

wo:

$$22)\quad z=\frac{x\sqrt{A(A+Cy^2+Ey^4)}+y\sqrt{A(A+Cx^2+Ex^4)}}{A-Ex^2y^2}.$$

Für $B'=0$, $C'=0$ repräsentiren die Gleichungen 20)—22) das Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung, für $A=1$, $C=-(1+k^2)$, $E=k^2$, $A'=1$, $B'=-k^2$, $C'=0$ zeigen dieselben Gleichungen, dass *Euler* auch als Entdecker des Additionstheorems der elliptischen Integrale zweiter Gattung angesehn werden muss, *welches Theorem auf p. 24 in der gewöhnlichen Form direct ausgesprochen sich vorfindet.* Von pag. 24 an bis zum Ende der Abhandlung bedient sich *Euler* fortwährend dieses Satzes zur Vergleichung von Ellipsenbogen. Nachdem schon auf p. 14 bemerkt, wie die Gleichung $\Pi(x)=n\Pi(y)$ herzustellen ist, finden sich auf p. 37 u. p. 46 Probleme über Verdoppelung und Verdreifachung eines elliptischen Bogens.*)

Im t. VII der „Comment. Petropol." findet sich noch folgender Aufsatz *Euler's*:

Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Eruditorum Lipsiensibus propositorum. (p. 128—162).**)

Das zu beweisende Theorem besteht in Folgendem.

Es sei (Fig. 9) $DD'$ ein gegebener Diameter der Ellipse $ABA'B'$. Man construire den conjugirten Diameter $CC'$. Es werde auf der Verlängerung von $CC'$ vom Mittelpunct $O$ der Ellipse aus das Segment $OE=OA$ abgeschnitten. Vom Puncte $E$ fälle man das Perpendikel $EH$ auf $OA$, welches den Umfang der Ellipse im Puncte $P$ trifft. Durch den Punct $P$ ist dann der halbe Umfang $DBCAD'$ der Ellipse zwischen den Endpuncten des gegebenen Diameters $DD'$ so getheilt, dass Arc $DBP$ — Arc $PAD'=FF'$ ist. Die Puncte $F$ und $F'$ sind die Fusspuncte der Perpendikel gefällt von den Puncten $D$ und $D'$ auf den conjugirten Diameter $CC'$.

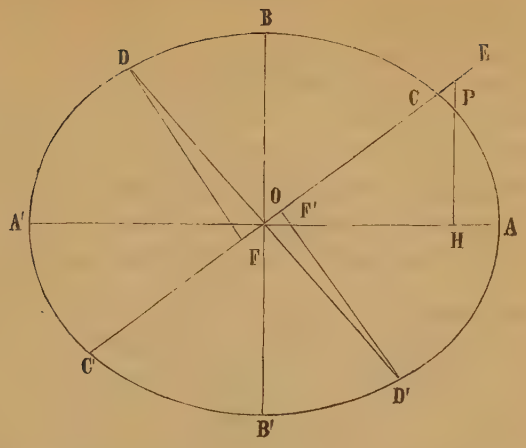
*Euler* hat den Beweis dieses Theorems gegeben, sowie die Lösung des Problems auf dem elliptischen Quadranten $AB$ zwei Puncte $p$ und

*) Problema 7.

Proposito Ellipsis arcu quocunque $fg$, a dato puncto $p$ abscindere arcum $pqrs$, qui ab illius arcus $fg$ triplo, differat quantitate geometrice assignabili.

**) Nova Acta Eruditorum MDCCLIV p. 40.

Fig. 9.




$q$ so zu bestimmen, dass Arc $pq = \frac{1}{2}$ Arc $AB$. Dieses letztere Problem wird auf ein geometrisches Problem reducirt. Die Tangente des Punctes $p$ schneide die verlängerten Hauptaxen $OA$ und $OB$ der Ellipse in den Puncten $p'$ und $p''$. Der Punct $p$ ist dann durch die Bedingung $p'p - pp'' = a+b$ bestimmt, wo $OA = a$ und $OB = b$ ist. Genau auf dieselbe Weise ist der Punct $q$ bestimmt, dass die Differenz der Segmente der Tangente gleich der Summe der halben Hauptaxen ist. (p. 155). Am Ende seiner Abhandlung behandelt *Euler* das Problem den ganzen Umfang der Ellipse in drei gleiche Theile zu zerlegen (p. 156—162). Ueber dieses Problem findet man die Worte:

„Quoniam enim facillime arcus assignatur, qui totius perimetri fit semissis, vel quadrans, vel ope problematis praecedentis etiam octans, haud parum notatu dignus videtur casus, quo triens postulatur, cujus solutio, etiamsi ob summam facilitatem, qua res de semissi et quadrante expeditur, non admodum difficilis videatur, tamen ad investigationes perquam prolixas et operosas deducitur, quas superare tentabo".

In allen diesen angeführten Abhandlungen macht sich bei *Euler* das Vorbild geltend, welches *Fagnano* in seinen Arbeiten gegeben hat, eine fortwährende, unmittelbare Anwendung der gefundenen Formeln auf Geometrie. *Euler* citirt auch mit offener Bewunderung die Arbeiten seines Vorgängers in diesem Gebiete der Analysis.

Die folgenden Abhandlungen *Euler's* sind, ungeachtet ihrer Titel, beinahe rein analytischer Natur, die Untersuchungen von *Maclaurin*

und *d'Alembert*, welche angeführt sind, scheinen den Grund zu diesen Arbeiten gelegt zu haben.

Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest. (Novi Comment. t. VIII. p. 129—149 Petrop. 1763)

De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis ac hyperbolae. (N. C. t. X. p. 3—50. Pet. 1766).

Findet zwischen $x$ und $y$ die Relation statt:

23) $(a+2bx+cx^2)y^2+(a'+2b'x+c'x^2)y+a''+2b''x+c''x^2 = 0,$

so werden particuläre Fälle dieser Gleichung auf die Transformation von Integralen angewandt, enthalten in der Form:

$$\int \sqrt{\frac{f+gxx}{k+hxx}}\,dx.$$

Je nachdem die Constanten $f$, $g$, $h$, $k$, theilweise positiv oder negativ sind, je nachdem ferner gewisse Ungleichheiten zwischen denselben stattfinden, unterscheidet *Euler* 12 verschiedene Fälle, welche sämmtlich sehr eingehend behandelt sind. In geometrischer Hinsicht wird dabei unterschieden, ob ein solches Integral eine der folgenden fünf Bedeutungen hat: elliptischer Bogen, hyperbolischer Bogen, elliptischer Bogen plus einem algebraischen Theil, hyperbolischer Bogen plus einem algebraischen Theil, elliptischer und hyperbolischer Bogen, nebst algebraischem Theil. Aus der enormen Menge von Detailuntersuchungen, welche beide Abhandlungen enthalten, möge hervorgehoben werden, dass *Euler* in der ersten Abhandlung, die allgemeine Gleichung 23) auf ein ziemlich allgemeines Problem anwendet. (p. 142).

Die Gleichung 23) führt bekanntlich auf eine Differentialgleichung:

$$24) \quad \frac{dy}{\sqrt{Y}}+\frac{dx}{\sqrt{X}}=0,$$

wo $X$ und $Y$ Polynome vierten Grades von $x$ und $y$ sind. *Euler* setzt nun:

$$25) \quad \begin{cases} Y = A'y^4+2B'y^3+C'y^2+2D'y+E', \\ X = Ax^4+Cx^2+D. \end{cases}$$

Nimmt man $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$ als gegeben an, so giebt die erste der Gleichung 25) zwischen $a$, $b$, $c$ etc. 5 Relationen. Da $X$ nur grade Potenzen von $x$ enthält, so ergeben sich zwischen den bemerkten Coefficienten noch zwei weitere Relationen. Um eine letzte Relation [die Gleichung 23) enthält factisch nur 8 arbiträre Coefficienten] zu erhalten, geht *Euler* von folgender Gleichung aus:

$$\int \frac{P'+Q'y+R'y^2}{\sqrt{A'y^4+2B'y^3+C'y^2+2D'y+E'}}\,dy = \text{Constans} + mx+ny+p+\int \frac{P+Qx+Rx^2}{\sqrt{Ax^4+Cx^2+D}}\,dx.$$

Diese Gleichung wird mittelst der Gleichungen 23) und 24) behandelt. Es seien $P'$, $Q'$, $R'$ gegebene Quantitäten. Um nun eine achte Relation zwischen $a$, $b$, $c$ etc. zu erhalten, setzt *Euler* $A'Q' = B'R'$ Es ist dann:

$$mx+ny+p = \frac{R'}{A'}(by+c'x+cxy).$$

Die finale Bestimmung der Coefficienten der Gleichung 23) hängt von einer cubischen Gleichung ab. Sind dieselben bestimmt, so ergeben sich $A$, $B$, $C$, $P$, $Q$ und $R$ durch lineare Gleichungen. Aehnlich wie die vorhin erwähnten beiden Abhandlungen enthalten die beiden folgenden wesentlich analytische Resultate.

Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet. (Acta Academiae Petropolitanae. pro Anno MDCCLXXI. Pars Posterior. Petrop. 1785 p. 23—44). De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione

$$y = \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

(Acta A. P. pro A. MDCCLXXXII. Pet. 1789. p. 34—61).

Die erste Abhandlung beschäftigt sich namentlich mit dem Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung (p. 30) und Anwendung desselben auf die Vergleichung von Ellipsenbogen. Auf p. 35 wird in das Integral für den elliptischen Bogen ein Winkel als Integrationsvariabele eingeführt. Am Schluss (p. 43) findet sich folgendes:

Theorema.

Si capiatur $s = \frac{q^2q}{\sqrt{c^4+(a^2-c^2)q^2}}$, erit differentia istarum formularum integralium semper algebraica:

$$\int \frac{\sqrt{a^4-(a^2-c^2)s^2}}{a\sqrt{a^2-s^2}}\,ds - \int \frac{\sqrt{c^4+(a^2-c^2)q^2}}{c\sqrt{c^2-q^2}}\,dq = \frac{(a^2-c^2)q\sqrt{c^2-q^2}}{c\sqrt{c^4+(a^2-c^2)q^2}}.$$

Diese „egregia reductio“, wie *Euler* dieselbe nennt, ist indessen nur eine andere Form für das Theorem von *Fagnano*.

Die Abhandlung über die elastische Curve basirt auf einem älteren

Aufsatz „Plenior explicatio“ von welchem weiter unten die Rede sein soll. Von pag. 51 ab werden die Bogen der Curven, welche in Form elliptischer Integrale erscheinen, mit einander verglichen.*) Die Vergleichung von Curvenbogen, welche nicht superposabel sind, haben *Euler* in seinen letzten Lebensjahren zu einigen sehr interessanten und geistvollen Betrachtungen Veranlassung gegeben, von denen man nur bedauern kann, dass dieselben nicht in dem Maasse durchgeführt sind, wie dieses bei den Kegelschnitten der Fall ist.

Diese Untersuchungen, welche von den bisher bemerkten gänzlich verschieden, sind die folgenden:

De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet. (Nova Acta Ac. Petrop. t. V pro Anno MDCCLXXXVII. Petr. 1789 p. 71—85).

De infinitis curvis algebraicis quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur. (Mémoires posthumes de L. Euler, F. F. Schubert et N. Fuss. Petersbourg 1830 p. 95—99).

Die erste Abhandlung behandelt folgendes:

Problema.

Pro coordinatis $x$ et $y$ functiones algebraicas ipsius $v$ investigare, ut fiat:

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = dv\sqrt{\frac{1-(n^2-1)v^2}{1-v^2}}.$$

Nachdem eine Lösung gegeben, setzt *Euler* $v = \sin\varphi$ und giebt dann auf p. 80 als altera solutio folgende Gleichungen:

$$2x = \frac{n+1}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{n-1}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

$$2y = \frac{n+1}{\lambda+1}\cos(\lambda+1)\varphi - \frac{n-1}{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\varphi.$$

Nimmt man die Fälle $\lambda = \pm 1$ aus, so bestimmen die vorstehenden Gleichungen für rationale Werthe von $\lambda$ unendlich viele algebraische Curven. Auf p. 83 wird noch ein zweites System gegeben, welches nur unwesentlich von dem obigen verschieden ist. Aus der zweiten Abhandlung, welche vom Jahre 1781 datirt, sind folgende Gleichungen hervorzuheben:

---

*) Die geometrische Untersuchung der elastischen Curve verdankt ihren Urprung einem Probleme von *Jacob Bernoulli*, (Acta Erud. 1692 p. 207) die Form eines Tuches zu finden, welches von einer schweren, flüssigen Materie ausgedehnt wird. Eine Lösung des Problems erfolgte nicht. *Bernoulli* gab seine Lösung A. E. 1692 p. 262. Weitere Untersuchungen von demselben enthalten die A. E. 1694 p. 338; 1695 p. 545.

$$x = \frac{a}{n+1}\cos(n+1)\Theta - \frac{b}{n-1}\cos(n-1)\Theta,$$

$$y = \frac{a}{n+1}\sin(n+1)\Theta - \frac{b}{n-1}\sin(n-1)\Theta,$$

wo $n = \pm 1$ auszunehmen ist.

In einer früheren Abhandlung:

Integratio Aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}}$$

(Novi Commentarii, t. XII p. A. MDCCLXVII p. 3—16)

hatte *Euler* schon bemerkt, dass in dem ersten Differential durch eine Substitution von der Form:

$$x = \frac{mz+a}{nz+b}$$

die ungraden Potenzen von $z$ unter dem Wurzelzeichen sich wegschaffen lassen. Dasselbe gilt für das zweite Differential. Nimmt man also in der obigen Gleichung $B = 0$, $D = 0$, so wird die Allgemeinheit derselben dadurch nicht verringert. Indem *Euler* in der obigen Differentialgleichung unter den Wurzelzeichen nur grade Potenzen von $x$ und $y$ annahm, gelangte er durch eine wesentliche Vereinfachung der Rechnungsoperationen zu den Ergebnissen, welche in der ebenso merkwürdigen wie bedeutenden Abhandlung niedergelegt sind:

Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in forma integrali

$$\int \frac{Z}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}\,dz$$

contentarum, denotante $Z$ functionem quamcunque rationalem ipsius $z^2$.

Diese Abhandlung findet sich in „Acta Academiae Petropolitanae, pro Anno MDCCLXXXI." Pars Posterior. Petropoli 1785 (p. 3—22), oder auch: „Institutiones calculi integralis" (t. IV p. 446—464). *Euler* hat in dieser Abhandlung sein ursprüngliches Additionstheorem so erweitert, dass sich ein Satz ergiebt, welcher die Additionstheoreme sämmtlicher, von *Legendre* aufgestellten Gattungen, elliptischer Integrale umfasst. Bei dem historischen Interesse sollen die Worte *Euler's* angeführt werden. Man setze:

$$26) \quad \Pi(z) = \int_0^z \frac{Z}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}\,dz,$$

wo $Z$ eine grade Function von $z$ ist. Ist $Z$ ein Polynom von $z^2$, so lässt sich $\Pi(x)+\Pi(y)-\Pi(z)$ als algebraische Function von $x$, $y$ und

$z$ darstellen für eine gewisse algebraische Relation zwischen $x$, $y$ und $z$.

„Nunc autem observavi, easdem comparationes institui posse, si pro $Z$ accipiatur functio quaecunque rationalis ipsius $z^2$, quae scilicet habeat hujusmodi formam:

$$\frac{F+Gz^2+Hz^4+Iz^6+Kz^8+\ldots}{\mathfrak{F}+\mathfrak{G}z^2+\mathfrak{H}z^4+\mathfrak{J}z^6+\mathfrak{K}z^8+\ldots}$$

ubi quidem hoc discrimen occurrit, quod differentia inter summam duarum hujusmodi formularum et tertiam formulam ejusdem generis inveniendam non amplius fit quantitas algebraica, veruntamen per logarithmos et arcus circulares semper exhiberi possit ita ut nunc ista investigatio multo latius pateat, quam eam adhuc eram complexus."

Wie fast in allen Untersuchungen über elliptische Integrale geht *Euler* von der Gleichung aus:

$$\alpha+\gamma(x^2+y^2)+2\delta xy+\zeta x^2y^2 = 0.$$

Diese Gleichung wird durch die folgende ersetzt:

27) $$x^2+y^2-z^2+2xy\sqrt{1+mz^2+nz^4}-nx^2y^2z^2 = 0.$$

Setzt man zur Vereinfachung:

28) $$\sqrt{1+mz^2+nz^4} = \Delta,$$

so giebt die Gleichung 27):

29) $$x^2+y^2-z^2+2xy\,\Delta-nx^2y^2z^2 = 0.$$

Entwickelt man aus dieser Gleichung successive die Werthe von $x$ und $y$, so folgt:

30) $$\begin{cases} x(1-ny^2z^2)+y\Delta = z\sqrt{1+my^2+ny^4}, \\ y(1-nx^2z^2)+x\Delta = z\sqrt{1+mx^2+nx^4}. \end{cases}$$

Die Gleichung 29) führt bekanntlich auf:

31) $$\frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}}+\frac{dy}{\sqrt{1+my^2+ny^4}} = 0,$$

oder nach 30):

32) $$\frac{dx}{y(1-nx^2z^2)+x\Delta} = -\frac{dy}{x(1-ny^2z^2)+y\Delta}.$$

Für $x = 0$ ist nach 29) $y = z$, die Differentialgleichung 30) integrirt, giebt das bekannte Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung. Es seien nun $X$ und $Y$ dieselben Functionen von $x^2$ und $y^2$ wie $Z$ von $z^2$. Man setze:

33) $$\frac{X}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}}dx+\frac{Y}{\sqrt{1+my^2+ny^4}}dy = dV,$$

dann lässt sich auf folgende Art $V$ finden. In 33) lässt sich nach 31) $dx$ oder $dy$ eliminiren, da indessen kein Grund vorhanden ist, $V$ als

Function von $x$ oder $y$ anzusehn, so führe man eine neue unabhängige Variabele $u$ ein, mittelst der Gleichung $xy = u$. Die Gleichung 32) lässt sich dann ersetzen durch:

$$\frac{dx}{y(1-nx^2z^2)+x\Delta} = \frac{-dy}{x(1-ny^2z^2)+y\Delta} = sdu,$$

oder:

34) $dx = [y(1-nx^2z^2)+x\Delta]sdu$, $dy = -[x(1-ny^2z^2)+y\Delta]sdu$,

wo $s$ eine Unbestimmte bedeutet. Diese Gleichungen geben:

$$ydx+xdy = (y^2-x^2)sdu$$

also da $ydx+xdy = du$ ist, $1 = (y^2-x^2)s$. Setzt man in den Gleichungen 34) $s = \frac{1}{y^2-x^2}$, so folgt mittelst der Gleichungen 30):

$$\frac{dx}{\sqrt{1+mx^2+nx^4}} = \frac{-dy}{\sqrt{1+my^2+ny^4}} = \frac{zdu}{y^2-x^2}.$$

Die Gleichung 33) wird hierdurch:

$$z\frac{X-Y}{y^2-x^2}du = dV$$

oder:

$$34)\quad dV = -z\frac{Y-X}{y^2-x^2}du.$$

Nun ist aber $\frac{Y-X}{y^2-x^2}$ eine Function von $xy$ und $x^2+y^2$. Die Gleichung 29) giebt, $xy = u$ gesetzt,:

$$35)\quad x^2+y^2 = z^2+2u\Delta+u^2z^2n.$$

Hieraus folgt, dass in 34) der Factor von $du$ eine Function von $u$ ist. Setzt man folglich:

$$36)\quad z\frac{Y-X}{y^2-x^2} = U,$$

so ist nach 34) $dV = -Udu$. Diesen Werth von $dV$ setze man in die Gleichung 33) und integrire. Für $x = 0$ ist $y = z$ und $u = 0$. Mit Rücksicht auf die Bezeichnung aus 26) folgt nun:

$$37)\quad \Pi(x)+\Pi(y)-\Pi(z) = -\int_0^u Udu.$$

Ist z. B.:

$$38)\quad Z = \frac{a+bz^2}{a'+b'z^2},$$

so folgt:

$$\frac{Y-X}{y^2-x^2} = \frac{a'b-ab'}{a'^2+a'b'(x^2+y^2)+b'^2x^2y^2}$$

d. i. nach 35) und 36):

$$\frac{z(a'b - ab')}{a'^2 + a'b'z^2 + 2a'b'\Delta u + (b'^2 + a'b'nz^2)u^2} = U.$$

Nimmt man also:

$$\Pi(z) = \int_0^z \frac{a + bz^2}{a' + b'z^2} \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}},$$

so ist:

$$\Pi(x) + \Pi(y) - \Pi(z) = \int_0^u \frac{z(ab' - a'b)\,du}{a'^2 + a'b'z^2 + 2a'b'\Delta . u + (b'^2 + a'b'nz^2)u^2},$$

wo nach Ausführung der Integration rechts $u = xy$ zu setzen ist. Die vorstehende Gleichung enthält die Additionstheoreme der elliptischen Integrale sämmtlicher drei Gattungen.

In Verbindung mit den Abhandlungen, deren beim Additionstheorem Erwähnung geschah, sind in dem Vorstehenden fast alle Arbeiten von *Euler* angegeben, welche sich auf elliptische Integrale beziehn. Dieselben enthalten ein sehr grosses Material, selbst wenn man von mitunter etwas umständlichen Wiederholungen absieht. Es hat sich ergeben, dass das allgemeinste Additionstheorem für elliptische Integrale zuerst von *Euler* deutlich und explicite ausgesprochen ist, dass *Euler* eine Art Normalform elliptischer Integrale angenommen und auf dieselbe hingewiesen hat, welche sich wenig von der Normalform unterscheidet, welche die Basis der Forschungen von *Legendre* bildet. Die Arbeiten von *Euler* mussten für *Legendre* eine ebenso nützliche wie reiche Quelle sein, aus welcher der Verfasser des „Traité des fonctions elliptiques" eine Anzahl Ideen entnommen hat, welche eine unparteiische Auffassung dem Manne zuwenden muss, welcher ohne Uebertreibung der Begründer der neuern Mathematik genannt werden kann. Das grosse Verdienst, welches *Legendre* um die Ausbildung der Theorie der elliptischen Integrale erworben, wird nicht im Mindesten dadurch verringert, dass die Priorität einiger fundamentalen Ideen und Theoreme *Euler* angehört. Wenn man erwägt, dass die hierhin gehörigen Arbeiten *Euler's* in ihrer Vereinigung einen Quartband von 350—400 Seiten füllen würden, so ist schwer zu begreifen, dass von all diesen Arbeiten nur ein einziger Satz erwähnt wird, der noch obendrein, gestützt auf die Autorität von *Lagrange*, mehr einem glücklichen Einfall, wie langer, mühsamer und tiefer Forschung zugeschrieben wird.*) *Fagnano* hat den glücklichen

*) Schon früher ist *Euler* gegen eine gedankenlose Tradition, gegen eine ungerechte Entfremdung seiner Additionstheoreme in Schutz genommen

Gedanken gehabt, den *Euler* durch eine ungeheure Arbeit erst systematisch weiter geführt hat. Es lässt sich nicht verkennen, dass die Rechnungen *Euler's* in manchen Aufsätzen für den Ungewohnten von abschreckender Länge und Complication sind, dass die überwältigende Menge von Formeln der ersten Abhandlungen, erst in der „Plenior Explicatio" den Anfang einer bedeutenden Theorie hervortreten lässt. Mit dem Erscheinen der Abhandlung „Mémoire sur les intégrations par d'arcs d'ellipse" (Histoire de l'Académie, Année MDCCLXXXVI. Paris 1788 p. 616—646) von *Legendre*, wenige Jahre nach dem Tode *Euler's*, tritt die Theorie der elliptischen Integrale in ein neues Stadium. Die geometrische Grundlage verschwindet fast gänzlich. Mit hervorragender Leichtigkeit und Eleganz behandelt *Legendre* die elliptischen Integrale in sehr systematischer Weise. Er giebt zur Untersuchung derselben eine grosse Menge Reductionsformeln, welche ihm gestatten, später in lichtvoller Uebersichtlichkeit Ordnung zu schaffen in dem schwer zu übersehenden Labyrinth von Formeln, welche, meistens in recht ungelenker Form, von *d'Alembert* und *Euler* aufgestellt worden sind. Selbst, wenn man eine Reihe glänzender Entdeckungen nicht in Rechnung bringt, können die Verdienste von *Legendre* nicht hoch genug angeschlagen werden, weiteren Forschungen den Weg geebnet zu haben.

Fasst man die successive Ausbildung der Lehre von den elliptischen Integralen in's Auge, so lässt sich kaum in Abrede stellen, dass von dem Jahre 1740 an, als *Fagnano* das Problem über die biquadratische Parabel aufstellte, ein volles Jahrhundert hindurch diese Theorie wesentlich von *Fagnano*, *Euler* und *Legendre* geschaffen und begründet ist.

---

worden. Man findet ähnliche Behauptungen wie die obigen schon bei *Plana* in dem „Mémoire sur la théorie des transcendantes elliptiques" enthalten, in den Memorie della reale Academia di Torino. Serie seconda. T. XX. p. 292. Torino 1863.

Es ist dieses nicht der einzige Fall, dass bedeutende Ideen für *Euler* reclamirt werden müssen. *Riemann* hat darauf hingewiesen, dass *Euler* eine Methode vollständig ausgebildet hatte, die Bewegungen von Flüssigkeiten zu betrachten, welche 29 Jahre später von *Lagrange* wieder gefunden und in der Folge demselben kritiklos zugeschrieben wurde. Für die Behandlung hydrodynamischer Probleme hat *Euler zwei Methoden* gegeben. Man vergleiche hierüber eine Göttinger Preisschrift vom Jahre 1860 unter dem Titel: Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten von *H. Hankel.*

Es bewahrheitet sich bei dieser Gelegenheit wieder die Richtigkeit der treffenden Worte von *Laplace „Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maître à tous."* Citirt von *Libri* im Journal des Savants. 1846, p. 52.

Die Arbeiten von *Fagnano* und *Euler* haben später zu keinen directen Fortsetzungen Veranlassung gegeben, die Schriften von *Fagnano* scheinen sehr wenig bekannt, die Schriften des grossen *Euler* zu wenig gelesen zu sein. Es lässt sich schwer erklären, dass der Name von jedem dieser eminenten Geometer nur mit einem einzigen Theoreme verbunden ist. Von dem Additionstheoreme *Euler's* ist im siebenten Abschnitt die Rede gewesen; zur Vervollständigung des Obigen bleibt daher nur übrig, auf einige Abhandlungen zu verweisen, welche sich auf das sogenannte Theorem von *Fagnano* beziehn. Folgende Abhandlungen bieten einiges Interesse dar.

*Brinkley*: A Theorem for finding the Surface of an Oblique Cylinder with a Geometrical Demonstration. Also, an Appendix, containing some Observations on the Method of finding the Circumference of a very Excentric Ellipse; including a Geometrical Demonstration of the remarkable Property of Elliptic Arc discovered by Count Fagnani. (Transactions of the roy. Irish Academy. Vol. IX. p. 145—158. Dublin 1803)."

In dieser Abhandlung hat nach *Mac Cullagh* der nachmalige „Lord Bishop of Cloyne" den *ersten geometrischen* Beweis des Satzes von *Fagnano* gegeben. *)

*Wallace*: „A New Method of expressing the Coefficients of the Development of the Algebraic Formula $(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^n$, by means of the Perimeters of two Ellipses, when $n$ denotes the Half of any odd number; together with an Appendix containing the Investigation of a Formula for the Rectification of any Arch of an Ellipse." (Transactions of the roy. Society of Edingburgh. Vol V. p. 253—293. Appendix p. 271—293. Edingburgh MDCCCV).

Die Abhandlung enthält im Appendix die Darstellung eines Ellipsenbogens in Form einer unendlichen Reihe, welche nicht ganz unzweckmässig zu sein scheint. Die Anwendung dieser Reihe auf den Satz von *Fagnano* ist zwar sehr originell, bildet aber einen grossen Umweg im Verhältniss zur directen Behandlung des Integrals, welches die Länge des Ellipsenbogens giebt. Während *Fagnano*, bekannt mit den

*) Bei dieser Gelegenheit sei die Abhandlung von *Mac Cullagh* erwähnt „Geometrical Theorems on the Rectification of Conic Sections." (Transact. of the roy. Irish Acad. Vol. XVI. p. 79—83. Dublin 1830). Die Abhandlung enthält nach Behauptung des Verfassers die erste geometrische Herleitung des Satzes von *Landen* über die Hyperbelbogen; dieselbe scheint ein Gegenstück zu der im Texte bemerkten Abhandlung von *Brinkley* bilden zu sollen.

Arbeiten von *Leibniz, Jacob und Johann Bernoulli*, die Bezeichnungen dieser ebenso grossartigen wie tiefen Denker angenommen hatte, findet sich in der Abhandlung von *Wallace* noch die veraltete Bezeichnung der Theorie der Fluxionen.

Bedeutend weiter wie *Brinkley* und *Wallace* geht *Talbot*, der Erfinder der Uebertragung von Lichtbildern auf Papier, der gegenwärtigen Photographie, in zwei Abhandlungen „Researches on the Integral Calculus“ (Philosophical Transactions. 1836. p. 177—215, 1837 p. 1—18).

Die von *Fagnano* angewandten Rechnungen hat *Talbot* zu verallgemeinern und systematisiren gesucht. Es lässt sich aber nicht verkennen, dass die Abhandlungen über einige geistreiche Versuche nicht hinausgehn. Die gefundenen wesentlichsten Resultate und die Art ihrer Herleitung ist fast identisch wie bei *Euler*.

Es seien $x$ und $y$ durch eine symmetrische Relation verbunden, so dass $y = \varphi(x)$ und $x = \varphi(y)$. Dann ist $dxy = ydx + xdy = \varphi(x)dx + \varphi(y)dy$. Hieraus folgt durch Integration:

$$\int \varphi(x)dx + \int \varphi(y)dy = xy + \text{Constans},$$

was eine Relation zwischen zwei Integralen derselben Form ist. Nimmt man $a^2x^2y^2 = a^2(x^2+y^2) - 1$, also:

$$ay = \sqrt{\frac{a^2x^2-1}{x^2-1}}, \quad ax = \sqrt{\frac{a^2y^2-1}{y^2-1}},$$

so folgt:

$$\int \sqrt{\frac{a^2x^2-1}{x^2-1}}\,dx + \int \sqrt{\frac{a^2y^2-1}{y^2-1}}\,dy = axy + \text{Const.}$$

Diese Gleichung giebt eine Relation zwischen den Bogen einer Hyperbel, bestimmt durch $y^2 - (a^2-1)x^2 = 1 - a^2$. Diese Resultate finden sich schon bei *Euler*.

Man kann auf analoge Art wie vorhin eine Relation zwischen drei Integralen finden. Es sei:

$$yz = \varphi(x), \; xz = \varphi(y), \; xy = \varphi(z),$$

also $dxyz = \varphi(x)dx + \varphi(y)dy + \varphi(z)dz$. Durch Integration folgt:

$$\int \varphi(x)dx + \int \varphi(y)dy + \int \varphi(z)dz = xyz + \text{Const.}$$

Nimmt man z. B.

$$x+y+z = 0, \; yz+xz+xy = -\frac{1}{4}x^2y^2z^2,$$

so ist:

$$\varphi(t) = -\frac{2}{t^2} + 2\frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2},$$

also:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}\,dx+\int \frac{\sqrt{1+y^4}}{y^2}\,dy+\int \frac{\sqrt{1+z^4}}{z^2}\,dz =$$
$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{xyz}{2}+\text{Const.} = \frac{3xyz}{4}+\text{Const.}$$

Die zweite der obigen Gleichungen $yz+xz+xy = -\frac{x^2y^2z^2}{4}$ giebt nämlich durch $xyz$ dividirt:

$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = \frac{xyz}{4}.$$

Jedes der drei Integrale bestimmt den Bogen einer gleichseitigen Hyperbel enthalten in der Coordinatengleichung $xy = 1$.

Die Annahmen:

$$x^3+y^3+z^3 = 0,\ (yz)^3+(xz)^3+(xy)^3 = -1$$

geben:

$$yz = \sqrt[3]{x^6-1},$$

folglich:

$$\int \sqrt[3]{x^6-1}\,dx+\int \sqrt[3]{y^6-1}\,dy+\int \sqrt[3]{z^6-1}\,dz = xyz+\text{Const.}$$

Auf p. 193 der ersten Abhandlung sucht *Talbot* die isolirten Beispiele zu verallgemeinern dadurch, dass $n-1$ symmetrische Gleichungen zwischen $n$ Variabeln gefunden werden sollen. Man kann die $n$ Variabeln als Wurzeln einer Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades ansehn, für welche wenigstens ein Coefficient eine beliebige Variabele enthält. Ist $\varphi(x)$ oder $\int \varphi(x)\,dx$ gegeben, so soll die Gleichung:

$$t^n-pt^{n-1}\ldots\pm r = 0$$

gefunden werden, deren Wurzeln $x, y, z\ldots$ die Eigenschaft haben, dass die Summe der Integrale

$$\int \varphi(x)\,dx+\int \varphi(y)\,dy+\int \varphi(z)\,dz+\ldots$$

sich als algebraische Function von $x, y, z\ldots$ ausdrücken lässt. Von dem Problem werden nur besondere Fälle behandelt.

Um einige Beispiele zu geben, seien $t_1$ und $t_2$ die Wurzeln von

$$t^2-vt+1 = 0$$

also:

$$\frac{1+t_1^2}{t_1} = \frac{1+t_2^2}{t_2} = v,\ t_1+t_2 = v.$$

Diese Gleichungen geben:

$$\sqrt{\frac{1+t_1^2}{t_1}}\,dt_1+\sqrt{\frac{1+t_2^2}{t_2}}\,dt_2 = (dt_1+dt_2)\sqrt{v} = \sqrt{v}\,dv.$$

Durch Integration folgt:

$$\int \sqrt{\frac{1+t_1^2}{t_1}}\,dt_1 + \int \sqrt{\frac{1+t_2^2}{t_2}}\,dt_2 =$$
$$\tfrac{2}{3}v^{\frac{3}{2}} + \text{Const.} = \tfrac{2}{3}(t_1+t_2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

In Folge von $t^2 - vt + 1 = 0$ ist $t_1 t_2 = 1$. Setzt man also $t_1 = u^2$, $t_2 = w^2$, so folgt für $uw = 1$:

$$\int \sqrt{1+u^4}\,du + \int \sqrt{1+w^4}\,dw = \tfrac{2}{3}(u^2+w^2)^{\frac{3}{2}} + \text{Const.}$$

Diese Relation dient zur Addition der Bogen der cubischen Parabel, wenn zwischen den Coordinaten die Gleichung stattfindet $3y = x^3$.

Um zu ähnlichen Resultaten für Ellipsenbogen zu gelangen, setzt *Talbot:*

$$\sqrt{\frac{1-a^2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t}{v} + 1,$$

oder:

$$t^3 + vt^2 + \left(\frac{1-a^2}{4}v^2 - 1\right)t - v = 0.$$

Sind $x$, $y$, $z$ die Wurzeln dieser Gleichung, so findet man:

$$x+y+z = -v, \quad x^2+y^2+z^2 = \frac{1+a^2}{2}v^2 + 2,$$
$$dx\sqrt{\frac{1-a^2x^2}{1-x^2}} + dy\sqrt{\frac{1-a^2y^2}{1-y^2}} + dz\sqrt{\frac{1-a^2z^2}{1-z^2}} =$$
$$\frac{2}{v}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) + dx + dy + dz = a^2 dv,$$

also:

$$\int dx\sqrt{\frac{1-a^2x^2}{1-x^2}} + \int dy\sqrt{\frac{1-a^2y^2}{1-y^2}} + \int dz\sqrt{\frac{1-a^2z^2}{1-z^2}}$$
$$= a^2 v + \text{Const.}$$

Die Annahme:

$$\sqrt{\frac{1-a^2t^2}{1-t^2}} = vt$$

giebt:

$$t^4 - \frac{v^2+a^2}{v^2}t^2 + \frac{1}{v^2} = 0.$$

Sind $x^2$ und $y^2$ die Wurzeln dieser Gleichung, so folgt:

$$dx\sqrt{\frac{1-a^2x^2}{1-x^2}} + dy\sqrt{\frac{1-a^2y^2}{1-y^2}} = v(x\,dx + y\,dy) = \frac{v}{2}d(x^2+y^2) =$$
$$\frac{v}{2}d\frac{v^2+a^2}{v^2} = -\frac{a^2}{v^2}dv = a^2 d\frac{1}{v}.$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$\int dx \sqrt{\frac{1-a^2x^2}{1-x^2}} + \int dy \sqrt{\frac{1-a^2y^2}{1-y^2}} = \frac{a^2}{v} + \text{Const.}$$

Es ist $x^2+y^2 = \frac{v^2+a^2}{v^2}$, $x^2y^2 = \frac{1}{v^2}$. Durch Elimination von $v^2$ folgt hieraus $x^2+y^2 = 1+a^2x^2y^2$.

Eine grössere Anzahl von Beispielen, welche nicht hierhin gehören, hat *Bertrand* in seinem „Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. Calcul intégral" Paris 1870, p. 386) mitgetheilt. *Bertrand*, welcher die Arbeiten von *Talbot* unter dem Titel „Méthode de Talbot" als etwas Bemerkenswerthes zusammengestellt hat, findet sich dabei doch zu der Aeusserung veranlasst:

„L'inconvénient de cette méthode est évidement de faire connaître des théorèmes dont la forme plus ou moins curieuse ou intéressante semble produite par une sorte de hasard, qu'il est aisé néanmoins de diriger dans une certaine mesure."

Die obigen Sätze über Ellipsen- und Hyperbelbogen erinnern in ihrer Behandlung sehr an die schon früher erwähnte Abhandlung von *Euler*: „Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium" (Novi Comm. Ac. Petropol. T. VI).

Da hier nur die Abhandlungen erwähnt werden sollen, welche bis in die Zeit der ersten Publicationen von *Abel* und *Jacobi* fallen, bei denen also die neue Anschauungsweise sich noch nicht Bahn gebrochen, so bleibt nur noch eine Abhandlung übrig, welche zu bemerken ist. *Fagnano* scheint selbst auf die Theilung der Lemniscate das grösste Gewicht gelegt zu haben, mit Ausnahme der kurzen Andeutung in der Sectio septima der „Disquisitiones arithmeticae" (*Gauss*: Werke t. I p. 412—413) hat sich nur noch *Libri* mit diesem Gegenstande beschäftigt. Die betreffende Abhandlung von *Libri* findet sich in Crelle. Journal t. 10 p. 167—194 unter dem Titel: „Mémoire sur la résolution des équations algébriques dont les racines ont entre elles un rapport donné, et sur l'intégration des équations différentielles linéaires dont les intégrales particulières peuvent s'exprimer les unes par les autres". In einer Einleitung zu diesem Aufsatze bemerkt *Libri*, dass er seine Untersuchungen über die Theilung der Lemniscate vor Publication der Resultate von *Abel* unternommen habe. (*Abel*: Recherches sur les fonctions elliptiques. § VIII. Crelle. Journal t. 3. p. 160—169; Oeuvres t. I. p. 221—230). Es ist selbstverständlich, dass durch die Unkenntniss der elliptischen Functionen, die Resultate von *Libri* unvollständig bleiben mussten. Das Hauptverdienst der Abhandlung, ein Versuch,

einer Weiterführung der genialen Ideen von *Fagnano*, wird etwas vermindert durch die Praetension, mit welcher das ehemalige Mitglied der Academie von Paris seine Arbeit neben die von *Abel* stellte.

Die Fünftheilung der Lemniscate hängt nach *Fagnano* von der Lösung der Gleichungen ab:

$$u = \frac{2z\sqrt{1-z^4}}{1+z^4}, \quad z = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}.$$

Durch Elimination von $u$ findet *Libri* (l. c. p. 171) die Gleichung

$$(z^{16}+20z^{12}-26z^8+20z^4+1)^2$$
$$+16(z^{28}-11z^{24}+25z^{20}+37z^{16}-37z^{12}-25z^8+11z^4-1) = 0.$$

Durch algebraische Betrachtungen wird die vorstehende Gleichung auf folgende Form gebracht:

$$(z^8-27z^4+5)(z^8+6z^4-3)(z^{16}+52z^{12}-26z^8-12z^4+1) = 0.$$

*Libri* bemerkt, dass die Theilung des Quadranten der Lemniscate in $2^n+1$ Theile von der Lösung der folgenden Gleichungen abhängt:

$$z_1 = \frac{2z_2\sqrt{1-z_2^4}}{1+z_2^4}, \quad z_2 = \frac{2z_3\sqrt{1-z_3^4}}{1+z_3^4}, \ldots, \quad z_n = \frac{2z_1\sqrt{1-z_1^4}}{1+z_1^4}.$$

Die Form dieser Gleichungen hat *Libri* veranlasst allgemeinere Gleichungen zu behandeln. Es werden dabei Untersuchungen angestellt über die Form und die Werthe der Coefficienten einer algebraischen Gleichung um a priori erkennen zu können, ob zwischen den Wurzeln der Gleichung Relationen existiren, welche gestatten, die Gleichung in Factoren zu zerlegen. Uebrigens ist nur die Gleichung für die Theilung des Quadranten der Lemniscate in fünf gleiche Theile hergestellt. Weitere Untersuchungen über die Theilung der Lemniscate gehören nicht mehr im eigentlichen Sinne des Wortes in die Geometrie.

---

## Note VIII.

### Geometrische Anwendungen der elliptischen Integrale zweiter Gattung.

A. Sätze über confocale Kegelschnitte und die Lemniscate

*Graves, Mac Cullagh, Salmon, Hart, Chasles.*

In Beziehung auf zwei confocale Ellipsen existirt folgender Satz: Werden von einem Puncte einer Ellipse zwei Tangenten an eine confocale Ellipse gezogen, so ist der Ueberschuss der Tangenten über den Bogen, welcher zwischen ihren Contactpuncten liegt, constant.

Man findet einen geometrischen Beweis dieses Satzes in *Salmon*: A Treatise on Conic Sections. Third Ed. London 1855. Chapter XV. p. 297—298. Hierbei bemerkt *Salmon*:

„This beautiful theorem was discovered by Dr. Graves. See his Translation of Chasles Memoires on Cones and Spherical Conics p. 77. (Dublin 1841).

Nimmt man eine confocale Hyperbel zu einer Ellipse, so findet das Theorem statt:

Werden von einem Puncte einer Hyperbel zwei Tangenten an eine confocale Ellipse gezogen, so ist die Differenz der elliptischen Bogen, begränzt durch die Berührungspuncte der Tangenten und den zwischen liegenden Schnittpunct der Hyperbel, gleich der Differenz der Tangenten.

Dieser Satz findet sich ebenfalls bei *Salmon* geometrisch deducirt mit der Bemerkung:

„This extension of the proceeding theorem was discovered by Mr. Mac Cullagh.

Dublin Examination Papers 1841 p. 41. 1842 p. 68, 83. Proceedings of the royal society of Ireland. Vol. II p. 508.*)

Ein dritter Satz, welcher sich ebenfalls bei *Salmon* citirt findet, lautet:

Ist ein Polygon einem Kegelschnitte umschrieben, bewegen sich die Ecken des Polygons, mit Ausnahme einer derselben auf confocalen Kegelschnitten, so ist der Ort der letzten Ecke ebenfalls ein confocaler Kegelschnitt.

Einen geometrischen Beweis dieses Satzes findet man bei *Hart:* On geodesic lines traced on a surface of the second degree. (The Cambridge and Dublin mathematical Journal. t. IV p. 193—194). Das bemerkte Theorem wird dort als besonderer Fall eines allgemeinern Theorems aufgefasst. Bilden nämlich geodätische Tangenten an eine Krümmungslinie ein Polygon, bewegen sich die Ecken mit Ausnahme einer derselben auf Krümmungslinien, so findet dieses auch für die letzte Ecke statt.

Die Sätze von *Graves* und *Mac Cullagh* in unwesentlich verschiedenen Formen hatte *Chasles* einige Jahre nach ihrer Entdeckung unabhängig gefunden und publicirt nebst andern Sätzen unter dem Titel: Propriétés générales des arcs d'une section conique, dont la différence

*) Die bis hierhin angeführten Citate beruhn auf den Autoritäten von *Salmon* und *Chasles*. Weder die Uebersetzung von *Graves* noch die Dublin Examination Papers und Proceedings waren dem Verfasser zugänglich.

est rectifiable. (Comptes Rendus 1843. t. XVII p. 838—844). Zur Geschichte dieser Sätze vergleiche man: *Chasles:* Note sur quelques questions de priorité au sujet d'un Mémoire de Mr. Mac Cullagh. (Journal de Mathématiques t. XI p. 120—123 Année 1846). *Chasles:* Rapport sur les progrès de la géométrie. Paris 1870. p. 116—118.

Die Gleichungen zweier confocalen Ellipsen sind:

$$1)\quad \frac{x^2}{m^2+p^2}+\frac{y^2}{n^2+p^2}=1,\qquad 2)\quad \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1,$$

wo $m>n$ ist. Es sei $(\xi, \eta)$ ein Punct der Ellipse (1) und $(x, y)$ ein Punct der Ellipse 2). Soll die Verbindungslinie dieser Puncte die Ellipse 2) berühren, so ist:

$$3)\quad \frac{\xi x}{m^2}+\frac{\eta y}{n^2}=1.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit der Gleichung 2) giebt für $x$, $y$ je zwei Paare von Werthen, d. h. die Coordinaten der Berührungspuncte der Tangenten gelegt vom Puncte $(\xi, \eta)$ der Ellipse 1) an die confocale Ellipse 2). Wegen der Gleichungen 1) und 2) kann man setzen:

$$4)\quad x=m\sin\varphi,\ y=n\cos\varphi.$$

$$5)\quad \xi=\sin\psi\sqrt{m^2+p^2},\ \eta=\cos\psi\sqrt{n^2+p^2}.$$

Die Gleichung 3) wird dann:

$$6)\quad \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}}+\cos\varphi\cos\psi\sqrt{1+\frac{p^2}{n^2}}=1.$$

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$\sin\varphi\left[\left(1+\frac{p^2}{m^2}\right)\sin^2\psi+\left(1+\frac{p^2}{n^2}\right)\cos^2\psi\right]=\sin\psi\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2}}$$
$$+p\sqrt{1+\frac{p^2}{n^2}}\cdot\cos\psi\sqrt{\frac{\sin^2\psi}{m^2}+\frac{\cos^2\psi}{n^2}}.$$

Hält man diese Gleichung oder die Gleichung 6) mit dem Additionstheorem der elliptischen Integrale zusammen, so folgt für:

$$7)\quad \begin{cases} \dfrac{m^2-n^2}{m^2}=k^2,\quad \dfrac{p^2}{n^2}=\left(1+\dfrac{p^2}{n^2}\right)\sin^2\operatorname{am}a,\quad \dfrac{p}{n}=\operatorname{tang}\operatorname{am}a \\ \psi=\operatorname{am}u, \end{cases}$$

dass $\varphi$ einen der Werthe $\operatorname{am}(u\pm a)$ hat. Sind also $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ die Berührungspuncte, setzt man nach 7) $n=mk'$, so geben die Gleichungen 4):

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1}{m}=\sin\operatorname{am}(u+a),\quad \dfrac{x_2}{m}=\sin\operatorname{am}(u-a), \\ \dfrac{y_1}{m}=k'\cos\operatorname{am}(u+a),\quad \dfrac{y_2}{m}=k'\cos\operatorname{am}(u-a). \end{cases}$$

Die Coordinaten $\xi, \eta$ aus 5) lassen sich nach 7) auf folgende Art darstellen:

$$9) \quad \frac{\xi}{m} = \sin\operatorname{am} u \frac{\Delta\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a}, \quad \frac{\eta}{m} = k' \frac{\cos\operatorname{am} u}{\cos\operatorname{am} a}.$$

Aus 8) und 9) findet man ohne Schwierigkeit:

$$\frac{x_1 - \xi}{m} = \cos\operatorname{am}(u+a) \frac{\sin\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a} \Delta\operatorname{am} u,$$

$$\frac{y_1 - y}{m} = -k' \sin\operatorname{am}(u+a) \frac{\sin\operatorname{am} a}{\cos\operatorname{am} a} \Delta\operatorname{am} u.$$

Durch Vertauschung von $a$ mit $-a$ erhält man hieraus $x_2 - \xi$, $y_2 - \eta$. Man setze nun:

$$t_1 = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}, \quad t_2 = \sqrt{(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2},$$

so dass also $t_1$ und $t_2$ die Längen der Tangenten zwischen dem Puncte $(\xi, \eta)$ und den Contactpuncten $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ sind. Die obigen Formeln geben:

$$10) \quad \begin{cases} \frac{t_1}{m} = \operatorname{tang}\operatorname{am} a \, \Delta\operatorname{am} u \, \Delta\operatorname{am}(u+a), \\ \frac{t_2}{m} = \operatorname{tang}\operatorname{am} a \, \Delta\operatorname{am} u \, \Delta\operatorname{am}(u-a), \end{cases}$$

also:

$$11) \quad \frac{t_1 + t_2}{m} = 2 \operatorname{tang}\operatorname{am} a \frac{\Delta\operatorname{am} a \, \Delta^2\operatorname{am} u}{1 - k^2 \sin^2\operatorname{am} a \, \sin^2\operatorname{am} u}.$$

Für einen Punct der Ellipse 2) kann man allgemein setzen:

$$12) \quad \frac{x}{m} = \sin\operatorname{am} w, \quad \frac{y}{m} = k' \cos\operatorname{am} w.$$

Ist $s$ der Bogen zwischen den Puncten $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$, so geben die Gleichungen 8) und 12):

$$\frac{s}{m} = \int_{u-a}^{u+a} \Delta^2\operatorname{am} w \, dw,$$

d. i. nach § 26:

$$\frac{s}{m} = E[\operatorname{am}(u+a)] - E[\operatorname{am}(u-a)],$$

oder rechts $E(\operatorname{am} 2a)$ addirt und subtrahirt:

$$\frac{s}{m} = E(\operatorname{am} 2a) - \{E(\operatorname{am}[u-a]) + E(\operatorname{am} 2a) - E[\operatorname{am}(u+a)]\}.$$

Wendet man auf die drei letzten Terme rechts das Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung an, so folgt:

$$\frac{s}{m} = E(\operatorname{am} 2a) - k^2 \sin\operatorname{am} 2a \, \sin\operatorname{am}(u-a) \, \sin\operatorname{am}(u+a),$$

oder:

$$\frac{s}{m} = E(\mathrm{am}\,2a)$$

$$\frac{-2k^2 \sin \mathrm{am}\,a \cos \mathrm{am}\,a\, \Delta \mathrm{am}\,a}{1-k^2 \sin^4 \mathrm{am}\,a} \cdot \frac{\sin^2 \mathrm{am}\,u - \sin^2 \mathrm{am}\,a}{1-k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,a \sin^2 \mathrm{am}\,u}.$$

Die Differenz dieser Gleichung und der Gleichung 11) führt auf:

$$13) \quad \frac{s-(t_1+t_2)}{m} = E(\mathrm{am}\,2a) - 2 \tang \mathrm{am}\,a \frac{\Delta^3 \mathrm{am}\,a}{1-k^2 \sin^4 \mathrm{am}\,a}.$$

Nun ist auch nach dem Additionstheorem:

$$E(\mathrm{am}\,a)+E(\mathrm{am}\,a)-E(\mathrm{am}\,2a) = k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,a \sin \mathrm{am}\,2a = \frac{2k^2 \sin^3 \mathrm{am}\,a \cos \mathrm{am}\,a\, \Delta \mathrm{am}\,a}{1-k^2 \sin^4 \mathrm{am}\,a}.$$

Mittelst dieser Gleichung wird die Gleichung 13) einfacher:

$$\frac{s-(t_1+t_2)}{2m} = E(\mathrm{am}\,a) - \frac{\sin \mathrm{am}\,a\, \Delta \mathrm{am}\,a}{\cos \mathrm{am}\,a},$$

welche Gleichung den Satz von *Graves* in seiner einfachsten analytischen Form enthält.

Der Satz von *Mac Cullagh* lässt sich mit Hülfe des vorhergehenden Satzes behandeln, es ist indessen einfacher denselben direct herzuleiten. An Stelle der Gleichungen 1) und 2) nehme man die folgenden:

$$14) \quad \frac{x^2}{m^2-p^2} + \frac{y^2}{n^2-p^2} = 1, \qquad 15) \quad \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1,$$

wo $m > p > n$ ist. Man setze nun:

$$\frac{m^2-n^2}{m^2} = k^2, \quad p^2 = m^2 \cos^2 \mathrm{am}\,a + n^2 \sin^2 \mathrm{am}\,a.$$

Die Gleichungen 14) und 15) lassen sich dann schreiben:

$$16) \quad \frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\,a} - \frac{y^2}{\cos^2 \mathrm{am}\,a} = (mk)^2, \qquad 17) \quad x^2 + \frac{y^2}{k'^2} = m^2.$$

Ist $(\xi, \eta)$ ein Punct der Hyperbel 16), so kann man setzen:

$$18) \quad \frac{\xi}{m} = \sin \mathrm{am}\,a \frac{\Delta \mathrm{am}\,u}{\cos \mathrm{am}\,u}, \quad \frac{\eta}{m} = k' \frac{\cos \mathrm{am}\,a}{\cos \mathrm{am}\,u}.$$

Die Gleichung 17) ersetze man durch:

$$19) \quad \frac{x}{m} = \sin \mathrm{am}\,w, \quad \frac{y}{m} = k' \cos \mathrm{am}\,w.$$

Legt man vom Puncte $(\xi, \eta)$ der Hyperbel zwei Tangenten an die Ellipse, so ist für die Contactpuncte in den Gleichungen 19) $w$ durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\sin \mathrm{am}\,u \sin \mathrm{am}\,a\, \Delta \mathrm{am}\,w + \cos \mathrm{am}\,a \cos \mathrm{am}\,u = \cos \mathrm{am}\,w.$$

Nach Note V folgt hieraus $w = a \pm u$. Sind also $(x_1, y_1)$ und $(x_2, y_2)$ die Contactpuncte, so folgt nach 19):

$$20)\quad \begin{cases} \frac{x_1}{m} = \sin\mathrm{am}(a+u), & \frac{x_2}{m} = \sin\mathrm{am}(a-u), \\ \frac{y_1}{m} = k'\cos\mathrm{am}(a+u). & \frac{y_2}{m} = k'\cos\mathrm{am}(a-u). \end{cases}$$

Die Gleichungen 18) und 20) ergeben sich aus den Gleichungen 9) und 8) durch gegenseitige Vertauschung von $a$ und $u$, wobei das Zeichen von $x_2$ zu ändern ist. Haben $t_1$ und $t_2$ dieselben Bedeutungen wie vorhin, so geben die Gleichungen 10) durch die bemerkte Vertauschung unmittelbar:

$$\frac{t_1}{m} = \Delta\mathrm{am}a\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}(a+u), \quad \frac{t_2}{m} = \Delta\mathrm{am}a\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}(a-u).$$

Durch Subtraction folgt hieraus:

$$21)\quad \frac{t_2-t_1}{m} = \frac{2k^2\sin\mathrm{am}a\,\cos\mathrm{am}a\,\Delta\mathrm{am}a\,\sin^2\mathrm{am}u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}a\,\sin^2\mathrm{am}u}.$$

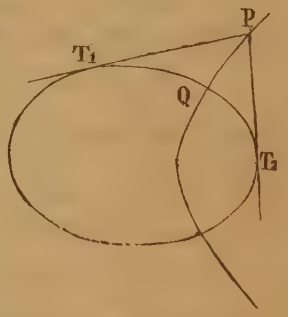
Für den Schnittpunct $(x_0, y_0)$ der Hyperbel mit der Ellipse geben die Gleichungen 16) und 17):

$$22)\quad \frac{x_0}{m} = \sin\mathrm{am}a, \quad \frac{y_0}{m} = k'\cos\mathrm{am}a.$$

In diesem Falle ist in den Gleichungen 19) $w = a$.

Es sei $P$ der Punct $(\xi, \eta)$, ferner $Q$ der Punct $(x_0, y_0)$. Man setze $PT_1 = t_1$ und $PT_2 = t_2$. Für die Bogen $QT_1$ und $QT_2$ der Ellipse hat man nach 20) und 22):

Fig. 10.




$$\frac{QT_1}{m} = \int_a^{a+u} \Delta^2\mathrm{am}w\,dw,$$

$$\frac{QT_2}{m} = \int_{a-u}^{a} \Delta^2\mathrm{am}w\,dw,$$

oder:

$$\frac{QT_1}{m} = E[\mathrm{am}(a+u)] - E(\mathrm{am}a) =$$

$$E(\mathrm{am}u) - \{E(\mathrm{am}a) + E(\mathrm{am}u) - E[\mathrm{am}(u+a)]\} =$$

$$E(\mathrm{am}u) - k^2\sin\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}(a+u).$$

$$\frac{QT_2}{m} = E(\mathrm{am}a) - E\mathrm{am}(a-u) =$$

$$E(\mathrm{am}u) - \{E[\mathrm{am}(a-u)] + E(\mathrm{am}u) - E(\mathrm{am}a)\} =$$

$$E(\mathrm{am}u) - k^2\sin\mathrm{am}a\,\sin\mathrm{am}u\,\sin\mathrm{am}(a-u).$$

Aus der Differenz dieser Gleichung folgt nach 21):

$$QT_2 - QT_1 = t_2 - t_1 \text{ d. i. } QT_2 - QT_1 = PT_2 - PT_1,$$

welche Gleichung das Theorem von Mac Cullagh enthält.

Mittelst der vorstehenden Entwickelungen lässt sich ohne Schwierigkeit der dritte der obigen Sätze darthun, welche Deduction hier der Kürze halber unterbleiben soll. Eine ähnliche Betrachtungsweise wie bei den Sätzen von *Graves* und *Mac Cullagh* lässt sich auf eine Anzahl von Sätzen anwenden, welche von *Chasles* herrühren, enthalten in der Abhandlung: „De quelques propriétés des arcs égaux de la lemniscate. (Comptes Rendus t. XXI p. 199—201. 1845. Rapport ctr. p. 119—120). Indem *Chasles* die Lemniscate als Ort der Fusspuncte der Perpendikel ansieht, gefällt vom Mittelpunct einer gleichseitigen Hyperbel auf ihre Tangenten, findet derselbe das Resultat, dass zwei Bogen der Hyperbel, deren Differenz rectificabel ist, zwei rectificabele Bogen der Lemniscate entsprechen.

## B. Die Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids.

*Legendre, Catalan, Plana, Jacobi, Lebesgue, Schlömilch, Malmstèn.*

Zur Berechnung der Oberfläche des dreiaxigen Ellipsoids, oder eines Theiles derselben, hat *Legendre* in dem Abschnitte „Détermination de l'aire de l'ellipsoïde" (Fonct. ell. t. I. p. 350 — 360) zwei verschiedene Methoden angewandt, welche später wiederholt Gegenstand mehr oder minder glücklicher Untersuchungen geworden sind. Theils besondere Schwierigkeiten, theils Vereinfachungen, welche der Ausdruck für die Oberfläche in Form eines Doppelintegrals darbietet, haben eine ziemliche Anzahl von Arbeiten hervorgerufen, von denen nur einige hier angeführt werden sollen, welche einiges Interesse darbieten. Weitere Betrachtungen über diesen Gegenstand enthalten ausführlichere Lehrbücher über Integralrechnung z. B. *Moigno:* Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. Tome 2. Paris 1844. (p. 274—280).

Es sei $a > b > c$. *Legendre* ersetzt die Gleichung:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

der Ellipsoidfläche durch:

$$x = a \sin\Theta \cos\varphi, \; y = b \sin\Theta \sin\varphi, \; z = c \cos\Theta.$$

Nimmt man zur Abkürzung:

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} = m^2, \quad \frac{b^2 - c^2}{b^2} = n^2, \quad p = m^2 \cos^2\varphi + n^2 \sin^2\varphi,$$

so hängt die Bestimmung der Ellipsoidfläche ab von dem Doppelintegrale:

$$2) \quad S = ab \int\int \sin\Theta \sqrt{1 - p\sin^2\Theta}\, d\Theta\, d\varphi.$$

Die Gesammtoberfläche $T$ hat zum Ausdruck:

$$3) \quad S = 8ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\Theta \sqrt{1 - p\sin^2\Theta}\, d\Theta\, d\varphi.$$

Die Integration nach $\Theta$ lässt sich in $S$ und $T$ leicht ausführen, es erscheint aber dann unter dem Integralzeichen ein Logarithmus. *Legendre* entwickelt desshalb in $T$ den Ausdruck $\sqrt{1 - p\sin^2\Theta}$ nach Potenzen von $p\sin^2\Theta$. Die Integration nach $\Theta$ lässt sich leicht ausführen. Ebenso bietet die folgende Integration nach $\varphi$, von weitläufigen Entwickelungen abgesehn, weiter keine Schwierigkeiten.

In einer kurzen Note „Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde" (Bulletins de l'Académie de Belgique. 1870 t. XXX. p. 97) ist *Catalan* durch eine einfache geometrische Betrachtung zu dem in 2) enthaltenen Ausdrucke von $S$ gelangt. Die Oberfläche des Ellipsoids werde durch zwei Systeme von Curven in Vierecke zerlegt. Das eine System besteht aus sogenannten Niveaulinien, d. i. parallelen Schnitten der Fläche zu einer festen Ebene, für welche im vorliegenden Falle die $xy$ Ebene genommen ist. Das zweite System besteht aus Linien des grössten Falls, d. h. orthogonalen Trajectorien der Niveaulinien. Für eine Niveaulinie sei $ds$, für eine Linie des grössten Falls sei $ds_1$ das Bogenelement im Puncte $(x, y, z)$. Bezeichnet man den Inhalt des unendlich kleinen Rechtecks zwischen zwei Curven beider Systeme durch $dS$, so ist:

$$4) \quad dS = ds \,.\, ds_1$$

Für eine Niveaulinie, deren Ebene der $xy$ Ebene parallel ist, hat man in 1) $z$ constant zu nehmen. Dann ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

oder auch:

$$5) \quad \frac{x}{a} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \sin\varphi.$$

Diese Gleichungen geben

$$6) \quad ds = \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \cdot \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Für eine Linie des grössten Falls findet die Differentialgleichung statt:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{}{a^2}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{}{b^2}}.$$

Da nun nach 1) allgemein:

$$\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} + \frac{zdz}{c^2} = 0,$$

so geben die beiden letzten Gleichungen:

$$\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{}{a^2}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{}{b^2}} = -\frac{\frac{zdz}{c^2}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

Hieraus folgt:

$$ds_1 = dz\sqrt{1 + \frac{\frac{z^2}{c^4}}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}},$$

d. i. nach 5):

$$ds_1 = dz \cdot \frac{\sqrt{\frac{z^2a^2b^2}{c^4} + \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Mittelst der vorstehenden Gleichung und der Gleichung 6) geht die Gleichung 4) über in:

$$dS = dz\,d\varphi \cdot \sqrt{\frac{z^2a^2b^2}{c^4} + \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)}.$$

Integrirt man nach $z$ und $\varphi$, setzt wieder $z = c\cos\Theta$, so erhält man die Gleichung 2).

Um das Integral $T$ in 3) direct behandeln zu können, hat *Plana* ein sehr ingenieuses Mittel angewandt in dem:

Mémoire sur l'expression analytique de la surface totale de l'ellipsoïde, dont les trois axes sont inégaux; et sur l'évaluation de la surface d'une voute symétrique à base rectangulaire, retranchée dans la moitié du même ellipsoide. (Crelle. J. t. 17 p. 345).

Statt des Integrals 3) nehme man das folgende, in welchem $t$ ein Parameter ist:

$$V = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin\Theta\sqrt{1 - pt^2\sin^2\Theta}\;d\Theta d\varphi.$$

Für $t = 1$ ist $V = S$. Dieses Integral differentiirt *Plana* nach $t$,

wodurch sich eine Differentialgleichung für $V$ ergiebt, deren Integration schliesslich für $t = 1$ das Doppelintegral $S$ in Form einfacher elliptischer Integrale giebt. Die weitere Ausführung möge hier unterbleiben, da ein ähnliches Resultat mit einfacheren Hülfsmitteln hergeleitet werden soll.

Die zweite von *Legendre* angewandte Methode besteht darin, die Ellipsoidfläche durch Krümmungslinien in Rechtecke zu zerlegen. Man kann dann allgemein einen bestimmten Theil der Fläche, in Form eines Vierecks, begränzt durch je zwei Krümmungslinien beider Systeme, durch elliptische Integrale ausdrücken. Der resultirende Ausdruck vereinfacht sich wesentlich, wenn das Viereck in eine Zone zwischen zwei Krümmungslinien derselben Art übergeht.

Bei den bisher erwähnten und der Mehrzahl der gebräuchlichen Methoden wird ein Theil der Ellipsoidfläche durch ein Doppelintegral ausgedrückt. Je nach der Begränzung bietet die Integration grössere oder geringere Schwierigkeit. Man kann die Begränzung so wählen, dass eine Integration unmittelbar sich leicht ausführen lässt. Es existirt eine Methode, den Punct einer Fläche in Function zweier Variabeln darzustellen, indem man die Neigung der Normalen des Punctes zu einer festen Geraden betrachtet und ferner den Winkel, welchen die Projection der Normalen auf eine Ebene, senkrecht zur festen Geraden, mit einer bestimmten Geraden der Ebene bildet. Der Werth dieser Methode der Bestimmung scheint zuerst von *Jacobi* besonders für die Ellipsoidfläche erkannt worden zu sein. Eine sehr glückliche Anwendung derselben findet man bei *Lebesgue*: Sur les arcs à différences rectifiables et les zones à différences planifiables. (Journal de Mathém. 1846. t. XI. p. 331—335). Eine ergänzende Note hierzu bildet: *Lebesgue*: Théorème sur les ellipsoïdes associés. (Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. 1861. T. II p. 247—252).

Es sei $u$ der Winkel, welchen die Normale im Puncte $(x, y, z)$ zur Ellipsoidfläche, repräsentirt durch die Gleichung 1), mit der Axe der $z$ bildet. Es ist dann:

$$7) \quad \pm\cos u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \text{ oder } \frac{z^2}{c^4}\sin^2 u = \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\cos^2 u.$$

Nimmt man $u$ constant, so ist durch die Gleichungen 1) und 7) auf der Fläche eine Curve bestimmt, längs welcher die Normale mit

der Axe der $z$ denselben Winkel $u$ bildet. Setzt man den Werth von $z^2$ aus 1) in die Gleichung 7), so folgt:

$$\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{\sin^2 u}{c^2} = \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)\cos^2 u,$$

oder:

$$8)\quad \left(\frac{1}{a^2}+\frac{\tang^2 u}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\tang^2 u}{c^2}\right)\frac{y^2}{b^2} = \frac{\tang^2 u}{c^2}.$$

Durch diese Gleichung ist die Projection der bemerkten Curve auf die Ebene der $x$ und $y$ bestimmt, welche Projection eine Ellipse ist. Bezeichnet man den Inhalt dieser Ellipse durch $\sigma$, so ist:

$$9)\quad \sigma = \pi ab\frac{\frac{\tang^2 u}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\tang^2 u}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\tang^2 u}{c^2}\right)}}.$$

Man projicire die beiden Curven der Fläche, längs welchen die Normalen mit der Axe der $z$ immer dieselben Winkel $u$ und $u+du$ bilden, auf die $xy$ Ebene. Die Inhaltsdifferenz der beiden Ellipsen ist dann $d\sigma$. Bezeichnet man durch $dC$ den Inhalt des Flächenstreifens, begränzt durch die beiden erwähnten Curven, so ist:

$$dC = \frac{d\sigma}{\cos u},$$

oder:

$$10)\quad C = \int\frac{d\sigma}{\cos u}.$$

Man rechne $u$ von dem Puncte an, für welchen $C$ verschwindet, d. i. dem Endpuncte der $z$-Axe. Durch $C$ werde der Inhalt des Flächenstücks (eine Art ellipsoidischer Calotte) bezeichnet, welchen eine Curve begränzt, längs welcher die Normalen mit der $z$-Axe denselben Winkel $\gamma$ bilden. Die Gleichung 10) giebt dann:

$$C = \int_0^\gamma\frac{d\sigma}{\cos u} = \int_0^\gamma\frac{d\sigma}{du}\frac{du}{\cos u}.$$

Durch partielle Integration folgt:

$$11)\quad C = \left(\frac{\sigma}{\cos u}\right)_0^\gamma - \int_0^\gamma\frac{\sigma\sin u}{\cos^2 u}du.$$

Nun ist identisch:

$$\frac{\sin u}{\cos^2 u} = \frac{\cos u}{2}\frac{d\operatorname{tang}^2 u}{du} = \frac{1}{2}\frac{\frac{d\operatorname{tang}^2 u}{du}}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 u}} =$$

$$\frac{c}{2}\frac{\frac{d}{du}\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}}{\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}}}.$$

In die Gleichung 11) substituire man für $\sigma$ den Ausdruck aus 9), wo dann im Terme ausserhalb des Integralzeichens $u = 0$ und $u = \gamma$ zu setzen ist. Man findet so:

$$\frac{C}{\pi abc} = \frac{\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\right)}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\gamma}\frac{\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}\,d\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2}\right)}}.$$

Setzt man im Integrale rechts $\frac{\operatorname{tang}^2 u}{c^2} = t$, so ist einfacher:

12) $$\frac{C}{\pi abc} = \frac{\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\sqrt{\frac{1}{c^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}\right)}}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\left(\frac{\operatorname{tang}\gamma}{c}\right)^2}\frac{tdt}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+t\right)\left(\frac{1}{b^2}+t\right)\left(\frac{1}{c^2}+t\right)}}.$$

Von dieser Gleichung lässt sich nach *Lebesgue* folgende geometrische Anwendung machen. Es seien $A$ und $B$ Areale der Ellipsoidfläche, begränzt durch Curven, längs welchen die Normalen mit den Axen der $x$ und $y$ respective die Winkel $\alpha$ und $\beta$ bilden. Es folgt dann $A$ aus $C$ in 12) durch Vertauschung von $\gamma$ mit $\alpha$ und von $c$ mit $a$, ebenso ergiebt sich $B$ durch Vertauschung von $\gamma$ mit $\beta$ und $c$ mit $b$. Nimmt man nun

13) $$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{b} = \frac{\operatorname{tang}\gamma}{c} = \frac{1}{m},$$

so fallen in den Differenzen $B - C$, $C - A$ und $A - B$ die Integrale heraus, man findet dann einfach, wenn

$$\frac{\pi abc}{m^2\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{m^2}\right)\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{m^2}\right)}} = M$$

gesetzt wird:

$$14)\quad B-C = \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)M,\ C-A = \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)M,$$
$$A-B = \left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)M.$$

Diese Gleichungen geben noch:

$$\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)A-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)B+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)C = 0.$$

Finden die Gleichungen 13) statt, so zeigen die Gleichungen 14), dass die Inhaltsdifferenzen zweier ellipsoidischer Calotten nach einem vielleicht etwas oberflächlichen Sprachgebrauche complanabel sind, wodurch nur die Abwesenheit elliptischer Integrale ausgedrückt wird. Das in der Gleichung 12) vorkommende Integral lässt sich leicht auf elliptische Integrale reduciren. Man setze:

$$15)\quad J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{m^2}} \frac{t\,dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+t\right)\left(\frac{1}{b^2}+t\right)\left(\frac{1}{c^2}+t\right)}}.$$

Für $t$ mache man die Substitution:

$$t = \left(\frac{\sin^2 v}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\cos^2 v},$$

und setze:

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{m^2} = \left(\dfrac{\sin^2\varphi}{b^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\dfrac{1}{\cos^2\varphi}, & \dfrac{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = k^2, \quad \dfrac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}} = k'^2, \\ \dfrac{b}{a} = \sin w, \quad \dfrac{c}{a} = \dfrac{k'\sin w}{\sqrt{1-k^2\sin^2 w}}. \end{cases}$$

Die Gleichung 15) wird dann:

$$J.\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}$$
$$= -\frac{1}{b}\int_w^{\varphi}\frac{dv}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}} + \left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\int_w^{\varphi}\frac{dv}{\cos^2 v\sqrt{1-k^2\sin^2 v}}.$$

Da nach 16):

$$\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{k'^2},$$

so findet man:

17) $$J=[\operatorname{tang}\varphi\,\Delta(\varphi)-\operatorname{tang}w\,\Delta(w)-E(\varphi)+E(w)]\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}$$

$$=\frac{c}{a\sqrt{a^2-c^2}}[F(\varphi)-F(w)].$$

Für die Berechnung der Flächenräume $A$, $B$, $C$ — wobei die Relation 13) nicht angenommen werden soll — hat man in 16) und 17):

$$\left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

einer der Quantitäten:

$$\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{a^2},\quad\frac{\operatorname{tang}^2\beta}{b^2},\quad\frac{\operatorname{tang}^2\gamma}{c^2}$$

gleich zu setzen. Nimmt man z. B.

$$\frac{\operatorname{tang}^2\alpha}{a^2}=\left(\frac{\sin^2\varphi}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

und setzt $A=S(\varphi)$, so ist:

18) $$\begin{cases}\dfrac{S(\varphi)}{\pi abc}\sqrt{\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}}=[\operatorname{tang}w\,\Delta(w)+E(\varphi)-E(w)]\left(\dfrac{1}{c^2}-\dfrac{1}{a^2}\right)\\ +\dfrac{F(\varphi)-F(w)}{a^2}-\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{c^2\,\Delta(\varphi)}.\end{cases}$$

Für $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ist $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ die halbe Ellipsoidfläche. Da der Ausdruck für $S(\varphi)$ elliptische Integrale erster und zweiter Gattung enthält, so lassen sich aus demselben mit Leichtigkeit durch Anwendung der Additionstheoreme Relationen zwischen ellipsoidischen Calotten für dieselbe Hauptaxe herstellen. Ist:

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\sigma),$$

so giebt die Gleichung 18) in Verbindung mit den Gleichungen 16):

$$\frac{S(\varphi)+S(\psi)-S(\sigma)}{\pi abc}\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}=[\operatorname{tang}w\,\Delta(w)-E(w)]\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

$$-\frac{F(w)}{a^2}+\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma$$

$$+\frac{1}{c^2}\left[\frac{\sin\sigma\cos\sigma}{\Delta(\sigma)}-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi)}-\frac{\sin\psi\cos\psi}{\Delta(\psi)}\right].$$

Das Theorem von *Lebesgue*, enthalten in den Gleichungen 13) und 14), ist lange nachher Gegenstand ähnlicher Untersuchungen geworden, worüber folgende Abhandlungen zu vergleichen sind.

*Schlömilch:* Ueber die Complanation der centrischen Flächen zweiter Ordnung. (Sitzungsberichte d. sächs. Gesellsch. d. Wissenschaft. 1862, Zeitschrift für Mathem. 1863, t. 8 p. 1—12, Journal de Mathém. Deuxième série . 1863, t. 8 p. 89—98).

*Malmstèn:* Ueber den Fagnano'schen Satz auf dem Ellipsoid. (Zeitsch. f. Mathem. 1863, t. 8. p. 306—309).

Die sämmtlichen Abhandlungen betrachten die gefundenen Resultate als eine stereometrische Erweiterung des Satzes von *Fagnano*, eine Anschauungsweise, die wohl nicht ganz zu rechtfertigen ist. Der Begriff eines Flächenraums hängt wesentlich von der Begränzung ab und kann in sofern ganz willkührlich gedeutet werden. Die Bogenlänge zwischen zwei Puncten hat einen ganz bestimmten Sinn. Der Satz von *Fagnano* kann nur auf eine Art auf Flächen übertragen werden, indem man Curven auf einer Fläche analog wie in der Ebene definirt, wenn an Stelle von geraden Linien auf der Fläche geodätische Linien treten.*)

---

## Note IX.

### Zwei Beispiele zur Reduction der elliptischen Integrale dritter Gattung mit complexen Parametern auf Integrale mit reellen Parametern nach der Methode von Legendre.

Die am Schluss von § 28 auf p. 183 angeführten Beispiele, welche *Legendre* zum Zweck seiner Reductionsmethode weiter ausgeführt hat, sollen im Folgenden, in ziemlich veränderter Darstellung reproducirt

---

*) Zu den Darstellungen des § 26 sind folgende Abhandlungen anzumerken, welche besonders die elliptischen Integrale zweiter Gattung auf eine Anzahl sehr interessanter Reihenentwickelungen angewandt enthalten.

*Meyer:* Entwickelung einiger elliptischen Functionen. Programm d. Vitzthumsch. Geschlechtsgymnasiums zu Dresden. 1847. 43pp in 8°. Dieser Aufsatz reproducirt in Crelle, Journ, t. 37 p. 273—304.

Weitere Fortsetzung dieser Untersuchungen von demselben Verfasser unter dem Titel: „Ueber rationale Verbindungen der elliptischen Transcendenten". (Borchardt. Journ. t. 56 p. 314—325).

Eine der ersten Anwendungen der Reihenentwickelung der elliptischen Integrale zweiter Gattung enthält die Abhandlung:

*Sohnke:* Motus corporum coelestium in medio resistente. (Crelle. Journ. t. 10 p. 23—40).

werden. Obgleich die algebraischen Rechnungen besondere Schwierigkeiten nicht darzubieten scheinen, können dieselben dennoch, ohne gehörige Vorsicht, auf ungemein weitläufige und beschwerliche Reductionen führen. Dieses tritt namentlich bei einer directen Anwendung der Gleichungen 25) auf p. 181 hervor.

Es sei:

$$1)\quad n = ke^{\alpha i},\ n' = ke^{-\alpha i},\ nn' = k^2,\ n+n' = 2k\cos\alpha.$$

Die Gleichung für $p$ (Gl. 23 p. 181) giebt dann:

$$2p(1+k\cos\alpha)+k'^2 = \pm(1+2k\cos\alpha+k^2),$$

hieraus folgt:

$$2)\quad p' = -1 \text{ und } p'' = k\frac{k+\cos\alpha}{1+k\cos\alpha}.$$

Die Gleichungen 20) auf p. 180 geben $mnn' = -p^2k^2$. Da nun nach 1) $nn' = k^2$, so ist $m = -p^2$, folglich:

$$3)\quad m' = -p'^2 \text{ und } m'' = -p''^2.$$

Die Gleichung für $q$ (Gl. 22 p. 181) nämlich:

$$-qk^2k'^2 = (k^2+n)(k^2+n')(k^2+m),$$

giebt, mit Rücksicht auf die Gleichungen 1), 2) und 3),:

$$4)\quad \begin{cases} q' = 1+2k\cos\alpha+k^2, \\ q'' = -\dfrac{(1+2k\cos\alpha+k^2)k^2\sin^2\alpha}{(1+k\cos\alpha)^2}. \end{cases}$$

Setzt man in der Gleichung:

$$5)\quad C = \frac{m^3+(2+p)m^2+(1+2p)k^2m+pk^2}{m(m-n)(m-n')}$$

$m = -p^2$, so wird dieselbe, $nn' = k^2$ gesetzt,:

$$6)\quad C = \frac{(1+p)[(1-2p)k^2+(2-p)p^3]}{-p[p^4+p^2(n+n')+k^2]}.$$

Für $p = p'$ ist nach 2) $1+p' = 0$, also nach 6) $C' = 0$. Aus der zweiten Gleichung 2) folgt:

$$k\cos\alpha = \frac{p''-k^2}{1-p''}.$$

Setzt man in die Gleichung 6) $p = p''$ und $n+n' = 2\dfrac{p''-k^2}{1-p''}$, so folgt:

$$7)\quad C'' = 1-\frac{1}{p''} = -\frac{k'^2}{k(k+\cos\alpha)}.$$

In Folge der Gleichungen 28) auf p. 182 ist:

$$8)\quad \begin{cases} A+B = 1-\dfrac{1}{p}-C, \\ An+Bn' = 2+p+m+n+n'-Cm. \end{cases}$$

Nimmt man zuerst $p = p' = -1$, also $C' = 0$, $m' = -1$, so geben die Gleichungen 8):

$$A'+B' = 2, \quad A'n+B'n' = n+n',$$

d. i.

$$A' = B' = 1.$$

Für $p = p''$, $m = m''$ und $C = C''$ findet man mittelst der Gleichungen 1), 2) und 7) aus 8):

$$A''+B'' = 0, \quad A''n+B''n' = 2+n+n',$$

oder:

$$A'' = -B'' = \frac{1+k\cos\alpha}{ik\sin\alpha}.$$

Mit Rücksicht auf die vorstehenden Entwickelungen geben die Gleichungen:

$$9) \quad \begin{cases} t = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{1+p\sin^2\varphi}\dfrac{1}{\Delta}, \\ \dfrac{1}{1+qt^2}\dfrac{dt}{d\varphi} = \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{A}{1+n\sin^2\varphi}+\dfrac{B}{1+n'\sin^2\varphi}+\dfrac{C}{1+m\sin^2\varphi}\right), \end{cases}$$

die folgenden Relationen:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2k\cos\alpha+k^2}}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1+2k\cos\alpha+k^2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right) =$$
$$-F(\varphi)+\Pi(ke^{\alpha i},\ \varphi)+\Pi(ke^{-\alpha i},\ \varphi).$$
$$\frac{1}{2\sqrt{1+2k\cos\alpha+k^2}}\log\frac{1+\Omega}{1-\Omega} = \frac{\sin\alpha}{k+\cos\alpha}F(\varphi)$$
$$+\frac{1}{i}\left[\Pi(ke^{\alpha i},\ \varphi)-\Pi(ke^{-\alpha i},\ \varphi)\right]$$
$$-\frac{k'^2\sin\alpha}{(k+\cos\alpha)(1+k\cos\alpha)}\Pi\left[-k^2\left(\frac{k+\cos\alpha}{1+k\cos\alpha}\right)^2,\ \varphi\right],$$
$$\Omega = \frac{k\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi}{1+k\cos\alpha+k(k+\cos\alpha)\sin^2\varphi}\cdot\frac{\sqrt{1+2k\cos\alpha+k^2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Für den Fall, dass $p = 0$, also auch $m = 0$, lassen sich die Gleichungen 9) leicht transformiren, es scheint indessen einfacher zu sein sich der folgenden directen Gleichungen zu bedienen, welche mit den auf pag. 178 aufgestellten Relationen zusammenfallen.

$$9) \quad \begin{cases} t = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}, \quad qk'^2 = -(k^2+n)(k^2+n'), \\ \dfrac{1}{1+qt^2}\dfrac{dt}{d\varphi} = \\ \dfrac{1}{\Delta}\left[\dfrac{k^2}{nn'}+\dfrac{n^2+2n+k^2}{n(n-n')}\dfrac{1}{1+n\sin^2\varphi}-\dfrac{n'^2+2n'+k^2}{n'(n-n')}\dfrac{1}{1+n'\sin^2\varphi}\right]. \end{cases}$$

Nimmt man:

10) $n+1 = k'e^{\alpha i}$, $n'+1 = k'e^{-\alpha i}$, $n+n'+2 = 2k'\cos\alpha$,

so sind die beiden Werthe von $p$ bestimmt durch:

$$2p\frac{1-k'\cos\alpha}{1-2k'\cos\alpha+k'^2}+1 = \pm 1.$$

Es ist also:

11) $p' = 0$ und $p'' = -\dfrac{1-2k'\cos\alpha+k'^2}{1-k'\cos\alpha}$.

Für die Werthe von $n$ und $n'$ aus 10) erhält man aus den Gleichungen 9) ohne Schwierigkeit durch Integration:

$$\frac{1}{2\sqrt{1-2k'\cos\alpha+k'^2}}\log\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-2k'\cos\alpha+k'^2}}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}-\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-2k'\cos\alpha+k'^2}}$$

$$= \frac{k^2}{1-2k'\cos\alpha+k'^2}F(\varphi)+\frac{k'e^{\alpha i}}{k'e^{\alpha i}-1}\Pi(k'e^{\alpha i}-1,\ \varphi)$$

$$+\frac{k'e^{-\alpha i}}{k'e^{-\alpha i}-1}\Pi(k'e^{-\alpha i}-1,\ \varphi).$$

Aus der zweiten Gleichung 11) folgt:

$$k'\cos\alpha = \frac{p''+1+k'^2}{p''+2}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den Gleichungen 10) giebt:

12) $n+n' = \dfrac{-2k^2}{p''+2}$, $nn' = \dfrac{-p''k^2}{p''+2}$.

Die Gleichung $mnn' = -p^2k^2$ giebt in diesem Falle für $p = p''$:

13) $m'' = p''(2+p'') = -k^2\dfrac{1-2k'\cos\alpha+k'^2}{(1-k'\cos\alpha)^2}$.

Für $q''$ ergiebt sich folgender Werth:

14) $q'' = \dfrac{1-2k'\cos\alpha+k'^2}{(1-k'\cos\alpha)^2}k'^2\sin^2\alpha$.

In die Gleichung 5) setze man $p = p''$, $m = m''$ und für $n+n'$, $nn'$, $m''$ ihre Werthe aus 12) und 13), es folgt dann für $C = C''$:

15) $C'' = \dfrac{1+p''}{p''} = \dfrac{k'^2-k'\cos\alpha}{1-2k'\cos\alpha+k'^2}$.

Die Gleichungen 8) geben:

$$A''+B'' = 1-\frac{1}{p''}-C'',$$

$$A''n+B''n' = 2+p''+m''+n+n'-C''m'',$$

d i. nach 11), 12), 13) und 15):

$$A''+B'' = -\frac{2}{p''} = 2\frac{1-k'\cos\alpha}{1-2k'\cos\alpha+k'^2},$$

$$A''n+B''n' = -\frac{2k^2}{p''+2} = -2(1-k'\cos\alpha),$$

folglich:

$$A'' = -\frac{1-k'\cos\alpha}{1-2k'\cos\alpha+k'^2}\,\frac{k'-e^{\alpha i}}{i\sin\alpha},$$

$$B'' = \frac{1-k'\cos\alpha}{1-2k'\cos\alpha+k'^2}\,\frac{k'-e^{-\alpha i}}{i\sin\alpha}.$$

Mittelst der vorstehenden Formeln ergiebt sich aus 9) durch Integration folgende Relation zwischen elliptischen Integralen:

$$\frac{\sqrt{1-2k'\cos\alpha+k'^2}}{k'}\operatorname{arc\,tang}\frac{k'\sin\alpha\,\sin\varphi\,\cos\varphi\sqrt{1-2k'\cos\alpha+k'^2}}{1-k'\cos\alpha-(1-2k'\cos\alpha+k'^2)\sin^2\varphi}\,\frac{1}{\Delta}$$
$$= -\sin\alpha\,F(\varphi)+\frac{k'(k'-\cos\alpha)\sin\alpha}{1-k'\cos\alpha}\,\Pi\left(-k^2\frac{1-2k'\cos\alpha+k'^2}{(1+k'\cos\alpha)^2},\ \varphi\right)$$
$$-\frac{k'-e^{\alpha i}}{i}\,\Pi(k'e^{\alpha i}-1,\ \varphi)+\frac{k'-e^{-\alpha i}}{i}\,\Pi(k'e^{-\alpha i}-1,\ \varphi).$$

Im Vorhergehenden sind die von *Legendre* gegebenen Resultate so modificirt, dass sich unmittelbar die Gleichungen für

$$\Pi(ke^{\pm\alpha i},\ \varphi) \text{ und } \Pi(k'e^{\pm\alpha i}-1,\ \varphi)$$

aufstellen lassen.

---

## Note X.

### Die Transformationen erster Ordnung von Abel. Die Transformationen dritter und fünfter Ordnung nach Jacobi.

Mit der Integration der Differentialgleichung:

$$1)\quad \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

für den Fall dass:

$$2)\quad y = \frac{\alpha+\beta x}{\alpha'+\beta' x}$$

hat sich Abel wiederholt beschäftigt und davon die sechs Lösungen gegeben.*)

Die Gleichungen 1) und 2) geben:

---

*) Astron. Nachr. Nr. 138, Crelle. Journ. t. 3 p. 395 und t. 4 p. 312; Oeuvres t. 1 p. 257, 310 und 371.

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\sqrt{(\alpha'^2-\alpha^2)(\alpha'^2-l^2\alpha^2)}}$$

und:

$$3) \quad \left(1+\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}x\right)\left(1+\frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}x\right)\left(1+\frac{\beta'-\beta l}{\alpha'-\alpha l}x\right)\left(1+\frac{\beta'+\beta l}{\alpha'+\alpha l}x\right) = (1-x^2)(1-k^2x^2).$$

Der Werth von $M$ lässt sich am einfachsten in jedem besondern Falle direct finden. Die Gleichungen 3) geben folgende Annahmen:

$$4) \quad \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}+\frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}=0, \quad \frac{\beta'-\beta l}{\alpha'-\alpha l}+\frac{\beta'+\beta l}{\alpha'+\alpha l}=0.$$

$$5) \quad \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}+\frac{\beta'-\beta l}{\alpha'-\alpha l}=0, \quad \frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}+\frac{\beta'+\beta l}{\alpha'+\alpha l}=0.$$

$$6) \quad \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}+\frac{\beta'+\beta l}{\alpha'+\alpha l}=0, \quad \frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}+\frac{\beta'-\beta l}{\alpha'-\alpha l}=0.$$

Die Gleichungen 6) folgen unmittelbar aus den Gleichungen 5) durch Vertauschung von $l$ mit $-l$.

Für die Gleichungen 4) ist:

$$7) \quad \frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}+\frac{\beta'^2-\beta^2l^2}{\alpha'^2-\alpha^2l^2} = -(1+k^2), \quad \frac{(\beta'^2-\beta^2)(\beta'^2-\beta^2l^2)}{(\alpha'^2-\alpha^2)(\alpha'^2-\alpha^2l^2)} = k^2.$$

Aus den Gleichungen 4) findet man $\alpha'\beta'-\alpha\beta=0$ und $\alpha'\beta'-\alpha\beta l^2=0$; da nun $l$ von der Einheit verschieden ist, so ist $\alpha'\beta'=0$ und $\alpha\beta=0$. Da $y$ in 2) nicht constant sein kann, so ist $\alpha=0$, $\beta'=0$, oder $\alpha'=0$, $\beta=0$. Für $\alpha=0$, $\beta'=0$ geben die Gleichungen 7):

$$\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2(1+l^2) = 1+k^2, \quad \left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^4 l^2 = k^2,$$

hieraus:

$$\left[1-\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2 l^2\right] = 0,$$

also:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2 = 1, \; l^2 = k^2; \text{ oder } \left(\frac{\beta}{\alpha'}\right)^2 l^2 = 1, \; l^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Für $\alpha'=0$, $\beta=0$ gehn die Gleichungen 7) über in:

$$\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^2 \frac{1+l^2}{l^2} = 1+k^2, \quad \left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^4 \frac{1}{l^2} = k^2.$$

Hieraus folgt leicht, wie vorhin,:

$$\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^2 = l^2, \; l^2 = k^2; \text{ oder } \left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^2 = 1, \; l^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Durch Zusammenstellung des Vorhergehenden erhält man ohne Schwierigkeit, für den Fall, dass die Gleichungen 4) stattfinden:

I. $l = \pm k, \quad y = \pm x, \quad y = \frac{\pm 1}{kx}, \quad \frac{1}{M} = \pm 1.$

II. $l = \frac{\pm 1}{k}, \quad y = \pm \frac{x}{k}, \quad y = \frac{\pm 1}{x}, \quad \frac{1}{M} = \pm k.$

Für die Gleichungen 5) ist:

8) $$\begin{cases} \frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\frac{\beta'-\beta l}{\alpha'-\alpha l} + \frac{\beta'+\beta}{\alpha'+\alpha}\frac{\beta'+\beta l}{\alpha'+\alpha l} = -(1+k^2), \\ \frac{\beta'^2-\beta^2}{\alpha'^2-\alpha^2}\frac{\beta'^2-\beta^2 l^2}{\alpha'^2-\alpha^2 l^2} = k^2. \end{cases}$$

Entwickelt man die Gleichungen 5), bildet darauf die Summe und Differenz der so erhaltenen Gleichungen, so ist:

$$\alpha'\beta' + \alpha\beta l = 0, \quad \alpha\beta' + \alpha'\beta = 0,$$

oder:

9) $$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{-\beta'}{\beta} = \frac{-\beta l}{\beta'}.$$

Setzt man hieraus die Werthe von $\alpha'$ und $l$ in die Gleichungen 8), so gehn dieselben über in:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\beta'+\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta'+\beta}{\beta'-\beta}\right)^2\right] = 1+k^2, \quad \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 = k^2.$$

Hieraus folgt:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \pm k, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{\pm k},$$

$$\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)^2 \mp k\right]\left[\left(\frac{\beta'-\beta}{\alpha'-\alpha}\right)^2 \mp \frac{1}{k}\right] = 0.$$

Stellt man diese Gleichungen mit den Gleichungen 9) und 2) zusammen, so ergeben sich die folgenden Resultate:

III. $$l = \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}}, \quad 2M = \pm i(1+\sqrt{k})^2.$$

IV. $$l = \pm\left(\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\right)^2, \quad y = \pm\left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)\frac{1\pm x\sqrt{k}}{1\mp x\sqrt{k}}, \quad 2M = \pm i(1-\sqrt{k})^2.$$

V. $$l = \pm\left(\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\right)^2, \quad y = \pm\frac{1+\sqrt{-k}}{1-\sqrt{-k}}\frac{1\pm x\sqrt{-k}}{1\mp x\sqrt{-k}},$$

$$2M = \pm i(1+\sqrt{-k})^2.$$

VI. $$l = \pm\left(\frac{1+\sqrt{-k}}{1-\sqrt{-k}}\right)^2, \quad y = \pm\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\frac{1\pm x\sqrt{-k}}{1\mp x\sqrt{-k}},$$

$$2M = \pm i(1-\sqrt{-k})^2.$$

Zu denselben Gleichungen führen die Annahmen 6). Die Substitution 2) giebt nach dem Vorhergehenden für $l^2$ sechs verschiedene

Werthe. Zu bemerken ist, dass *Abel* diese Transformationen erster Ordnung mit der allgemeinen Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung combinirt hat, wodurch der Grad derselben ungeändert bleibt und hierdurch zu dem nicht richtigen Schlusse verleitet wurde, dass jeder Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung $6n+6$ Moduli entsprechen. Dieser Umstand ist schon von *Legendre* in einem Briefe an *Abel* (Oeuv. t. 1 p. IX) bemerkt worden.

Als Anwendung der in § 35 aufgestellten algebraischen Principien der Transformation mögen die beiden einfachsten Fälle hier nach dem Vorgange von *Jacobi* direct behandelt werden. Die Gleichungen 26), 28), 29) und 37) von § 35 geben:

$$10)\quad y\sqrt{lk^{2m-1}} = x\frac{b_m+b_{m-1}k^2x^2+..+k^{2m}x^{2m}}{1+b_1x^2+b_2x^4+..+b_mx^{2m}}.$$

$$11)\quad \begin{cases} 1+b_1x^2+b_2x^4+..+b_mx^{2m} \\ +x\dfrac{b_m+b_{m-1}k^2x^2+b_{m-2}k^4x^4+...+b_1k^{2m-2}x^{2m-2}+k^{2m}x^{2m}}{\sqrt{lk^{2m-1}}} \\ = (1+x)(1+\alpha_1x+\alpha_2x^2+..+\alpha_mx^m)^2. \end{cases}$$

$$12)\quad \frac{1}{M} = \frac{b_m}{\sqrt{lk^{2m-1}}}.$$

Für die Transformation dritter Ordnung ist $m = 1$. Die Gleichung 11) wird dann, $\alpha_1 = \alpha$ gesetzt,:

$$13)\quad 1+b_1x^2+x\frac{b_1+k^2x^2}{\sqrt{kl}} = (1+x)(1+\alpha x)^2.$$

Nimmt man zur Vereinfachung:

$$14)\quad \sqrt[4]{k} = u,\ \sqrt[4]{l} = v,$$

so giebt die Gleichung 13):

$$\frac{b_1}{(uv)^2} = 1+2\alpha,\ b_1 = 2\alpha+\alpha^2,\ \frac{u^6}{v^2} = \alpha^2.$$

Setzt man aus der dritten Gleichung $\alpha = \dfrac{u^3}{v}$ in die beiden ersten Gleichungen, so werden dieselben:

$$15)\quad b_1 = (v+2u^3)u^2v,\ b_1 = \frac{2v+u^3}{v^2}u^3.$$

Die beiden Werthe von $b_1$ geben:

$$16)\quad u^4-v^4+2uv(1-u^2v^2) = 0,$$

durch welche Gleichung die Relation zwischen $u$ und $v$ bestimmt ist. Durch die Gleichungen 15) und 16) sind $b_1$ und $M$ in 10) und 12) bestimmt.

Für die Transformation fünfter Ordnung setze man in 11) $m = 2$, ferner für $k$ und $l$ ihre Werthe aus 14). Nimmt man zur Vereinfachung $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, so wird die Gleichung 11):

$$1+b_1x^2+b_2x^4+x\frac{b_2+b_1u^8x^2+u^{16}x^4}{v^2u^6} = (1+x)(1+\alpha x+\beta x^2)^2.$$

Hieraus folgt:

$$17)\quad \begin{cases} b_1 = \alpha^2+2(\alpha+\beta), & \dfrac{u^2b_1}{v^2} = 2\alpha\beta+2\beta+\alpha^2, \\ b_2 = 2\alpha\beta+\beta^2, & \dfrac{b_2}{v^2u^6} = 2\alpha+1. \end{cases}$$

$$\frac{u^{10}}{v^2} = \beta^2.$$

Man nehme:

$$18)\quad \beta = \frac{u^5}{v}.$$

Die doppelten Werthe von $b_1$ und $b_2$ aus 17) geben, wenn der Werth von $\beta$ aus 18) eingesetzt wird,:

$$19)\quad \begin{cases} (u^2-v^2)\,\alpha^2+2u^2(1-u^3v)\,\alpha+2(u^2-v^2)\dfrac{u^5}{v} = 0, \\ 2(1-uv^3)\,\alpha+(u^4-v^4)\dfrac{u}{v} = 0. \end{cases}$$

Die erste Gleichung werde mit $v^2+u^2$, die zweite mit $2u^4$ multiplicirt. Die Differenz der so erhaltenen Gleichungen durch $(u^2-v^2)\alpha$ dividirt giebt:

$$20)\quad (u^2+v^2)\,\alpha = 2u^2(1+u^3v).$$

Aus dieser Gleichung und der zweiten Gleichung 19) folgt durch Elimination von $\alpha$:

$$(u^4-v^4)(u^2+v^2)+4uv(1+u^3v)(1-uv^3) = 0,$$

oder:

$$21)\quad u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4) = 0.$$

Die Gleichung 12) giebt für $m = 2$, $k = u^4$, $l = v^4$ und Substitution des Werthes von $b_2$ aus der letzten Gleichung 17):

$$\frac{1}{M} = 2\alpha+1.$$

Nimmt man hierin den Werth von $\alpha$ aus der zweiten Gleichung 19), so ist:

$$\frac{1}{M} = \frac{b_2}{v^2u^6} = \frac{v-u^5}{v(1-uv^3)}.$$

Diese Entwickelungen in etwas anderer Form, hat zuerst *Jacobi* in Nr. 123 der „Astron. Nachricht." aufgestellt und später auf pag. 23—28 der „Fundamenta" weiter ausgeführt. Ausführliche Untersuchungen über die Transformationen dritter und fünfter Ordnung findet man im: „Premier Suppl." (p. 67—87) der „Théorie d. f. e." von *Legendre*. Speciell über die Transformation dritter Ordnung vergleiche

man einen Brief von *Hermite* an *Borchardt* (Journ. t. 60 p. 304) und: *Cayley*: Sur la transformation cubique d'une fonction elliptique. (Compt. Rend. 1867 t. LIV p. 560—563). Eine sehr einfache Untersuchung nach Analogie der „Fundamenta" enthält der sehr gute, kurze Aufsatz von *Guetzlaff*: Aequatio modularis pro transformatione functionum ellipticarum septimi ordinis. (Crelle. Journ. t. 12 p. 173—177).

---

## Note XI.

### Die Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung nach Legendre.

In dem „Premier Supplément" seines grossen Werks hat *Legendre* p. 59—63 die Transformationsgleichungen, welche dem Uebergange von $q$ und $q^n$ der Theta-Functionen entsprechen, auf die Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung angewandt. Das Folgende enthält eine kurze Darstellung der mit vielem Geschick durchgeführten Rechnung.

In der ersten Gleichung 30) von § 37 (p. 255) werde $x = \sin\varphi$, $y = \sin\psi$ gesetzt. Es ist dann:

$$1)\quad \sin\psi = \frac{\sin\varphi}{M} \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \dfrac{\sin^2\varphi}{\sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2rK}{n}}}{1 - k^2 \sin^2\varphi \sin^2 \operatorname{am} \dfrac{2rK}{n}}.$$

Nach der Bezeichnung von *Legendre* genügen $\varphi$ und $\psi$ der Gleichung:

$$F(\psi, l) = \frac{1}{M} F(\varphi, k),$$

oder:

$$2)\quad F(\varphi, k) = M\, F(\psi, l),$$

wo $M$ und $l$ durch die Gleichungen 27) auf pag. 254 bestimmt sind. Die directe Substitution des Werthes von $\sin\psi$ aus 1) in $E(\psi, l)$ führt zu grossen Weitläufigkeiten. Um diesem Uebelstande zu entgehn differentiirt *Legendre* die Gleichung 2) in Beziehung auf $k$, wobei dann $E(\psi, l)$ zum Vorschein kommt.

In Folge der Gleichung 19) von § 47 ist allgemein für jede Transformation $n^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$3)\quad \frac{1}{M^2} = n \frac{kk'^2}{ll'^2} \frac{dl}{dk}.$$

Unter Zuziehung der Gleichung 3) von § 27 werde die Gleichung 2) nach $k$ differentiirt. Es sind $l$ und $M$ nur von $k$ abhängig, in Folge der Gleichung 1) ist $\psi$ Function von $k$ und $\varphi$. Hierdurch folgt:

$$4)\quad \frac{E(\varphi,k)}{kk'^2}-\frac{F(\varphi,k)}{k}-\frac{k\sin\varphi\cos\varphi}{k'^2\Delta(\varphi,k)}=$$
$$\left[\frac{E(\psi,l)}{ll'^2}-\frac{F(\psi,l)}{l}-\frac{l\sin\psi\cos\psi}{l'^2\Delta(\psi,l)}\right]M\frac{dl}{dk}$$
$$+F(\psi,l)\frac{dM}{dk}+M\frac{dF(\psi,l)}{d\psi}\frac{d\psi}{dk}.$$

Man setze in die vorstehende Gleichung für $\frac{dl}{dk}$ seinen Werth aus 3), ferner

$$\frac{dF(\psi,l)}{d\psi}=\frac{1}{\Delta(\psi,l)}$$

und aus 2) $F(\varphi,k)=MF(\psi,l)$. Aus der Gleichung 4) lässt sich dann folgende Gleichung ableiten:

$$5)\quad E(\varphi,k)=\frac{E(\psi,l)}{nM}+\left(Mk'^2-\frac{l'^2}{nM}+kk'^2\frac{dM}{dk}\right)F(\psi,l)$$
$$+\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(\varphi,k)}-\frac{l^2\sin\psi\cos\psi}{M\Delta(\psi,l)}+\frac{Mkk'^2}{\Delta(\psi,l)}\frac{d\psi}{dk}.$$

Wegen der Allgemeinheit der Gleichung 3) gilt die vorstehende Gleichung auch für die Transformationsgleichungen von § 39. Die vollständige Ausführung der rechten Seite der Gleichung 5) ist von keinem besonderen Interesse. Nur in dem Falle, dass $\varphi=\frac{\pi}{2}$, also $\psi=\frac{n\pi}{2}$*) verschwindet in 5) auf der rechten Seite der algebraische Theil. In diesem Falle ist einfacher:

$$6)\quad E\left(\frac{\pi}{2},k\right)=\frac{1}{M}E\left(\frac{\pi}{2},l\right)+\left(Mk'^2-\frac{l'^2}{nM}+kk'^2\frac{dM}{dk}\right)F\left(\frac{\pi}{2},l\right).$$

Legt man die Gleichung 1) zu Grunde, so ist:

$$\frac{L'}{L}=n\frac{K'}{K}.$$

Nimmt man $l=k'$, also $L=K'$, $L'=K$, so folgt:

$$7)\quad \left(\frac{K'}{K}\right)^2=\frac{1}{n}.$$

---

*) Nach § 37 ist (pag. 256) $\frac{1}{M}=\frac{nL}{K}$, die Gleichung 2) lässt sich also schreiben $nL\,F(\varphi,k)=K\,F(\psi,l)$, woraus $\psi=\frac{n\pi}{2}$ für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ folgt.

Lässt sich $k$ durch diese Gleichung bestimmen, so geht die Gleichung 6) über in:

$$E = \frac{E'}{M} + \left( Mk'^2 - \frac{k^2}{nM} + kk'^2 \frac{dM}{dk} \right) nK'.$$

Durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit der in § 27 gefundenen allgemeinen Relation:

$$\frac{\pi}{2} = KE' + K'E - KK',$$

folgt, dass $E$ und $E'$ sich durch $K$ und $K'$ ausdrücken lassen, wenn die Gleichung 7) für ein ganzzahliges $n$ stattfindet.

Durch Betrachtung besonderer Integrale hatte schon *Legendre* dieses Resultat für den speciellen Fall $k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, $k'^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$ gefunden, dann ist $K = \sqrt{3}\, K'$. (Fonct. ell. t. I pag. 57—60).*)

---

# Note XII.

## Entwickelung einiger elliptischen Functionen in Reihen nach Hermite.

Unter dem Titel: „Sur la théorie des fonctions elliptiques“ (Compt. Rend. 1863 t. LVII p. 613—618, 993—1000, Journ. de Math. Année 1864 2de sér. t. IX p. 145—158) hat *Hermite* die Transformationen zweiter Ordnung in einer sehr ingenieusen Weise zu Entwickelungen angewandt, deren Deduction, wie die meisten Arbeiten dieses eminenten Geometers, sich durch grosse Eleganz auszeichnet.

In Folge der zweiten Gleichung 15) von § 43 ist:

$$\cos \operatorname{am}\left[ (k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'} \right] = \frac{1 - k(k+ik') \sin^2 \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}.$$

Wird $i$ mit $-i$ vertauscht, so folgt:

$$\cos \operatorname{am}\left[ (k-ik')u, \frac{k+ik'}{k-ik'} \right] = \frac{1 - k(k-ik') \sin^2 \operatorname{am} u}{\cos \operatorname{am} u}.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man leicht:

$$(k+ik') \cos \operatorname{am}\left[ (k-ik')u, \frac{k+ik'}{k-ik'} \right]$$
$$+ (k-ik') \cos \operatorname{am}\left[ (k+ik')u, \frac{k-ik'}{k+ik'} \right] = 2k \cos \operatorname{am} u,$$

*) Untersuchungen ähnlicher Art findet man bei Meissel: Bemerkungen über die Reduction der vollen elliptischen Integrale zweiter Gattung auf die vollen elliptischen Integrale erster Gattung für denselben Modul (Archiv für Mathematik. Theil 56 p. 337—348).

oder $k = \cos\alpha$ gesetzt,:

1) $e^{\alpha i}\cos\mathrm{am}(ue^{-\alpha i},\ e^{2\alpha i}) + e^{-\alpha i}\cos\mathrm{am}(ue^{\alpha i},\ e^{-2\alpha i}) = 2\cos\alpha\cos\mathrm{am}(u,\ \cos\alpha).$

Wird $\cos\mathrm{am}u$ nach der Formel von *Maclaurin* entwickelt, so findet man:

$$2)\quad \cos\mathrm{am}u = 1 - \frac{u^2}{1.2} + (1+4k^2)\frac{u^4}{1.2.3.4}$$
$$-(1+44k^2+16k^4)\frac{u^6}{1\ldots6} + (1+408k^2+912k^4+64k^6)\frac{u^8}{1\ldots8}$$
$$-(1+3688k^2+30768k^4+15808k^6+256k^{10})\frac{u^{10}}{1..10}\ \text{ctr.},$$

wo zur Abkürzung $1\ldots n$ statt $1.2.3\ldots n$ gesetzt ist. Von $n = 1$ an hat der Factor von

$$\frac{(-1)^n u^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)}$$

die Form:

$$A_0 + A_1k^2 + A_2k^4 + \ldots + A_nk^{2n} = \sum_{r=0}^{r=n} A_r k^{2r},$$

wo $A_0 = 1$, da für $k = 0$ sich $\cos\mathrm{am}u$ auf $\cos u$ reducirt. Die Gleichung 1) giebt durch Vergleichung der Factoren von $u^{2n+2}$:

$$3)\quad \sum_{r=0}^{r=n} A_r\cos(2n+1-4r)\alpha = \sum_{r=0}^{r=n} A_r(\cos\alpha)^{2r+1}.$$

Drückt man rechts $(\cos\alpha)^{2r+1}$ durch die Cosinus der ungraden Multipla von $\alpha$ aus, so erhält man aus 3) durch Gleichsetzung der Factoren von $\cos(2m+1)\alpha$ ein System linearer Gleichungen zur Bestimmung von $A_1,\ A_2\ldots A_n$. Die Rechnung vereinfacht sich etwas, wenn $A_r = 2^{2r}a_r$ gesetzt wird, wo $A_0 = a_0 = 1$. So giebt die Gleichung 3) für $n = 4$:

$$\cos 9\alpha + 2^8a_4\cos 7\alpha + 2^2a_1\cos 5\alpha + 2^6a_3\cos 3\alpha + 2^4a_2\cos\alpha =$$
$$\cos\alpha + 2^2a_1\cos^3\alpha + 2^4a_2\cos^5\alpha + 2^6a_3\cos^7\alpha + 2^8a_4\cos^9\alpha.$$

Hieraus folgt:

$$1 = a_4,\ 2^8a_4 = 9a_4 + a_3,\ 2^2a_1 = 36a_4 + 7a_3 + a_2,$$
$$2^6a_3 = 84a_4 + 21a_3 + 5a_2 + a_1,$$
$$2^4a_2 = 126a_4 + 35a_3 + 10a_2 + 3a_1 + 1,$$

also:

$$a_4 = 1,\ a_3 = 247,\ a_2 = 1923,\ a_1 = 922.$$

Mit der Entwickelung der elliptischen Functionen nach Potenzen des Arguments hat sich zuerst *Gudermann* eingehender beschäftigt. Nach Aufstellung der in 2) gegebenen Reihe wird die zweite der

Gleichungen 4) von § 43, nämlich $\cos\mathrm{am}(ku, \frac{1}{k}) = \Delta\mathrm{am}(u, k)$, zur directen Herstellung der Reihe für $\Delta\mathrm{am}u$ benutzt. Die Entwickelung von $\mathrm{am}u$ folgt aus:

$$\mathrm{am}u = \int_0^u \Delta\mathrm{am}u\,du.$$

(Crelle. Journ. t. 19 p. 80 u. f.). Für die Entwickelung von $\sin\mathrm{am}u$ hat *Gudermann* (l. c. p. 78) die ersten Terme ausgeführt. In Beziehung auf diese Function hat *Hermite* auf folgende Gleichung aufmerksam gemacht. In Folge der Transformation von *Landen* (pag. 299 Gl. 20) ist:

$$\sin\mathrm{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\sin\mathrm{am}u\cos\mathrm{am}u}{\Delta\mathrm{am}u}.$$

Man vertausche hierin $k$ mit $\frac{1-k}{1+k}$, also $k'$ mit $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, ferner $u$ mit $(1+k)ui$. Unter Zuziehung der Gleichungen 17) auf pag. 342 folgt:

$$4)\quad \sin\mathrm{am}\left[(1+\sqrt{k})^2 ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right]$$
$$= i(1+\sqrt{k})^2 \frac{\sin\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}\,\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}u}{1-k\sin^2\mathrm{am}n}.$$

Nun ist:

$$\frac{1-k\sin^2\mathrm{am}2u-\cos\mathrm{am}2u\,\Delta\mathrm{am}2u}{\sin\mathrm{am}2u}$$
$$= (1-k)^2\frac{\sin\mathrm{am}u}{\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}\,\frac{1+k\sin^2\mathrm{am}u}{1-k\sin^2\mathrm{am}u}.$$

Setzt man in 4) $\frac{u}{2}$ statt $u$, so lässt sich diese Gleichung auch schreiben:

$$\sin\mathrm{am}\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = i\frac{1-k\sin^2\mathrm{am}u-\cos\mathrm{am}u\,\Delta\mathrm{am}u}{(1-\sqrt{k})^2\sin\mathrm{am}u}.$$

Vertauscht man $k$ mit $-k$, so leitet man aus der so erhaltenen Gleichung und der vorstehenden die folgende ab:

$$(1-\sqrt{-k})^2\sin\mathrm{am}\left[\frac{(1+\sqrt{-k})^2}{2}ui, \left(\frac{1-\sqrt{-k}}{1+\sqrt{-k}}\right)^2\right]$$
$$-(1-\sqrt{k})^2\sin\mathrm{am}\left[\frac{(1+\sqrt{k})^2}{2}ui, \left(\frac{1-\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\right)^2\right] = 2ik\sin\mathrm{am}u.$$

Die Anwendung dieser Gleichung auf die Entwickelung von

$\sin\mathrm{am} u$ ist indessen nicht so einfach wie die Anwendung der Gleichung 1) auf $\cos\mathrm{am} u$. Eine Anwendung wesentlich verschiedener Art hat *Hermite* von den Transformationen zweiter Ordnung auf die Darstellung der Zähler und Nenner der elliptischen Functionen gemacht. Das Verfahren besteht einfach darin, Zähler und Nenner mit derselben Theta-Function zu multipliciren und die Resultate des § 40 zur Anwendung zu bringen. Setzt man in die Gleichungen 9) und 10) für $Q$ seinen Werth (pag. 298 letzte Zeile) ein, so folgt:

$$5)\quad \begin{cases} \vartheta(x)\,\vartheta_3(x) = \vartheta(2x, q^2)\sqrt{\dfrac{2K\sqrt{k'}}{\pi}}, \\ \vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x) = \vartheta_1(2x, q^2)\sqrt{\dfrac{2K\sqrt{k'}}{\pi}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 23), 24) und 30) geben:

$$6)\quad \begin{cases} \vartheta(x)\,\vartheta_1(x) = \vartheta_1(x, \sqrt{q})\sqrt{\dfrac{2K\sqrt{k}}{\pi}}, \\ \vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x) = \vartheta_2(x, \sqrt{q})\sqrt{\dfrac{2K\sqrt{k}}{\pi}}. \end{cases}$$

Wegen $\vartheta_3(0) = \sqrt{\dfrac{2K}{\pi}}$ erhält man aus den Gleichungen 33):

$$7)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x) = e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_1(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q})\sqrt{\dfrac{K\sqrt{kk'}}{\pi}}, \\ \vartheta(x)\,\vartheta_2(x) = e^{-\frac{\pi i}{8}}\vartheta_2(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q})\sqrt{\dfrac{K\sqrt{kk'}}{\pi}}. \end{cases}$$

Es ist:

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_0^\infty (-1)^m q^{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2}\sin(2m+1)x.$$

Man trenne rechts die graden und ungraden Werthe von $m$, setze im ersten Falle $m = 2n$, im zweiten $m = -(2n+1)$. Man findet so:

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{-\infty}^{\infty} q^{\left(\frac{4n+1}{2}\right)^2}\sin(4n+1)x = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{4n^2+2n}\sin(4n+1)x.$$

Ebenso folgt:

$$\vartheta_2(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\sum_{-\infty}^{\infty} q^{4n^2+2n}\cos(4n+1)x.$$

Im Folgenden soll das summirende Element $n$ alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen.

Es ist nun:

$$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)},$$

$$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)},$$

$$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)} = \sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)}.$$

Mittelst der Gleichungen 5), 6) und 7) geben die vorstehenden Gleichungen zu folgenden Entwickelungen Veranlassung:

8) $$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2\sqrt{k}}}\,\frac{\vartheta_1(x,\ e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})}{\vartheta(2x,\ q^2)} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{k}}\,q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx}.$$

9) $$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_2(x,\sqrt{q})}{\vartheta(2x,\ q^2)} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2}\cos 4nx}.$$

10) $$\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt[4]{k'}\,e^{\frac{i\pi}{8}}\,\frac{\vartheta_2(x,\sqrt{q})}{\vartheta_2(x,\ e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})} = \sqrt[4]{k'}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}.$$

11) $$\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{8}}}{\sqrt[4]{k^3}}\,\frac{\vartheta_1(2x,\ q^2)}{\vartheta_2(x,\ e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{k^3}}\,q^{\frac{3}{8}}\,\frac{\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\cos(4n+1)x}.$$

12) $$\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\vartheta_1(2x,\ q^2)}{\vartheta_1(x,\sqrt{q})} = \sqrt{2}\sqrt[4]{\frac{k'^3}{k^3}}\,\frac{\sum q^{8n^2+4n}\sin(8n+2)x}{\sum q^{2n^2+2n}\sin(4n+1)x}.$$

$$13)\quad \Delta\,\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt[4]{k'^3}\,e^{-\frac{i\pi}{8}}\,\frac{\vartheta_1(x, e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})}{\vartheta_1(x, \sqrt{q})} = \sqrt[4]{k'^3}\,\frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}{\sum q^{2n^2+n}\sin(4n+1)x}.$$

Nimmt man in 8) $x = \frac{\pi}{2}$, in 10) $x = 0$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}\,\frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum(-1)^n q^{2n^2}},\quad \sqrt[4]{k'} = \frac{\sum(-1)^n q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}}.\ ^*)$$

Diese Gleichungen für $\sqrt[4]{k}$ und $\sqrt[4]{k'}$, sowie eine Anzahl ähnlicher Gleichungen hat zuerst *Jacobi* aufgestellt in der Abhandlung: „Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zugleich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten sind." (Crelle. Journ. t. 37 p. 76—77, Mathem. Werke II. p. 82—83).

Nimmt man in 11) $x = \frac{\pi}{2}$, in 13) $x = 0$, so findet man:

$$\sqrt[4]{k^3} = 2\sqrt{2}\,q^{\frac{3}{8}}\,\frac{\sum(4n+1)q^{8n^2+4n}}{\sum(-1)^n(4n+1)q^{2n^2+n}},$$

$$\sqrt[4]{k'^3} = \frac{\sum(4n+1)q^{2n^2+4n}}{\sum(-1)^n(4n+1)q^{2n^2+n}}.$$

Von den Gleichungen 9)—13) hat *Hermite* noch folgende interessante Anwendung gemacht. Es sei:

---

*) Mittelst der Gleichung für $\sqrt[4]{k}$ lässt sich ziemlich leicht die von *Sohnke* (Crelle. J. t. 16 p. 113) aufgestellte Reihe finden.

Setzt man:

$$\frac{1}{1-2p+2p^4-2p^9\ldots} = 1 + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + \ldots,$$

multiplicirt mit dem Nenner des links stehenden Bruchs, so findet man ohne Mühe:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 8,\ a_4 = 14,\ a_5 = 24,\ a_6 = 40,\ a_7 = 64,\ a_8 = 100,$$
$$a_9 = 154,\ a_{10} = 232,\ a_{11} = 344,\ a_{12} = 504,\ a_{13} = 728\ldots$$

In Folge der Gleichung für $\sqrt[4]{k}$ folgt dann:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,q^{\frac{1}{8}}[1-q-q^3+q^6+q^{10}-q^{15}-q^{21}\ldots][1+a_1q^2+a_2q^4+a_3q^6\ldots].$$

Um die Entwickelung bis $q^{26}$ zu führen, hat man nur nöthig, im zweiten Factor rechts die Reihe bis $a_{13}q^{26}$ fortzusetzen.

$$14)\quad \begin{cases} \lambda(u,k) = \sqrt{1+\sin\operatorname{am} u}\,\sqrt{1+k\sin\operatorname{am} u}, \\ \lambda_1(u,k) = \sqrt{1+\sin\operatorname{am} u}\,\sqrt{1-k\sin\operatorname{am} u}. \end{cases}$$

Nach den Transformationsgleichungen von *Landen* (pag. 299) ist:

$$\sin\operatorname{am}\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{(1+k')\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Vertauscht man in den Gleichungen 14) $k$ mit $\frac{1-k'}{1+k'}$ und $u$ mit $(1+k')u$, so findet man:

$$15)\quad \begin{cases} \lambda\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \sin\operatorname{am} u + \frac{\cos\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} \\ \qquad = \sin\operatorname{am} u + \sin\operatorname{am}(K-u), \\ \lambda_1\left[(1+k')u, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \cos\operatorname{am} u + \frac{k'\sin\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} \\ \qquad = \cos\operatorname{am} u + \cos\operatorname{am}(K-u). \end{cases}$$

Die Gleichungen 9) und 10) geben durch Division:

$$16)\quad \frac{\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{k}}\, e^{-\frac{i\pi}{8}}\, \frac{\vartheta_2(x, e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})}{\vartheta(2x, q^2)}.$$

Ebenso erhält man aus 8) und 13):

$$17)\quad \frac{k'\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{k'}{k}}\,\frac{\vartheta_1(x,\sqrt{q})}{\vartheta(2x,q^2)}.$$

Es ist:

$$18)\quad \vartheta_1(x,p)+\vartheta_2(x,p) = \vartheta_2\left(\frac{\pi}{2}-x, p\right)+\vartheta_2(x,p) =$$

$$\sum_{-\infty}^{\infty} p^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\left[\cos(2n+1)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2n+1)x\right] =$$

$$2\sum_{-\infty}^{\infty}\cos\frac{2n+1}{4}\pi\; p^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\left(x-\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\sqrt{2}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\, p^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

da:

$$\cos(2n+1)\frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{(-1)}{\sqrt{2}}, & n=2m, \\ \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{2}}, & n=2m+1, \end{cases} = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass:

$$e^{\frac{\pi i}{2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} e^{\frac{\pi i}{8}},$$

giebt die Gleichung 17) $p = e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}$ gesetzt:

$$19)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}) + \vartheta_2(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}) = \\ \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{8}} \sum_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{q})^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\,(x-\frac{\pi}{4}) = \\ \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{8}}\, \vartheta_2(x-\frac{\pi}{4}, \sqrt{q}). \end{cases}$$

Für $p = \sqrt{q}$ erhält man aus 17):

$$20)\quad \begin{cases} \vartheta_1(x, \sqrt{q}) + \vartheta_2(x, \sqrt{q}) = \\ \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (\sqrt{q})^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)\,(x-\frac{\pi}{4}) = \\ \sqrt{2}\, e^{-\frac{\pi i}{8}}\, \vartheta_2(x-\frac{\pi}{4}, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}). \end{cases}$$

In den Gleichungen 15) nehme man $u = \frac{2Kx}{\pi}$. Mit Rücksicht auf die Gleichungen 8), 9), 16), 17), 18) und 19) folgt:

$$21)\quad \begin{cases} \lambda\left[(1+k')\frac{2Kx}{\pi}, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{e^{-\frac{\pi i}{8}}}{\sqrt{2}\sqrt[4]{k}} \frac{\vartheta_1(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q}) + \vartheta_2(x, e^{\frac{\pi i}{2}}\sqrt{q})}{\vartheta(2x, q^2)} \\ \qquad = \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \frac{\vartheta_2(x-\frac{\pi}{4}, \sqrt{q})}{\vartheta(2x, q^2)}, \\ \lambda_1\left[(1+k')\frac{2Kx}{\pi}, \frac{1-k'}{1+k'}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_1(x, \sqrt{q}) + \vartheta_2(x, \sqrt{q})}{\vartheta(2x, q^2)} = \\ \qquad e^{-\frac{\pi i}{8}} \sqrt[4]{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(x-\frac{\pi}{4}, e^{\frac{i\pi}{2}}\sqrt{q})}{\vartheta(2x, q^2)}. \end{cases}$$

Geht $q$ über in $\sqrt{q}$, so gehn nach Gleichungen 29) und 31) von § 40 $k$ und $K$ respective über in $\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ und $(1+k)K$. Es geht also

$k'$ über in $\frac{1-k}{1+k}$ und $(1+k')K$ über in $2K$. Lässt man in den Gleichungen 21) $q$ und $x$ respective übergehn in $\sqrt{q}$ und $\frac{x}{2}$, so folgt:

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \sqrt[4]{\frac{1+k}{2\sqrt{k}}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{2x-\pi}{4}, q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta(x, q)} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{1+k}{2\sqrt{k}}}\, 2q^{\frac{1}{16}} \frac{\sum q^{n^2+\frac{n}{2}} \cos(4n+1)\frac{2x-\pi}{4}}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx},$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right) = \sqrt[4]{\frac{1-k}{2\sqrt{k}}} e^{-\frac{\pi i}{8}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{2x-\pi}{4}, e^{\frac{\pi i}{2}} q^{\frac{1}{4}}\right)}{\vartheta(x, q)} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{1-k}{2\sqrt{k}}}\, 2q^{\frac{1}{16}} \frac{\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{n^2+\frac{n}{2}} \cos(4n+1)\frac{2x-\pi}{4}}{\sum (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx}.$$

Die Gleichungen 14) und 15) von § 22 geben auch:

$$\frac{2kK}{\pi}\left[\operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi} + \operatorname{sin\,am}\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] =$$

$$8\sum_1^\infty \frac{q^{\frac{2r-1}{2}}}{1-q^{2r-1}} \sin\frac{2r-1}{4}\pi \cos(2r-1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right) =$$

$$\frac{8}{\sqrt{2}}\sum_0^\infty (-1)^m \frac{q^{2m+\frac{1}{2}}}{1-q^{4m+1}} \cos(4m+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

$$+\frac{8}{\sqrt{2}}\sum_1^\infty (-1)^{m-1} \frac{q^{2m-1+\frac{1}{2}}}{1-q^{4m-1}} \cos(4m-1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Nimmt man in der ersten Summe $m = n$, in der zweiten $m = -n$, so ist auch:

$$\frac{2kK}{\pi}\left[\operatorname{sin\,am}\frac{2Kx}{\pi} + \operatorname{sin\,am}\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] =$$

$$4\sqrt{2}\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{2n+\frac{1}{2}}}{1-q^{4n+1}} \cos(4n+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Ebenso folgt:

$$\frac{2kK}{\pi}\left[\cos\mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi}+\cos\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=$$

$$4\sqrt{2}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{q^{2n+\frac{1}{2}}}{1+q^{4n+1}}\cos(4n+1)\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Lässt man in diesen Gleichungen $q$ in $\sqrt{q}$ und $x$ in $\frac{x}{2}$ übergehn, so erhält man für die Functionen $\lambda$ und $\lambda_1$ die folgenden Reihen:

$$\lambda\left(\frac{2Kx}{\pi},\ k\right)=\frac{\pi\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{4}}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1-q^{2n+\frac{1}{2}}}\cos(4n+1)\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\lambda_1\left(\frac{2Kx}{\pi},\ k\right)=\frac{\pi\sqrt{2}\,q^{\frac{1}{4}}}{K\sqrt{k}}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{q^n}{1+q^{2n+\frac{1}{2}}}\cos(4n+1)\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

# Namen-Register.*)


Seite

*Abel.*
- Entdeckung der elliptischen Functionen . . . . . 3
- Elliptische Functionen mit imaginärem Argument . . . . . 35
- Additionstheorem der elliptischen Integrale . . . . . 142
- Die elliptischen Integrale dritter Gattung und allgemeinere Transcendenten . . . . . 222
- Das Problem der Transformation § 36. . . . . 237
- Anwendung des Theorems von *Cotes* zur Transformation . . . . 247
- Arbeiten über Transformation . . . . . 256, 282, 293
- Arbeiten über Multiplication . . . . . 322, 328
- Die Theilung der elliptischen Functionen . . . . . 332
- Elliptische Functionen, deren Modul grösser wie die Einheit ist . . 337
- Die Transformationen erster Ordnung . . . . . 515

*d'Alembert.*
- Ueber elliptische Integrale und ihre geometrische Bedeutung . . 1, 471

*Allégret.*
- Ueber eine Differentialgleichung . . . . . 434

*Baehr.*
- Transformation und Multiplication . . . . . 371

*Bernoulli.* (*Jacob*).
- Elastische Curve . . . . . 470, 486
- Parabolische Spirale . . . . . 472

*Bernoulli* (*Johann*).
- Ueber eine besondere Art von Rectification . . . . . 473

*Bertrand.*
- Briefe von *Jacobi* an *Legendre* (vide *Borchardt*) . . . . . 4
- Ueber Arbeiten von *Talbot* . . . . . 496


*) Das Namen-Register hat die Bestimmung die im Werke vorkommenden Citate leicht auffinden zu können. Es wird hierdurch gleichzeitig eine Uebersicht über eine ziemliche Anzahl von Arbeiten aus der Theorie der elliptischen Functionen vermittelt. Aus diesem Grunde ist auch auf solche ufs ä tze hingewiesen, von denen im Texte keine weitere Analyse sich vorfindet. Zur Vervollständigung haben im Register noch einige Verbesserungen und nachträgliche Ergänzungen Aufnahme gefunden.

*Betti.* Seite
Multiplication . . . . . 336
Transformation . . . . . 370
Differentialgleichung für Zähler und Nenner der Multiplicationsformel 381
*Björling.*
Ueber Additionsgleichungen von *Jacobi.* . . . . . 453
*Booth.*
Geometrische Behandlung der elliptischen Integrale dritter Gattung 223
*Borchardt.*
„Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel." (Journal für Mathemat. t. 58 p. 127—134) . . . . . zu p 312
Die von *Bertrand* publicirten eilf Briefe von *Jacobi* an *Legendre* nebst den Antworten von *Legendre* sind vollständig wiedergegeben nebst erläuternden Anmerkungen des Herausgebers, *Borchardt*, im Journal für Mathematik t. 80 p. 205—279 u. d. T. „Correspondance mathématique entre *Legendre* et *Jacobi*."
*Brinkley.*
Ueber das Theorem von *Fagnano* . . . . . 492
*Brioschi.*
Multiplication . . . . . 336
„Sur une formule de transformation des fonctions elliptiques" (Compt. Rend. 1874 t. LXXIX p. 1065—1069) nachzutragen . . . . zu p. 371
Analoge Gleichungen zu den Modulargleichungen . . . . . 416
Ueber die Gleichung fünften Grades . . . . . 416
Eine deutsche Bearbeitung hiervon aus den Annali di Matematica (I p. 256—259) ist enthalten in der Zeitschr. f. Math. 4 Jhrg. p. 85—90.
Reduction elliptischer Integrale auf die Normalform . . . . . 439
*Broch.*
Ueber Additionsgleichungen von *Jacobi* . . . . . 453
Man findet diese Gleichungen reproducirt in *Broch*: Traité élémentaire des fonctions elliptiques. Christiania. 1867. (p. 23—25).
*Catalan.*
Verallgemeinerung eines Satzes von *Legendre* . . . . . 172
Ueber die Ellipsoidfläche . . . . . 504
*Cauchy.*
Ueber Theta-Functionen . . . . . 92
Ueber unendliche Producte (vide Didon) . . . . . 449
*Cayley.*
„Mémoire sur les fonctions doublement périodiques" (Journ. de Math. t. X, Année 1845 p. 385—420) . . . . . zu p. 52
Verallgemeinerung der Additionsgleichungen . . . . . 321
Differentialgleichung für Zähler und Nenner der Multiplicationsformel 381
Transformation dritter Ordnung . . . . . 520
*Chasles.*
Ueber confocale Kegelschnitte . . . . . 498
Ueber die Lemniscate . . . . . 503

*Clausen.* Seite

Substitution . . . . . 27

Ueber das Siebenzehneck der Lemniscate . . . . . 334

*Darboux.*

Beweis von *Euler's* Additionstheorem . . . . . 140

*Despeyrous.*

Beweis von *Euler's* Additionstheorem . . . . . 139

Der Beweis ist enthalten in: „Origine géométrique des fonctions elliptiques et formules fondamentales." (Mémoires de l'Académie de Toulouse. 7me série t. V p. 211—229). Durch ein Missverständniss ist im Texte *Deflers* als Erfinder des Beweises angegeben. Der Beweis wurde zuerst von *Liouville* für *Despeyrous* gegen eine hinterlassene Aufzeichnung von *Sturm* reclamirt. (Compt. Rend. 1856 t. XLII p. 1087).

*Didon.*

„Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique." (Journ. de Math. 2me série. t. XIV Année 1869, p. 230—240). Herleitung der elliptischen Functionen aus den von *Cauchy* untersuchten unendlichen Producten . . . . . zu p. 449

*Dirichlet* vide *Lejeune-Dirichlet.*

*Dumas.*

Integrale dritter Gattung bei einem mechanischen Problem . . . 223

*Durège.*

Ueber periodische Functionen . . . . . 11

Darstellung einer beliebigen Grösse durch $\sin \mathrm{am}(u, k)$ . . . . . 196

*Eisenstein.*

Ueber trigonometrische Functionen . . . . . 11

Ueber unendliche Producte (v. *Cayley* u. *Schläfli*) . . . . . 45, 52

Behandlung der elliptischen Functionen . . . . . 102

Additionstheorem der elliptischen Functionen . . . . . 142

Lemniscatentheilung . . . . . 334

Differentialgleichung für Zähler und Nenner der Transformationsformeln . . . . . 382

*Enneper.*

Ueber allgemeine Theta-Functionen . . . . . 95

Verallgemeinerung eines Satzes von *Legendre* . . . . . 172

Ueber eine Differentialgleichung für elliptische Integrale . . . . 175

*Essen.*

Transformation . . . . . 371

*Euler.*

Ueber eine Theorie elliptischer Integrale . . . . . 1

Ueber trigonometrische Functionen . . . . . 11

Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung . . . 131

Ueber die Herleitung des Additionstheorems von *Lagrange* . . . 136

Ueber den Satz von *Fagnano* . . . . . 480

Multiplication der elliptischen Integrale erster Gattung . . . . . 481

Seite
Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung . . . 482
Dreitheilung der Ellipse . . . . . 483
Geometrische Anwendungen elliptischer Integrale . . . . . 484
Elastische Curve . . . . . 485
Vergleichung von Bogen algebraischer Curven . . . . . 486
Reduction elliptischer Integrale . . . . . 487
Allgemeinstes Additionstheorem für elliptische Integrale, Priorität gegen *Legendre* . . . . . 487

*Fagnano.*
Sätze über Ellipsen- u. Hyperbelbogen . . . . . 457, 468
Reclamation vide *Galfi* . . . . . 471
Problem über die biquadratische Parabel . . . . . 474
Vergleichung von Bogen einiger Curven . . . . . 474
Untersuchungen über die Theilung der Lemniscate . . . . . 477

*Galfi.*
Reclamation einiger Sätze von *Maclaurin* für *Fagnano* . . . . . 471

*Gauss.*
Entdeckung der elliptischen Functionen . . . . . 5
Reduction eines elliptischen Integrals . . . . . 27, 437
Ueber Theta-Functionen . . . . . 95
Transformation, nach *Gauss* benannnt . . . . . 310
Arithmetisch-geometrisches Mittel (vide *Borchardt*) . . . . . 312
Lemniscatentheilung . . . . . 335
Transformation einiger Producte in Reihen . . . . . 448

*Genocchi.*
Das Additionstheorem von *Euler* . . . . . 142
Reduction elliptischer Differentiale . . . . . 439

*Göpel.*
Abelsche Functionen . . . . . 81

*Göring.*
Theilwerthe der Theta-Functionen und Formeln von *Gauss* . 335, 417

*Gordan.*
Allgemeine Transformation der Theta-Functionen . . . . . 369

*Graves.*
Satz über confocale Kegelschnitte . . . . . 498

*Gudermann.*
Transformation . . . . . 371
Differentialgleichung für Zähler und Nenner der Transformationsgleichungen . . . . . 387
Ueber eine Differentialgleichung . . . . . 393
Entwickelung von $\cos \operatorname{am} u$, $\Delta \operatorname{am} u$, $\sin \operatorname{am} u$ . . . . . 524
In den Bänden 18, 19, 20, 21, 23 und 25 des Journals für Mathematik hat *Gudermann* von 1838—1843 unter dem Titel „Theorie der Modular-Functionen und Modular-Integrale“ eine Reihe von Aufsätzen geliefert, welche 1844 gesammelt, in den behandelten Theilen ein ausserordentlich ausführliches Lehrbuch der Theorie der elliptischen Functionen bilden.

*Guetzlaff.* Seite
Modulargleichung für die Transformation VII. Ordnung . 410, 454, 520
*Haedenkamp.*
Verallgemeinerung eines Satzes von *Legendre* . . . . . 172
*Hart.*
Geometrisches Theorem über geodätische Linien . . . . . 498
*Heine.*
Ueber elliptische Functionen . . . . . 53
Verification der Reihen für elliptische Functionen . . . . . 71
Ueber elliptische Integrale . . . . . 439
Ueber eine Reihe . . . . . 448
*Hermite.*
Briefwechsel mit *Jacobi* . . . . . 95
Ueber die Transformation zweiten Grades . . . . . 340
Transformation der Theta-Functionen . . . . . 369
Transformation der elliptischen Functionen . . . . . 371
Modulargleichungen und Gleichung fünften Grades . . . . . 416
Allgemeines Theorem über Theta-Functionen . . . . . 450
Transformation dritter Ordnung . . . . . 520
Entwickelung von cos am$u$ . . . . . 523
Anwendungen der Transformationen zweiter Ordnung auf die Entwickelungen einiger elliptischen Functionen . . . . . 525
*Hoffmann.*
Multiplicationsformeln für Lemniscatenfunctionen . . . . . 335
*Jacobi.*
Briefe an *Legendre* vide *Borchardt*
Entdeckung der elliptischen Functionen . . . . . 3
Ueber *Abel* . . . . . 4
Ueber periodische Functionen . . . . . 6
Substitution . . . . . 22, 27
Definitionen und Bezeichnungen elliptischer Functionen . . . . . 29
Functionen mit imaginärem Argument . . . . . 35
Entwickelung eines Products in eine Reihe . . . . . 74
Auffindung und Eigenschaften der Theta-Functionen . . . 78, 82, 86
Multiplicationstheorem der Theta-Functionen . . . . . 95
Theorie der elliptischen Functionen . . . . . 116
Reihen und Producte aus der Theorie der elliptischen Functionen . 123
Fundamentalgleichungen für elliptische Functionen . . . . . 143
Das elliptische Integral zweiter Gattung . . . . . 161, 166, 167
$\vartheta$ (x) in Function der Amplitudo . . . . . 163
Additionstheorem der elliptischen Integrale zweiter Gattung . . . 165
Reihenentwickelung des elliptischen Integrals dritter Gattung . . 198
Erste Darstellung des Additionstheorems . . . . . 202
Vertauschung von Argument und Parameter . . . . . 206
Addition der Parameter . . . . . 208
Allgemeine Untersuchungen über Integrale dritter Gattung und ihre verschiedenen Formen . . . . . 210

Seite
Erste Publicationen über Integrale dritter Gattung . . . . . 222
Erste Untersuchungen über Transformationen . . . . . 225
Literarische Nachweise . . . . . 236
Anwendung des Satzes von *Cotes* bei der Transformation . . . . 247
Erste Publicationen über Transformation . . . . . 255
Die allgemeine algebraische Transformation . . . . . 293
Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel von *Gauss* . . . . . 312
Geometrische Darstellung der Transformation von *Landen* . . . . 318
Zusammenhang von Transformation und Multiplication . . . . . 322
Elliptische Functionen, deren Modul grösser wie die Einheit ist . 337
Differentialgleichungen für die Zähler und Nenner der Transformations- und Multiplicationsgleichungen . . . . . 372, 381
Differentialgleichung dritter Ordnung der Moduli . . . . . 391
Ueber Modulargleichungen . . . . . 395
Modulargleichung für die Transformationen III. und V. Ordnung . 409
Allgemeines Theorem über Theta-Functionen . . . . . 449
Darstellung der Theta-Reihen durch Producte . . . . . 450
Folgerungen aus dem Additionstheoreme der ellip. Functionen 453, 455
Bestimmung eines Punctes einer Ellipsoidfläche . . . . . 506
Transformationen dritter und fünfter Ordnung . . . . . 518

*Jordan.*
Ueber Modulargleichungen . . . . . 416

*Joubert.*
Multiplicatorgleichungen. Gleichungen 5. und 6. Grades . . . . 416

*Ivory.*
Ueber Transformationen grader Ordnung . . . . . 294

*Kiepert.*
Siebzehntheilung der Lemniscate. Complexe Multiplication . . . 335
Multiplication und Division elliptischer Functionen . . . . . 336

*Königsberger.*
Transformation und Multiplication . . . . . 336
Transformationen zweiten Grades . . . . . 340, 342
Bezeichung der Theta-Functionen . . . . . 346
Ueber die Theta-Functionen . . . . . 370

*Kronecker.*
Ueber complexe Multiplication . . . . . 334

*Krusemark.*
Theorie der elliptischen Functionen . . . . . 102

*Küpper.*
Ueber einen Satz von *Legendre* . . . . . 318
Geometrische Untersuchungen über Ellipsen- und Hyperbelbogen . 469

*Lagrange.*
Ueber das Additionstheorem von *Euler* . . . . . 136
Beweis des Additionstheorems . . . . . 138
Transformationen zweiter Ordnung . . . . . 307

*Landen.* Seite
Transformation nach *Landen* benannt . . . . . 306
Theorem über die Hyperbel . . . . . 469
*Laplace.*
Ueber *Euler* . . . . . 491
*Lebesgue.*
Theorem über die Ellipsoidfläche . . . . . 506
*Legendre.*
Begründung der Lehre der elliptischen Integrale . . . . . 2
Das auf p. 1 erwähnte Werk ist eine Vervollständigung und neue Ausgabe der „Exercices de calcul intégral sur divers ordres de Transcendantes et sur les Quadratures." Paris 1811—1816. 3 Vol.
Normalform elliptischer Integrale . . . . . 11, 17
Ueber das Additionstheorem von *Euler* . . . . . 131
Classification elliptischer Integrale . . . . . 150, 158
Reductionsformeln für elliptische Integrale . . . . . 152
Das elliptische Integral zweiter Gattung . . . . . 159
Differentialgleichungen der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung . . . . . 168
Theorem über die ganzen Integrale erster und zweiter Gattung . . 171
Ueber den Parameter der Integrale dritter Gattung . . . . 175, 511
Das ganze Integral dritter Gattung . . . . . 205
Untersuchungen über Integrale dritter Gattung . . . . . 223
Ueber *Jacobi's* Transformationen . . . . . 237, 256, 294
Ueber *Landen* und seine Transformation . . . . . 306, 307
Berechnung elliptischer Integrale erster Gattung . . . . . 314
Ausdruck des Integrals erster Gattung durch zwei Integrale zweiter Gattung . . . . . 316
Relationen zwischen elliptischen Integralen zweiter Gattung . . . 317
Modulargleichung für die Transformation V. Ordnung . . . . . 410
Ueber Integrale, welche auf elliptische Integrale reductibel sind . . 431
Ellipsen- und Hyperbelbogen . . . . . 467, 469
Ellipsoidfläche . . . . . 503
Transformationen dritter und fünfter Ordnung . . . . . 519
Transformation der elliptischen Integrale zweiter Gattung . . . . 520
Briefe an *Jacobi* vide *Borchardt.*
*Lejeune-Dirichlet.*
Ueber *Abel* und *Jacobi* . . . . . 4, 5, 321 333
Ueber *Legendre* . . . . . 12
Anwendung eines Theorems auf Theta-Functionen . . . . . 90
Theorem der Integralrechnung . . . . . 446
*Libri.*
Lemniscatentheilung . . . . . 496
*Lindman.*
Reduction eines elliptischen Integrals . . . . . 439
*Liouville.*
Lemniscatentheilung . . . . . 334

Zur allgemeinen Theorie der elliptischen Integrale: Seite
„Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considerées comme fonctions de leur amplitude." (Journal de l'École Polyt. 1833 Cah. 23 t. XIV. p. 37—83). Auf p. 82 findet sich als Resultat: „Les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce ne sont jamais des quantités finies explicites."
„Mémoire sur les transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce, considerées comme fonctions de leur module." (Comp. Rend. 1840 t. X. p. 2).

*Lobatto.*
Reduction elliptischer Differentiale auf die Normalform . . . . . 26

*Lottner.*
Ueber das Additionstheorem von *Euler* (vergl. *Mathet*) . . . . . 142
Elliptische Integrale dritter Gattung bei einem mechanischen Problem 224

*Luchterhandt.*
Ueber eine Substitution . . . . . 22

*Mac Cullagh.*
Geometrischer Beweis des Theorems von *Landen* . . . . . 492
Theorem über confocale Kegelschnitte . . . . . 498

*Maclaurin.*
Geometrische Behandlung elliptischer Differentiale . . . . . 1, 471

*Malmsten.*
Entwickelung elliptischer Integrale als Kettenbrüche . . . . . 175
Ueber die Ellipsoidfläche . . . . . 511

*Mansion.*
Transformation und Multiplication . . . . . 336

*Mathet.*
„Sur les fonctions elliptiques." (Journal de Math. 2me série. t. VI. Année 1861 p. 329—365). Die Abhandlung enthält ausgedehnte Untersuchungen über zwei Functionalgleichungen, welche auf elliptische Functionen führen, zu p. . . . . 142

*Mathieu.*
Ueber Modulargleichungen . . . . . 415

*Meissel.*
Ueber allgemeine Theta-Functionen . . . . . 95
Ueber ganze Integrale zweiter Gattung . . . . . 522

*Meyer.* (C. O.)
Entwickelungen einiger elliptischer Functionen . . . . . 511

*Meyer.* (U. H.)
Transformation . . . . . 371

*Minding.*
Integraltafeln . . . . . 12
Ueber einige Integrale . . . . . 434

*Moigno.*
Ueber ein Theorem von *Legendre* . . . . . 172
Ellipsoidfläche . . . . . 503

*Müller.* (F.) Seite
Reduction elliptischer Integrale . . . . . 439
Geometrische Arbeiten von *Maclaurin* . . . . . 471
*Plana.*
Substitution . . . . . 26
Darstellung von *Jacobi's* Transformationsgleichungen . . . . . 294
Reclamation für *Euler* . . . . . 491
Ellipsoidfläche . . . . . 505
*Poisson.*
Ueber die *Fundamenta* von *Jacobi.* Transformation . . . . . 5, 294
Theorem über Theta-Reihen . . . . . 92
*Richelot.*
Normalform elliptischer Differentiale . . . . . 18, 22
Additionstheorem der Theta-Functionen . . . . . 129, 139
Ausdehnung einer Integrationsmethode von *Lagrange* . . . . . 139
Reductionsgleichungen für elliptische Integrale . . . . . 154, 157
Darstellung einer beliebigen Grösse durch sinam $(u + w, k)$ . . . 193
Ueber *Lagrange* und seine Methode . . . . . 307
Transformation von *Landen* . . . . . 318
Transformationen zweiten Grades . . . . . 340
Transformation der Theta-Functionen . . . . . 370
Ueber einige Integrale . . . . . 434, 436
Ueber eine fundamentale Gleichung *Jacobi's* . . . . . 456
*Riemann.*
Abelsche Functionen . . . . . 82
Reclamation für *Euler* . . . . . 491
*Röthig.*
Ueber einige elliptische Integrale . . . . . 434
*Rosenhain.*
Abelsche Functionen . . . . . 81
Theta-Functionen . . . . . 86, 95
Dreifach periodische Functionen . . . . . 224
*Salmon.*
Geometrische Beweise einiger Sätze . . . . . 498
*Sanio.*
Transformation . . . . . 371
*Schellbach.*
Theta-Functionen . . . . . 26
Ueber das Additionstheorem von *Euler* . . . . . 142
*Schering.*
Ueber den Nachlass von *Gauss* . . . . . 335
*Schläfli.*
„Ueber die Begründung der Theorie der elliptischen Functionen durch die Betrachtung unendlicher Doppelproducte." (Archiv für Mathematik Th. XIV. p. 395—451 zu p. 52.
Transformation der Theta-Functionen . . . . . 416

*Schlömilch.*

Seite

Functionen mit imaginärem Argument . . . . . 36
Reihenentwickelungen . . . . . 64
Darstellung der Reihen von *Lagrange* und *Fourier* . . . . . 440
Ellipsoidfläche . . . . . 511

*Schröter.*

Ueber Theta-Functionen . . . . . 102
Anwendung der Transformation von *Gauss* . . . . . 319
Product zweier Theta-Functionen . . . . . 421
Modulargleichungen . . . . . 416, 417, 424
Potenzen und Theilung der Theta-Functionen . . . . . 417

*Sohncke.* *)

Darstellung der *Jacobi'schen* Transformation . . . . . 295
Multiplication . . . . . 321
Construction der Modulargleichungen . . . . . 395
Erste Notiz über Modulargleichungen . . . . . 415
Integrale zweiter Gattung bei einem mechanischen Problem . . . 511

*Somoff.*

Zerlegung eines unendlichen Products in Partialbrüche . . . . . 59
Berechnung der Integrale dritter Gattung . . . . . 223

*Talbot.*

Verschiedene Theoreme über Curvenbogen . . . . . 493

*Thomae.*

Ueber Theta-Functionen . . . . . 95, 369

*Tissot.*

Integrale dritter Gattung bei einem mechanischen Problem . . . 223

*Tortolini.*

Reduction elliptischer Integrale auf die Normalform . . . . . 26

*Wallace.*

Rectification der Ellipse. Theorem von *Fagnano* . . . . . 492

*Weierstrass.*

Reduction elliptischer Integrale auf die Normalform . . . . . 26
Abelsche Functionen . . . . . 82
„Theorie des Abelschen Functionen." (Crelle, Journ. f. Math. t. 52 p. 285—380). Das zweite Kapitel (p. 331—380) enthält eine Digression über die elliptischen Transcendenten.

*Wichert.*

Siebzentheilung der Lemniscate . . . . . 335

*) Im Texte ist durch Versehn *Sohnke statt Sohncke* gesetzt.

# Druckfehler.

Durch die Entfernung des Verfassers vom Druckorte haben sich einige Druckfehler, namentlich in den ersten Bogen, nicht vermeiden lassen. Man bittet sinnstörende Fehler und einige typographische Versehn in Formeln und Zahlen, welche die folgende Zusammenstellung enthält, im Texte zu verbessern.

Seite 1. 14. Zeile von unten lese man: Ellipsen.
„ 3. 4. „ „ „ „ „ Bänden.
„ 6. 14. „ „ „ fehlt „n“ in transcendentium.
„ 26. 6. „ „ „ lese man: 57—75.
„ 30. 4. „ „ oben } lese man $x$ statt $y$.
„ „ 16. „ „ „ }
„ 31. 4. „ „ unten }
„ 33. In Gleichung 5) lese man rechts: $K—u$.
„ 39. 3. Zeile von unten lese man: Gleichungen.
„ 53. In der Gleichung für $K$ steht unter dem Integralzeichen $\pi$ statt $dt$.
„ 57. § 12. Gleichung 1) muss heissen $\frac{\psi(\alpha)}{\varphi(\alpha)}$, in den drei vorhergehenden Zeilen ist in $\varphi(a)$ und $\psi(a)$ $\alpha$ statt $a$ zu setzen.
„ 92. In der Anmerkung lese man: Paris 1827.
„ 94. 2. Zeile von unten lese man: p. 494 des Herausgebers.
„ 109. In Gleichung 1) von IV. lese man: $\vartheta_3(x)^4 + \vartheta_1(x)^4$.
„ 116. 6. Zeile von oben lese man „Form“ statt Formen.
„ „ In der Ueberschrift muss stehn: § 21.
„ 136. 13. Zeile von oben lese man: 20—57.
„ 142. 18. „ „ „ „ „ Bullettino.
„ 189. 12. „ „ unten „ „ F. E. t. 1. p. 74.
„ 307. In der Anmerkung 10. Zeile von unten lese man 1784 statt 1788.
„ 393. 2. Zeile von oben lese man: 17). Durch ein Versehn folgt Gleichung 19) unmittelbar auf Gleichung 17).
„ 394. In der Ueberschrift von § 48 lese man: Sohncke.
„ 449. 18. Zeile von oben lese man: p. 1069—1072.
„ 457. 17. „ „ „ „ „ Bullettino di bibliografia.
„ „ 6. „ „ unten „ „ Elittici.
„ 459. 7. „ „ oben „ „ dovea.
„ 460. 3. „ „ „ „ „ intiero.
„ „ 10. „ „ unten „ „ } come.
„ „ 6. „ „ „ „ „ }
„ 462. fehlt nach der Gleichung zu Anfang der Seite: determina un secondo arco.
„ 474. 16. Zeile von oben lese man: di due.

---

Halle, Druck von E. Karras.

U.C. BERKELEY LIBRARIES